하이퍼-스타 연결망 *HS*(2*n*,*n*)의 고장 지름

*김종석[0] **이형옥 *허영남
*순천대학교 컴퓨터과학과
**순천대학교 컴퓨터교육과
{*rockhee[0], **oklee, *hyn}@sunchon.ac.kr

Fault Diameter of Interconnection Network Hyper-Star *HS*(2*n*,*n*)

Jong-Seok Kim[0] Hyeong-Ok Lee Yeong-Nam Heo
Dept. of Computer Science, Sunchon National University
Dept. of Computer Education, Sunchon National University

요 약

최근에 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 하이퍼-스타 연결망이 제안되었다. 본 논문에서는 하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$의 container를 이용하여 k-wide diameter가 $dist(u,v)+4$이하임과 $HS(2n,n)$의 고장지름이 $D(HS(2n,n))+2$ 이하임을 보인다.

1. 서 론

상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로 표현되는데, 지금까지 제안된 상호연결망은 노드 개수를 기준으로 분류하면 $k\times n$으로 표현되는 메쉬 부류, 2^n으로 표현되는 하이퍼큐브(hypercube) 부류, $n!$로 표현되는 스타(star) 그래프 부류로 나눌 수 있다. 상호 연결망을 평가하는 척도로는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 대칭성(symmetric), 지름(diameter), 고장지름(fault diameter), 망비용(network cost), 방송(broadcasting), 임베딩(embedding) 등이 있다[3,4].

최근에 새로운 상호연결망으로 하이퍼-스타[2]가 제안되었다. 제안된 하이퍼-스타는 차원이 증가함에 따라 노드 개수가 조합(combination) 형태로 증가하는 새로운 형태의 상호연결망이다. 하이퍼-스타는 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용이 우수하고, 차원이 증가할 때 노드개수가 급격하게 증가하는 스타 그래프의 단점을 개선한 그래프이다.

상호 연결망에서 임의의 두 노드 사이에 노드 중복 없는 경로가 여러 개 존재하면, 두 노드 사이에 많은 양의 데이터를 동시에 전송하여 속도를 증가시킬 수 있을 뿐만 아니라, 상호 연결망이 분리 되지 않을 만큼의 노드가 고장이 발생했을 때 대체 경로를 구성할 수 있어서 안정적이다.

다음 장에서는 하이퍼-스타에 대하여 알아보고, 3장에서는 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 k-wide diameter와 고장지름을 분석하며, 마지막으로 결론을 맺도록 하겠다.

2. 관련연구

하이퍼-스타 $HS(2n,n)$는 $\binom{2n}{n}$개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드는 $2n$개의 비트스트링 $b_1b_2...b_i...b_{2n}$으로 표현되며, $|b_i=\text{"1"}|=n$ 이다. b_1과 b_i가 보수일 때 b_1과 b_i를 교환하는 치환을 σ_i라 하면, $v=\sigma_i(u)$인 두 노드 $u=b_1b_2...b_i...b_{2n}$와 $v=b_ib_2...b_1...b_{2n}$사이에 에지가 발생하며, u와 v를 연결하는 에지를 i-에지라고 한다. 하이퍼-스타는 매우 간단한 라우팅 알고리즘과 유용한 확장성을 가지고 있고, 이분할 연결망이며, 최대 고장 허용도를 가진다[2].

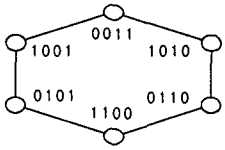

그림 1. $HS(4,2)$

3. 고장지름

$HS(2n,n)$의 임의의 노드 u에서 치환 $\sigma_{k1},\sigma_{k2},...,\sigma_{kt}$을 순차적으로 적용하여 정해지는 경로를 $[k_1,k_2,...,k_t]$로 표시하겠다. 예를 들면 노드 0011에서 노드 1100으로 가는 경로는 [3,2,4] 혹은 [4,2,3]이다. $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 $u=a_1a_2...a_i...a_{2n}$와 $v=b_1b_2...b_i...b_{2n}$라고 하고, 두 노드 u와 v 사이에 Exclusive-OR 함수를 적용시킨 결과를 $R=r_1r_2...r_n$이라고 하고 $r_i=1$인 비트들의 집합을 R^1이라고 표시하겠다. 두 노드 u와 v 사이의 거리를 $dist(u,v)$라고 표시하면, 두 노드 사이의 거리 $dist(u,v)$는 다음과 같다.

$$\cdot\ dist(u,v)=\sum_{i=2}^{2n} r_i, \quad (r_i=u_i\oplus v_i)$$

성질 1. 노드 u로부터 노드 v를 연결하는 경로 P 에 포함된 임의의 노드를 w라고 하고, w와 i-에지로 연결된 노드를 w'라고 하자. 만약 $i\in R^1$ 이고 에지 (w,w')가 경로 P에 포함된 에지이면 에지 (w,w')는 노드 u로부터 노드 v를 연결하는 최단경로를 구성한다.

성질 2. $HS(2n,n)$의 노드 $u=0^n1^n$이라고 하면, u를 출발 노드로 하는 두 개의 경로 $P=[k_1,k_2,...,k_t]$와 $Q=[h_1,h_2,...,h_t]$가 있다고 하자. 경로 P와 경로 Q의 짝수 위치의 지수들이 순서에 상관없이 서로 같고, 홀수 위치의 지수들이 순서에 상관없이 서로 같으면 경로 P와 경로 Q에 의해 도착하는 노드는 동일하다.

정의 1. $HS(2n,n)$ 그래프의 임의의 두 노드를 $u=0^n1^n$와 v라고 하자. 만약 $dist(u,v)$가 m이면, 노드 u로부터 노드 v를 연결하는 경로 상에 존재하는 임의의 노드 v는 레벨 L_m에 위치한다.

정의 2. 각 레벨 L에 위치한 노드를 최대 2개만 사용하여 구성한 사이클을 r-사이클이라 한다.

그래프 G의 임의의 두 노드를 u와 v라고 하면, (u,v)-container는 u와 v 사이의 노드 중복 없는 경로들의 집합을 의미한다. container의 크기는 노드 중복 없는 경로의 개수를 의미하고, container의 거리는 노드 중복 없는 경로 중 거리가 가장 큰 경로의 길이를 의미한다.

정의 3. 그래프 G의 분지수를 k라 하자. 그러면, 두 노드 사이의 k-distance는 크기가 k인 container의 최단거리를 나타낸다. 그래프 G의 k-wide diameter, $D_k(G)$는 G의 임의의 두 노드들의 k-distance 중에 최대 k-distance를 나타낸다. 그래프 G의 고장허용도를 k-1이라 하고, 최대 k-1개의 고장노드를 갖는 그래프 G의 서브그래프를 G_f라고 하면, 그래프 G의 고장 지름 $D^f_{k-1}(G)$ 은 G_f 의 최대 지름이다.

k-wide diameter의 개념은 고장 지름의 개념과 밀접하게 관련되어 있다. 그래프 G의 지름을 $D(G)$라고 하면, $D(G) \le D^f_{k-1}(G) \le D_k(G)$ 임은 [1]에서 증명되었다. 만약 고장 지름이 지름값 + 상수이면 G의 통신 지연 시간은 순차적으로 증가한다. 정규형 그래프 $HS(2n,n)$의 분지수는 n이며, 지름은 $2n$-1이고, $_k(HS(2n,n))=n$ 임은 [2]에서 증명되었다.

$S_1=(a_1,a_2,...,a_p)$, $S_2=(b_1,b_2,...,b_q)$라고 하면, S_1과 S_2는 순환적 교환 순서($\odot$)의 원소로 구성된 집합이다. 순환적 교환 순서를 이용하여 container를 구성한다. $S_1 \odot S_2$는 S_1과 S_2의 원소들을 번갈아 합병하여 나타내는 순서들의 집합이다. 만약 S_2의 원소가 S_1의 원소보다 하나 적은 상태에서 S_1과 S_2의 원소들을 번갈아 합병하여 나타나는 순서들의 집합은 $S_1 \odot S_2^-$로 표시하겠다. 예를 들면, S_1=(5,6,7), S_2=(2,3,4)라고 하면 $S_1 \odot S_2$={(5,2,6,3,7,4),(6,3,7,4,5,2),(7,4,5,2,6,3)}이다. 또 S_1=(5,6,7), S_2=(2,3)라고 하면 $S_1 \odot S_2^-$={(5,2,6,3,7),(6,2,7,3,5),(7,2,5,3,6)}이다. 집합에 포함된 순서를 나타내는 하나의 원소 i는 치환 σ_i와 같다. 그러므로 예를 들었던 $S_1 \odot S_2$ 집합은 경로가 [5,2,6,3,7,4], [6,3,7,4,5,2], [7,4,5,2,6,3]인 세 개의 경로로 나타낼 수 있다. 마찬가지로 $S_1 \odot S_2^-$ 집합도 [5,2,6,3,7], [6,2,7,3,5], [7,2,5,3,6]인 세 개의 경로로 나타낼 수 있다. $S_1 \odot S_2$ 집합에 포함된 각 경로들은 모두 노드 중복 없는 경로이다. 왜냐하면 경로상에 존재하는 노드를 공유하기 위해서 필요한 원소들의 수는 $p+q$이기 때문이다. 마찬가지로 $S_1 \odot S_2^-$에 포함된 각 경로들도 모두 노드 중복 없는 경로이다. 그리고 $|S_1 \odot S_2|=\max\{p,q\}$이고, $|S_1 \odot S_2^-|=p$이다.

정리 1. $HS(2n,n)$의 노드 $u=0^n1^n$로부터 임의의 노드 v에 이르는 경로를 P라 하고, $dist(u,v)=\phi$ 라 하면, 경로 P를 포함하는 길이 2ϕ인 r-사이클이 $\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil$-1개 존재한다.

증명. $HS(2n,n)$의 지름은 $2n$-1이므로 $dist(u,v)$는 최대 $2n$-1이다. 경로 $P=[n+1,2,n+2,3,...,n+\frac{\phi}{2},\frac{\phi}{2}+1]$ 이라고 하면, $dist(u,v)$는 짝수이다. $S_1=(n+1,n+2,...,n+\frac{\phi}{2})$이고, $S_2=(2,3,...,\frac{\phi}{2}+1)$일 때, $S_1 \odot S_2$에 의해 구성되는 경로들의 집합을 고려해 보면, 각 경로들은 모두 노드 중복 없는 경로이고, 경로의 개수는 $\frac{\phi}{2}$이다. $S_1 \odot S_2$에 의해 구성된 임의의 한 경로를 $Q(\neq P)$라 하면, 성질 2에 의해 경로 P와 Q 둘 다 출발노드는 u이고, 목적노드는 v이다. 노드 u는 레벨 L_0에 위치해 있다. 경로 P상에 존재하는 임의의 두 인접 노드를 (p_i,p_j)라고 하면, $dist(u,p_j)=dist(u,p_i)+1$이다. 바꿔 말하면, 경로 P상에 존재하는 모든 노드들은 서로 다른 레벨 L에 위치해 있다. 경로 Q상에 존재하는 노드들도 마찬가지이다. 경로 P와 Q 둘 다 노드 중복 없는 경로이므로, 두 경로를 연결하면 하나의 r-사이클을 구성한다. 그러므로 경로 P를 포함하는 길이 2ϕ인 r-사이클이 $\frac{\phi}{2}$-1개 존재한다는 것을 알 수 있다.

경로 $P=[n+1,2,n+2,3,...,\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil,n+\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil]$ 이라고 하면, $dist(u,v)$는 홀수이다. $S_1=(n+1,n+2,...,n+\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil)$이고, $S_2^-=(2,3,...,\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil)$일 때, $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성되는 경로들의 집합을 고려해 보면, 각 경로들은 모두 노드 중복 없는 경로이고, 경로의 개수는 $\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil$이다. $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성된 임의의 한 경로를 $Q(\neq P)$라 하면, 성질 4.2에 의해 경로 P와 Q 둘 다 출발노드는 u이고, 목적노드는 v이다. 경로 P 혹은 Q상에 존재하는 임의의 두 인접 노드를 (p_i,p_j)라고 하면, $dist(u,p_j)=dist(u,p_i)+1$이다. 경로 P와 Q 둘 다 노드 중복 없는 경로이므로, 두 경로를 연결하면 하나의 r-사이클을 구성한다. 그러므로 경로 P를 포함하는 길이 2ϕ인 r-사이클이 $\left\lceil \frac{\phi}{2} \right\rceil$-1개 존재한다는 것을 알 수 있다.

정리 2. $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 u와 v라고 하면, $D_n(HS(2n,n)) \le dist(u,v)+4$이다.

증명. $HS(2n,n)$가 노드 대칭[]이므로 노드 u를 0^n1^n라고 하면, u는 레벨 L_0에 위치해 있다. $dist(u,v)=\phi$라고 하자.

첫 번째 : ϕ가 짝수인 경우.

노드 u로부터 임의의 노드 v에 이르는 경로를 $P=[n+1,2,n+2,3,...,n+\frac{\phi}{2},\frac{\phi}{2}+1]$ 라고 하면, $S_1=(n+1,n+2,...,n+\frac{\phi}{2})$이고, $S_2=(2,3,...,\frac{\phi}{2}+1)$이다. 정리 1에 의해 ϕ 가 짝수이고, 노드 u로부터 노드 v까지의 거리인 길이 $dist(u,v)$를 갖는 노드 중복 없는 경로의 개수는 $\frac{\phi}{2}$임을 알 수 있다. 이러한 경로는 $S_1 \odot S_2$에 의해 구성되는 경로이다. 또 $n+\frac{\phi}{2}+1$과 $2n$ 사이에 위치한 $n-\frac{\phi}{2}$개의 원소들은 $S_1 \odot S_2$에 의해 구성된 경로 상에는 포함되지 않는다. 노드 u로부터 임의의 노드 v에 이르는 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 $n-\frac{\phi}{2}$개의

경로를 구성하겠다($n+\frac{\phi}{2} \le j \le 2n$). P'는 경로 P에 포함된 임의의 두 인접한 원소 (p_i,p_j)의 순서를 바꿔 놓은 것이다. 즉 $P'=[2,n+1,3,n+2,...,\frac{\phi}{2}+1,n+\frac{\phi}{2}]$이다. $S_1 \odot S_2$에 의해 구성되는 경로와 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 경로들은 j가 경로 P에 포함되지 않은 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 노드 v를 σ_j 에 의해 치환한 노드를 v'라고 하고, 경로 Q를 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 경로라고 하자. 그러면 v'는 레벨 $L_{\phi+1}$에 위치하고, Q의 서브 경로 $Q'=[j,P']$는 노드 u로부터 노드 v' 에 이르는 경로가 된다. 그러므로 P를 포함하는 노드 u로부터 노드 v' 에 이르는 경로와 경로 Q' 를 연결하면 길이 $2\phi+2$인 r-사이클이 구성된다. 경로 P의 길이는 ϕ이므로, 경로 Q의 길이는 $\phi+2$이다. 노드 중복 없는 경로 Q의 개수는 $n-\frac{\phi}{2}$개이므로, 경로 P를 포함하는 길이 $2\phi+2$인 r-사이클도 $n-\frac{\phi}{2}$개 존재한다. 그러므로 만약 ϕ이 짝수이면, 길이가 $dist(u,v)$인 경로 $\frac{\phi}{2}$개와 길이가 $dist(u,v)+2$인 경로 $n-\frac{\phi}{2}$개로 구성된 n개의 노드 중복 없는 경로가 존재함을 알 수 있다.

두 번째 : ϕ가 홀수인 경우.

노드 u로부터 임의의 노드 v에 이르는 경로를 $P=[n+1,2,n+2,3,...,\lceil\frac{\phi}{2}\rceil,n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil]$ 라고 하면, $S_1=(n+1,n+2,...,n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil)$이고, $S_2^-=(2,3,...,\lceil\frac{\phi}{2}\rceil)$이다. 정리 1에 의해 ϕ 가 홀수이고, 노드 u로부터 노드 v까지의 거리인 길이 $dist(u,v)$를 갖는 노드 중복 없는 경로의 개수는 $\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$임을 알 수 있다. 이러한 경로는 $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성되는 경로이다. 또 $n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil+1$과 $2n$ 사이에 위치한 원소 j와 $\lceil\frac{\phi}{2}\rceil+1$와 n사이에 위치한 원소 k로 구성된 순환적 교환 순서쌍을 (j,k)라 하면, (j,k)는 $n-\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$개 존재하며, $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성된 경로상에는 포함되지 않는다. 노드 u로부터 임의의 노드 v에 이르는 $[j,k,P,j,k]$ 형태를 갖는 $n-\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$개의 경로를 구성하겠다. 이 때 $j=k+n(n+\lceil\frac{\phi}{2}\rceil \le j \le 2n, \lceil\frac{\phi}{2}\rceil+1 \le k \le n)$이다. $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구성되는 경로와 $[j,k,P,j,k]$ 형태를 갖는 경로들은 (j,k)가 경로 P에 포함되지 않은 순서쌍이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 노드 v를 σ_k, σ_j에 의해 치환한 노드를 v' 라고 하고, 경로 Q를 $[j,k,P,j,k]$ 형태를 갖는 경로라고 하자. 그러면 v' 는 레벨 $L_{\phi+2}$에 위치하고, Q의 서브 경로 $Q'=[j,k,P]$는 노드 u로부터 노드 v' 에 이르는 경로가 된다. 그러므로 P를 포함하는 노드 u로부터 노드 v' 에 이르는 경로와 경로 Q' 를 연결하면 길이 $2\phi+4$인 r-사이클이 구성된다. 즉 경로 P와 경로 Q를 연결하는 r-사이클과 같은 형태를 갖는다. 경로 P의 길이는 ϕ이므로, 경로 Q의 길이는 $\phi+4$이다. 노드 중복이 없는 경로 Q의 개수는 $n-\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$개이므로, 경로 P를 포함하는 길이 $2\phi+4$인 r-사이클도 $n-\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$개 존재한다. 그러므로 만약 ϕ이 홀수이면, 길이가 $dist(u,v)$인 경로 $\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$개와 길이가 $dist(u,v)+4$인 경로 $n-\lceil\frac{\phi}{2}\rceil$개로 구성된 n개의 노드 중복 없는 경로가 존재함을 알 수 있다.

정리 3. $D^f_{n-1}(HS(2n,n)) = D(HS(2n,n)) + 2 = 2n+1$.

증명. 1. $dist(u,v)=2n-1$

$D_n(HS(2n,n)) = dist(u,v)$이므로 $D^f_{n-1}(HS(2n,n))=2n-1=D(HS(2n,n))$이다.

2. $dist(u,v)=2n-2$

$D_n(HS(2n,n)) = dist(u,v)+2$이므로 $D^f_{n-1}(HS(2n,n))=2n=D(HS(2n,n))+1$이다.

3. $dist(u,v) \le 2n-3$

$D_n(HS(2n,n)) = dist(u,v)+4$이므로 $D^f_{n-1}(HS(2n,n))=2n+1=D(HS(2n,n))+2$이다.

5. 결론

본 논문에서는 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 container를 이용하여 k-wide diameter가 $dist(u,v)+4$이하임과 $HS(2n,n)$의 고장지름이 $D(HS(2n,n))+2$ 이하임을 보였다.

상호연결망의 고장지름이 지름 값과 비슷하다는 것은 그 연결망에서 분지수 이하의 노드가 고장이 발생해도 임의의 두 노드간에 메시지를 전송하는데 전송시간 지연이 거의 발생하지 않음을 의미한다. 이러한 결과는 상호 연결망 $HS(2n,n)$의 고장 감내가 우수함을 의미한다.

참고문헌

[1] C.-P. Chang, T.-y. Sung, and L.-H. Hsu, "Edge Congestion and Topological Properties of Crossed Cubes," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol. 11, No. 1, pp. 64-80, 2000.

[2] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510, pp. 858-865, 2002.

[3] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.

[4] V. E. Mendia nad D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp. 389-396, 1992.

[5] 김종석, 이성재, 이형옥, 허영남, "상호연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 노드대칭성," 한국정보과학회 추계학술발표논문집, 30권 2호, pp.373-375, 2004.