

# 실험계획법과 반응표면법을 이용한 효율적인 신뢰도 기법의 개발

이상훈\*(한국과학기술원 기계공학과), 광병만(한국과학기술원 기계공학과)

## An efficient Reliability Analysis Method Based on The Design of Experiments Augmented by The Response Surface Method

S. H. Lee(Mechanical Eng. Dept. KAIST), B. M. Kwak(Mechanical Eng. Dept., KAIST)

### ABSTRACT

A reliability analysis and design procedure based on the design of experiment (DOE) is combined with the response surface method (RSM) for numerical efficiency. The procedure established is based on a 3<sup>rd</sup> full factorial DOE for numerical quadrature using explicit formula of optimum levels and weights derived for general distributions. The full factorial moment method (FFMM) shows good performance in terms of accuracy and ability to treat non-normally distributed random variables. But, the FFMM becomes very inefficient because the number of function evaluation required increases exponentially as the number of random variables considered increases. To enhance the efficiency, the response surface moment method (RSMM) is proposed. In RSMM, experiments only with high probability are conducted and the rest of data are complemented by a quadratic response surface approximation without mixed terms. The response surface is updated by conducting experiments one by one until the value of failure probability is converged. It is calculated using the Pearson system and the four statistical moments obtained from the experimental data. A measure for checking the relative importance of an experimental point is proposed and named as influence index. During the update of response surface, mixed terms can be added into the formulation.

**Key Words** : Structural Reliability (구조신뢰도), Moment Method (모멘트법), Design of Experiments (실험계획법), Response Surface Method (반응표면법), Pearson System (피어슨 시스템)

### 1. 서론

손상확률이란 어떤 제품이나 구조물이 명시된 사용기간 내에 파괴, 손상 등으로 인하여 본연의 설계 목적, 기능을 수행하지 못하게 될 확률을 의미한다. 이 확률은 수학적으로 손상영역에서 시스템을 구성하고 있는 확률변수들의 결합확률밀도함수를 적분함으로써 구할 수 있는데 해석적으로 이 적분을 계산하는 것은 거의 불가능하기 때문에 많은 근사방법, 모사방법이 개발되었다. 근사방법의 대표적인 것으로 일차신뢰도법(FORM), 이차신뢰도법(SORM) 등이 있고 모사방법의 대표적인 것으로 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation), 모멘트법 등이 있다. 모멘트법은 시스템 성능함수의 통계적 모멘트(Statistical moment)를 구해 피어슨 시스템(Pearson system)과 같은 경험적 확률분포시스템

을 활용하여 성능함수의 확률분포를 구하고 손상확률을 계산하는 방법이다. 모멘트법은 일차신뢰도법에서와 같이 최대가능 손상점을 찾는 번거로운 과정이 필요하지 않고 사용하기 쉬우며 손상확률뿐 아니라 성능함수의 확률분포함수의 정보도 얻을 수 있다는 장점이 있다.

모멘트법에서는 성능함수의 통계적 모멘트를 계산하기 위하여 잘 계획된 계산점에서 성능함수의 값을 구해야 하는데 이 계산점들은 접근방식에 따라 절점(Quadrature point), 확률집중점(Probability concentration point), 실험점 등으로 불린다. 이 중 실험계획법을 이용한 통계적 모멘트의 계산은 Taguchi[1]와 D'Errico 등[2]에 의해서 연구된 바 있다. 이들은 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 3 수준 실험계획을 제안하고 공차설계에 활용하였다. Seo 와 Kwak[3]은 Taguchi 와 D'Errico 등이 제

안한 3 수준 실험계획을 비정규분포를 따르는 확률 변수에도 적용할 수 있도록 수준과 가중치의 공식을 유도하여 추가적인 계산상의 어려움이나 정확도의 손실 없이 비정규분포를 처리할 수 있게 하였다.

이상과 같은 실험계획법을 이용한 신뢰도 해석 기법은 위에서 언급한 여러 장점에도 불구하고 현실적인 구조물의 신뢰도 해석에 바로 사용하기 어려운 측면이 있는데, 가장 큰 원인은 지나치게 많은 계산량이라 할 수 있다. Taguchi 등이 제안한 3 점 정보를 이용한 신뢰도 해석은 확률변수의 개수에 따라 계산량이 3<sup>n</sup>의 오더로 증가하며 많은 확률변수가 고려되고 성능함수의 해석에 많은 시간이 필요한 현실적인 문제에는 적용이 불가능하다고 할 수 있다.

이에 논문에서는 기존의 3 점 정보를 이용하는 실험계획법의 장점을 최대한 유지하면서 계산량을 획기적으로 줄일 수 있는 새로운 신뢰도 해석기법을 제안하고자 한다.

## 2. 실험계획법을 이용한 신뢰도해석

### 2.1 수준과 가중치의 유도

확률변수  $x$ 의 평균이  $\mu$ 이고 확률밀도함수가  $f(x)$ 로 주어질 때  $x$ 의  $k$ 차 통계적 모멘트는 다음과 같이 구해진다.

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \quad (1)$$

이 식을 세 개의 절점으로 구성된 수치구적법(numerical quadrature)으로 표현하면 다음과 같다.

$$M_k = w_1 (\alpha_1 \sigma)^k + w_2 (\alpha_2 \sigma)^k + w_3 (\alpha_3 \sigma)^k \quad (2)$$

$(k=0, 1, 2, 3, 4, \text{ and } 5)$

실험계획법의 관점에서  $\alpha_i \sigma$ 를 수준  $l_i$ 로 치환, 정리하면 6개의 비선형 연립방정식이 얻어진다. 계산의 편의상 5차 모멘트에 관한 식을 제외하고  $l_2 = \mu$ 라는 식을 대입하여 방정식을 풀면  $l_i$ ,  $w_i$ 에 관한 식이 매우 간단한 형태로 구해진다. 여기서 한가지 유의할 점은 5차 모멘트에 관한 식 대신  $l_2 = \mu$ 를 사용함으로써 수준과 가중치에 대한 명시적 공식을 유도할 수 있었지만 수치구적법의 차수가 하나 줄어들었기 때문에 비선형성이 큰 문제에 대해서는 5차 모멘트 조건을 그대로 사용하여 유도된 수준, 가중치를 사용할 때보다 정확도가 떨어진다는 점이다. 또한 지수분포와 같은 일부 비대칭 분포의 경우 구해진 수준이 분포의 정의역을 벗어나는 문제도 있다. 그러나 5차 모멘트 조건을 그대로 사용하는 경우 수준과 가중치의 식을 닫힌 형태로 얻을 수 없기 때문에 본 논문에서는 5차 모멘트 조건 대신  $l_2 = \mu$ 를 사용하여 얻어진 수준과 가중치에 근거한 내용을 실도록 하겠다.

$n$ 개의 확률변수가 고려되는 경우 3 점 실험계획법은 적구적법(Product quadrature rule)에 의하여 3<sup>n</sup> 전조합실험계획이 된다. 시스템 성능함수  $g(\mathbf{x})$ 에 관한 3<sup>n</sup>개의 실험자료가 얻어지면 다음과 같이  $g(\mathbf{x})$ 의 통계적 모멘트를 구할 수 있다.

$$\mu_g = \sum_{i=1}^3 w_{i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^3 w_{i_n} g(l_{i_1}, \dots, l_{i_n}) \quad (3)$$

$$\sigma_g = \left[ \sum_{i=1}^3 w_{i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^3 w_{i_n} (g(l_{i_1}, \dots, l_{i_n}) - \mu_g)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

$$\sqrt{\beta_{1g}} = \left[ \sum_{i=1}^3 w_{i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^3 w_{i_n} (g(l_{i_1}, \dots, l_{i_n}) - \mu_g)^3 \right] / \sigma_g^3 \quad (5)$$

$$\beta_{2g} = \left[ \sum_{i=1}^3 w_{i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^3 w_{i_n} (g(l_{i_1}, \dots, l_{i_n}) - \mu_g)^4 \right] / \sigma_g^4 \quad (6)$$

### 2.2 확률계산 - 피어슨 시스템

시스템 성능함수의 네 개의 통계적 모멘트가 구해지면 피어슨 시스템(Pearson system), 존슨시스템(Johnson system), Gram-Charlier series 등과 같은 경험적 확률분포 시스템을 이용하여 성능함수가 따르는 확률밀도함수와 확률분포함수를 추정할 수 있다.

$$\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = -\frac{\bar{x} + a}{c_0 + c_1 \bar{x} + c_2 \bar{x}^2} \quad (7)$$

피어슨 시스템은 식 (7)과 같은 미분방정식을 만족시키는 확률밀도 함수  $f(x)$ 로 구성된다. 여기서 방정식의 계수  $a$ ,  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ 는 2.1 절에서 구한 네 개의 통계적 모멘트로부터 계산된다. 피어슨 시스템은 식 (8)의 근의 형태에 따라 7 가지 타입으로 구분되는데 이 것에 대한 자세한 논의는 생략하기로 한다.

$$c_0 + c_1 \bar{x} + c_2 \bar{x}^2 = 0 \quad (8)$$

## 3. 반응표면 적분법 (RSMM)

### 3.1 전체의 과정

반응표면 적분법(Response surface moment method)은 전조합 실험계획을 사용하는 기존 방법의 계산 효율향상을 목적으로 제안된 방법으로 그 전체적인 과정은 다음과 같다.

(a) 2.1 절에서 유도된 수준과 가중치를 이용하여 3<sup>n</sup> 전조합 실험계획을 수립한다.

(b) 3<sup>n</sup>개의 실험점 중 확률적으로 높은 가중치가 부여된 2n+1 개의 실험점에 대하여 선택적으로 실험을 수행한다. 이것은 각 확률변수들의 평균축에 존재하는 실험점에 대하여 실험을 수행하는 것과 같다. (그림 1)

(c) (b)에서 얻어진 2n+1 개의 실험점을 이용해 식 (9)와 같은 반응표면근사식을 구한다.

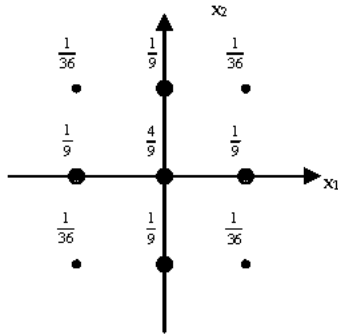


Fig. 1 Experimental points for initial analysis

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 \quad (9)$$

(d) 실제로 실험이 이루어지지 않은  $3^n - 2n - 1$  개의 실험점에서의 성능함수  $g(\mathbf{x})$  의 값을  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  를 이용하여 근사한다.

(e) (b)와 (d)에서 얻어진 총  $3^n$  개의 실험결과와 식 (3)~(6)을 이용하여  $\mu_g, \sigma_g, \sqrt{\beta_{1g}}, \beta_{2g}$  를 구한다.

(f) 피어슨 시스템을 이용하여 다음과 같은 손상 확률  $\Pr[g(\mathbf{x}) < 0]$  을 계산한다.

(g) 실제로 실험이 이루어지지 않은 실험점들에 대하여 영향도지수  $\kappa$  를 계산한다. 영향도지수의 의미와 계산방법에 대해서는 다음 절에서 논하도록 한다.

(h) 가장 큰 영향도지수를 갖는 실험점을 찾아 실험을 수행한다.

(i) 새로이 얻어진 실험결과를 이용해 다음 식 (10)과 같이 반응표면근사식을 갱신한다. 이때, 기존의 반응표면 근사식의 계수가 갱신됨은 물론, 초기 근사에는 포함되지 않았던 교차항이 추가될 수 있다. 교차항의 추가 방법에 대해서는 추후 논하도록 하겠다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \sum_{k=1}^{mix} d_k x_{i(k)} x_{j(k)} \quad (10)$$

여기서  $mix$  는 반응표면근사식에 포함된 교차항의 총 개수이며  $x_{i(k)}$  는  $k$  번째 교차항에 포함된 첫번째 변수를  $x_{j(k)}$  는 두번째 변수를 나타내며  $i < j$  이다.

(j)  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  를 이용하여 실험이 이루어지지 않은 실험점에서의  $g(\mathbf{x})$  값을 근사하고 (c)~(f)의 과정을 거쳐 손상확률을 계산한다.

(k) 손상확률의 값이 수렴할 때까지 (g)~(j)의 과정을 반복한다.

### 3.2 영향도지수 (Influence Index)

#### 3.1.1 영향도지수의 의미

영향도지수(Influence index)는 실제로 실험이 이

루지지 않은 실험점들의 상대적 중요도를 파악하기 위한 척도로서 실제로 실험이 행해졌을 때 손상확률의 값에 가장 큰 변화를 가져올 개연성이 있는 실험점을 고르기 위하여 제안되었다.  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  로 추정된  $i$  번째 실험점에 대하여 실제로 실험을 행했을 때 예상되는 손상확률의 변화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta P_f = \frac{dP_f}{d\tilde{g}(\mathbf{x}_i)} \cdot (g(\mathbf{x}_i) - \tilde{g}(\mathbf{x}_i)) \quad (11)$$

이 식에서  $\mathbf{x}_i$  는  $i$  번째 실험점에서 확률변수들의 벡터를 나타낸다.  $g(\mathbf{x}_i) - \tilde{g}(\mathbf{x}_i)$  는 성능함수의 실제 값과 반응표면근사로 추정된 값과의 차이, 즉 반응표면근사의 오차를 나타낸다.  $dP_f/d\tilde{g}(\mathbf{x}_i)$  는 손상확률의  $\tilde{g}(\mathbf{x}_i)$  에 대한 미분의 개념으로  $i$  번째 실험점이 확률계산에 있어서 갖는 중요도를 나타내고 할 수 있다. 실제로 손상확률의 변화는 위의 두 항의 곱으로 나타내어지는데 성능함수의 실제형상에 대한 정보가 없는 상황에서 실제 실험을 행하지 않고  $g(\mathbf{x}_i) - \tilde{g}(\mathbf{x}_i)$  의 값을 알 수 있는 방법은 없다. 그래서 본 논문에서는 반응표면근사의 오차가 전 영역에 비교적 고르게 분포한다는 가정 하에  $dP_f/d\tilde{g}(\mathbf{x}_i)$  의 절대값을 각 실험점의 상대적 중요도를 파악하기 위한 영향도지수로 정의하여 사용하기로 한다.

$$\kappa = \left| \frac{dP_f}{d\tilde{g}(\mathbf{x}_i)} \right| \quad (12)$$

#### 3.1.2 영향도지수의 계산방법

식 (12)와 같이 정의되는 영향도지수는 연쇄법칙을 이용한 미분과 피어슨 시스템과 유한차분법을 이용하여 간단하게 계산이 가능하다.

손상확률  $P_f$  는  $g(\mathbf{x})$  의 통계적 모멘트의 함수이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_f = P_f(\mu_g, \sigma_g, \sqrt{\beta_{1g}}, \beta_{2g}) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_f}{d\tilde{g}(x_i)} &= \frac{\partial P_f}{\partial \mu_g} \cdot \frac{d\mu_g}{d\tilde{g}(x_i)} + \frac{\partial P_f}{\partial \sigma_g} \cdot \frac{d\sigma_g}{d\tilde{g}(x_i)} \\ &+ \frac{\partial P_f}{\partial \sqrt{\beta_{1g}}} \cdot \frac{d\sqrt{\beta_{1g}}}{d\tilde{g}(x_i)} + \frac{\partial P_f}{\partial \beta_{2g}} \cdot \frac{d\beta_{2g}}{d\tilde{g}(x_i)} \\ &= \frac{\Delta P_f}{\Delta \mu_g} \cdot \frac{d\mu_g}{d\tilde{g}(x_i)} + \frac{\Delta P_f}{\Delta \sigma_g} \cdot \frac{d\sigma_g}{d\tilde{g}(x_i)} \\ &+ \frac{\Delta P_f}{\Delta \sqrt{\beta_{1g}}} \cdot \frac{d\sqrt{\beta_{1g}}}{d\tilde{g}(x_i)} + \frac{\Delta P_f}{\Delta \beta_{2g}} \cdot \frac{d\beta_{2g}}{d\tilde{g}(x_i)} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (22)에서  $\Delta P_f/\Delta \mu_g, \Delta P_f/\Delta \sigma_g, \Delta P_f/\Delta \sqrt{\beta_{1g}}, \Delta P_f/\Delta \beta_{2g}$  는 피어슨시스템과 유한차분법을 이용하여 계산이 가능하며 나머지 항들은 식 (3)~(6)을 미분하여 구할 수 있다.

### 3.3 반응표면근사의 갱신

영향도지수가 가장 큰 실험점에 대하여 실제 실험을 수행한 후, 반응표면근사를 갱신해 주어야 한다. 이 때 추가된 실험점의 좌표를 고려하여 두 변수의 교차항을 추가할 수 있다. 새로이 추가된 실험점에서 가운데 수준값을 갖지 않는 변수들로 조합이 가능한 교차항 중 이전 단계의 반응표면 근사에서 선형항과 이차항의 계수의 절대값의 합이 가장 큰 교차항을 추가한다.

### 3.4 예제

반응표면적분법을 적용할 다음 예제는 23 개의 트러스 요소로 구성된 구조물이다. (그림 2)

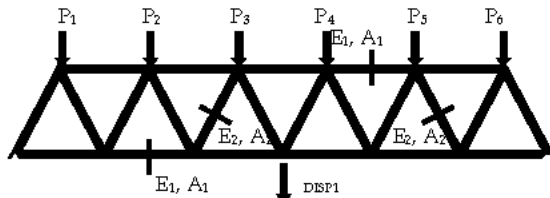


Fig. 2 Truss structure with 23 members

위 아래에 수평으로 놓여진 11 개의 요소들은 영계수  $E_1$ , 단면적  $A_1$  을 가지고 대각선방향으로 놓여진 12 개의 요소들은 영계수  $E_2$  단면적  $A_2$  를 갖는다. 아래 표 1 과 같이 총 10 개의 확률변수를 고려하여 신뢰도해석을 수행해 보았다.

Table 1 Random variables in truss structure (cm/kg/sec)

Component	Distribution type	Mean	Standard deviation	
1	$E_1$	Log-normal	2,100,000	210,000
2	$E_2$	Log-normal	2,100,000	210,000
3	$A_1$	Log-normal	20	2
4	$A_2$	Log-normal	10	1
5	$P_1$	Gumbel	5,000	750
6	$P_2$	Gumbel	5,000	750
7	$P_3$	Gumbel	5,000	750
8	$P_4$	Gumbel	5,000	750
9	$P_5$	Gumbel	5,000	750
10	$P_6$	Gumbel	5,000	750

구조물이 만족시켜야 하는 손상함수는 중앙연결부의 변위  $disp1$  이 11cm 를 넘기지 말아야 한다는 것이다. 이 문제에 대하여 신뢰도해석을 수행한 결과를 표 2 에 실었다. 손상함수의 네 개의 통계적 모멘트와 손상확률 계산 결과 전조합 실험계획에 의한 결과와 MCS 에 의한 결과가 본 논문에서 제안하고 있는 반응표면 적분법과 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 특히 반응표면 적분법은 45 번의 함수호출만으로 정확한 결과를 구해내 수 치적 효율성이 가장 뛰어나음을 알 수 있다.

Table 2 Reliability analysis results

	AFOSM (HL-RF)	$3^{\sigma}$ moment	RSM-moment	MCS (100,000 trial)
$\mu_G$	•	3.059842	3.065281	3.066241
$\sigma_G$	•	1.109158	1.097246	1.107094
$\sqrt{\beta_1}_G$	•	-0.498884	-0.570800	-
$\beta_{2G}$	•	3.428888	3.411987	3.382620
Pr failure	0.005019	0.008822	0.008796	0.008330
Function call	77	59049	45	100,000

한편, 1 차신뢰도법의 결과를 비교를 위하여 있었는데 수치적 효율성이나 계산결과의 정확성 측면에서 반응표면 적분법보다 좋지 않은 결과를 주고 있음을 알 수 있다. 반응표면 적분법을 적용하는 과정에서 21 번의 초기실험 후 24 번의 추가실험이 이루어졌으며 이 과정에서 17 개의 교차항이 반응표면근사에 추가되었다.

### 4. 결론 및 고찰

이상으로 전조합 실험계획법을 이용한 신뢰도 해석기법의 문제점인 과도한 계산량을 줄이기 위하여 제안된 반응표면 적분법에 대하여 논하였다. 실험으로 얻어진 자료를 단순히 확률계산의 표본으로만 사용하지 않고 함수형상을 예측하는 반응표면 근사에도 사용함으로써 주어진 자료로부터 최대한 많은 정보를 추출해낼 수 있도록 하였다. 복잡한 문제에는 많은 계산을, 단순한 문제에는 적은 계산으로 확률을 구할 수 있도록 반응표면법을 적용형으로 적용하는 방법을 제안하였고 이 과정에서 영향도 지수라는 개념과 계산방법, 그리고 반응표면 근사를 갱신하는 방법을 제안하였다. 몇 가지 예제에 적용한 결과 반응표면 적분법은 정확도와 특히 수치적 효율성에서 훌륭한 결과를 얻을 수 있었다.

### 참고문헌

1. Taguchi, G, "Performance Analysis Design," INT J PROD RES, Vol. 16, No. 6, pp. 521-530, 1978
2. D'Errico J. R. and Zaino N. A. Jr., "Statistical Tolerancing Using a Modification of Taguchi's Method," Technometrics, Vol. 30, No. 4, pp. 397-405, 1988
3. H. S. Seo, and B. M. Kwak, Efficient Statistical Tolerance Analysis for General Distributions using three-Point Information, INT J PROD RES, Vol. 40, No. 4, pp. 931-944, 2000