

## 판재의 이론적 변형한계 스트레인의 면외압 의존성

정태훈(중부대학교 메카트로닉스공학과)

# Effect of Out-of-Plane Stress on the theoretical Forming Limit Strain of Sheet Metals

Taehoon Chung

### ABSTRACT

In press forming of sheet metals, the material sheet is usually subjected to very large plastic strain under in-plane stressing. Moreover, the sheet also very often is subjected to out-of-plane compressive force between tools such as the upper and lower dies, the blank holder and the die, and so forth. In this paper, it is clearly demonstrated theoretically that out-of-plane stress may notably raise the forming limit strain and thus it can be effectively utilized to avoid earlier fracture of the sheet in press forming.

**Key Words** : Plasticity(소성), Elastic-plastic FEM(탄소성유한요소법), Forming Limit Strain(성형한계), J2G(J<sub>2</sub>-Gotoh's Corner Theory), Shear-band(전단띠)

### 1. 서론

판재의 프레스성형에 있어서 불량현상인 파단문제는 과거부터 이론, 실험의 양면으로 연구되고 있다. 특히 이론적 연구에 주목하면 M-K모델이나 Hill 또는 Stören-Rice에 의해 국부분기이론이 어느 정도 잘 맞아 사용되고 있다<sup>(1)</sup>. 판재는 기하학적 특징, 즉 판면에 수직방향의 치수와 판두께가 판면내 치수에 비해 압도적으로 작기 때문에 국부넉킹의 발생을 파단이라고 생각하는 것이 일반적이다. 또한 수치적으로는 평면응력으로 취급하는 것이 상식화되어 있다. 따라서 Hill의 국부넉킹조건을 파단조건으로 하는 경우가 많았다. 여기서 국부넉킹은 시각적으로는 판면에서 십자상의 선으로 보이는 판두께방향의 넉킹이며 종전부터 일종의 소성불안정현상으로 알려져 왔다. 이것은 평면응력하의 국부분기로서도 취급하여 이론적 연구도 많이 행하여져 왔다.

Hill은 Levy-Mises구성식을 사용하여 한 면내의 스트레인이  $\alpha > 0$ 인 상황에서는 국부넉킹은 발생하지 않는 것에 대하여 나타냈다. 실제의 재료에서는 처음부터 어느 정도의 불안정이 있어, Marciniak & Kuczynski<sup>(2)</sup>는 초기불안정을 고려하여 Levy-Mises구성식에서도  $\alpha > 0$ 의 상황에서 국부넉킹을 갖는 판의 파단을 나타냈다. 그 후 Stören & Rice<sup>(3)</sup>가 Levy-Mises구성식이 아닌 Hencky의 전스트레인 이론의 속도형을 이용하여 국부분기 즉 국부넉킹조건이  $\alpha > 0$ 에 대하여도 생기는 것을 나타내어 처음으로  $\alpha$ 의 전영역에 대한 파단한계 조건을 나타냈다.

국부분기조건은 소성구성식에 대한 의존성이 크기 때문에 변형이력이 복잡하게 되면 이 파단예측 성능은 구성식의 정도에 따라 나쁘게 된다.

宅田<sup>(4)</sup>은 판재에 압축성을 고려한 소성구성식에 의해 변형해석하여 재료내부의 밀도변화를

추출하여, 이것에 한계치를 설정하는 것으로서 파단 예측을 하였고, 또한 3차원 고찰을 한 것으로서 stören & Rice의 이론을 확장한 伊藤<sup>(5)</sup>의 연구에서는 국부분기가 전단미 이론이 되기 때문에 판재의 파단한계는 평면응력 가정하에서 국부넉킹조건에 의한 경우보다 높게 됨을 나타내었다.

또한 Gotoh<sup>(6)-(8)</sup>는 소성구성식(J2G)을 제안하여 국부분기조건 즉 파단조건을 정하여 실험적 검증에 의해 적어도 실용레벨에서의 유용성을 나타내었다.

이 J2G(J2-Gotoh's corner theory)를 변형의 수치시뮬레이션에 적용하여 이 때의 변형양태의 관찰과 하중의 급락 등과 시뮬레이션의 결과로서 생기는 국부넉킹을 성형한계라고 판정하였다. 그러나 판재의 파단한계의 이론적 연구는 지금까지 거의 평면응력 가정하에 행하여져 왔기 때문에 판두께 방향에 관한 고려를 할 수 없었다.

따라서 판두께 방향에도 요소분할하여 확장평면 스트레인 방법을 적용하여 판재의 성형한계변형의 판두께 의존성을 검토하였다<sup>(9)</sup>. 성형한계의 판정은 국부넉킹 발생 후 두께방향으로 발생하는 전단미 형성의 시점으로 하고 이러한 소성변형 국소화를 표현하기에 적합한 소성구성식 J2G의 채용에 의해서 수치적 평가가 충분히 가능한 것을 확인하였다<sup>(10)</sup>.

본 논문에서는 구멍확장 성형에 있어서 공구로부터 면외압을 받는 부위에 대하여 종래의 이론치에 비해 파단한계스트레인이 상당히 크게 되는 것이 발견되었다. 따라서 본 논문에서는 판재에 면외압 의존성이 국부넉킹에 미치는 영향을 이론해석에 의해 검토하였다.

## 2.기본이론

고전적인 Swift 또는 Hill의 불안정발생, 진전조건은 다음식으로 주어진다<sup>(11)</sup>. 단 강소성의 Misses재로 가정한다.

$$\Delta \bar{\sigma} \leq \delta \bar{\sigma} \quad (1)$$

여기서  $\Delta \bar{\sigma} = (d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon}) \cdot \delta \bar{\epsilon}$ ,  $\delta \bar{\epsilon}$ 는 가상각란(virtual infinitesimal disturbance)의 상당스트레인이다. 물론  $(d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon})$ 은 재료의 순간경화율(소성곡선의 접선구배)이다.

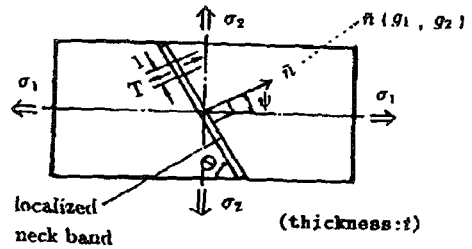


Fig.1 Small element of sheet(localized neck)

## 3.Swift Hill의국부넉킹발생조건

Fig.1과 같이 일정한 응력, 스트레인상태가 되는 미소 판요소에 면내의1, 2축방향의 주응력 $\sigma_1, \sigma_2$ 가 작용하고 있고 더욱이 면외3축방향에서 압력 p가 작용하고 있다.( $p \geq 0$ ) 간단하게 하기위해 편의상  $p=0$ 로한다. 또한 가상국부넉킹미는 그림에 있어서 면내법선 단위벡터 $\bar{n}$ 가 각도 $\psi$ 에 의해서 1축에 대하여 경사지고 또한 그것의 1축과 2축의 성분으로서  $g_1$ 과  $g_2$ 를 가지고 있다. 가상국부넉킹미에 따른 단위길이에 장력 T가 작용하고 있다.( $T = t\sigma_n$ ) 여기서 t는 판두께,  $\sigma_n$ 은  $\bar{n}$ 방향에 대한 면내 응력성분이다. 이상태에서 미소한 판두께의 각란  $\delta t$ 를 주어진다. 여기에 따른 각량의 변화분을  $\delta$ 를 붙여서 나타낸다.

따라서

$$\frac{\delta \sigma_1}{\sigma_1} = \frac{\delta \sigma_2}{\sigma_2} = -\frac{\delta t}{t} = \delta \epsilon_3 = \delta \epsilon_1 + \delta \epsilon_2 \quad (2)$$

가 얻어진다. 이것에 의해

$$\left. \begin{aligned} \delta \bar{\sigma} &= -(\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}) \delta \epsilon_3 \\ \beta &= (3/2) \sigma_1 \sigma_3 / \bar{\sigma}^2, \quad \sigma_3 = -p \end{aligned} \right\} (3)$$

여기서 대시는 편차를 나타낸다.

$$\bar{\sigma} = [(1/2)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{\sigma} &= (\bar{\sigma}/Z) \delta \bar{\epsilon} \\ 1/Z &= (d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon})/\bar{\sigma} \end{aligned} \right\} (5)$$

식(1), (3), (5)로부터 불안정조건으로서 다음식을 얻는다.

$$\frac{1}{Z} \leq \frac{(1+\alpha)(1-\beta)}{(2/\sqrt{3})(1+\alpha+\alpha^2)^{1/2}} \quad (6)$$

여기서  $\alpha = d\epsilon_1/d\epsilon_2 = \epsilon_1/\epsilon_2$ 는 스트레인비이고

$$\bar{\epsilon} = (2/\sqrt{3})(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)^{1/2} \quad (7)$$

이고, n-승 경화재에 대하여는  $1/Z = n\sqrt{\epsilon}$  이기 때문에

$$\epsilon_1 \geq \frac{n}{1+a} \cdot \frac{1}{1-\beta} ; (1-\beta) > 0 \quad (8)$$

$$\therefore (\epsilon_1)_{cr} + (\epsilon_2)_{cr} = -(\epsilon_3)_{cr} = n/(1-\beta) \quad (9)$$

따라서

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{m'(1+m+2m')}{\{(1-m+m^2)+m'(1+m+m')\}} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} m &= \sigma_2 / \sigma_1 = \{\alpha(2+m') + 1 - m'\} / (2+\alpha) \\ -1 \leq \alpha \leq 0, \quad |m| \leq 1 \\ m' &= p / \sigma_1 = -\sigma_3 / \sigma_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

식(10)의 분모는 항상 +이며  $|m| \leq 1$  이고,  $m'(1+m+2m') \geq 0$  일때  $p \geq 0$ 에 대하여  $0 \leq \beta < 1$ 이다. 즉 식(9)에 의해  $p > 0$ 에 있어서  $p=0$ 일때에 비하여 한계스트레인은 크게되는 국부넉킹발생 즉 파단이 된다.

(i)  $\alpha=0$  (평면변형률)일때 :

$$m = (1-m')/2$$

$$\beta = m'/(1+m') ; m' = \beta/(1-\beta)$$

$$(\epsilon_1)_{cr} = n/(1-\beta) = n(1+m') \geq n \quad (12)$$

즉, 평면변형률에서는 통상 한계변형율은 n값에 같아지거나 이론값으로 있지만 p의 존재로서 n보다 크게되는 것을 알수 있다.

(ii)  $-1 \leq \alpha \leq 0$  일때 :

$$(\epsilon_1)_{cr} = \{n/(1+\alpha)\} / (1-\beta) \quad (13)$$

n 승 경화법칙  $\dot{\epsilon} = c\dot{\epsilon}^n$ 에 있어서

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{\epsilon}}{c} &= A^{(1+n)} \cdot n \cdot \frac{\beta}{(1-\beta)^n} \\ A &= (2/\sqrt{3}) A^* / (1+\alpha); A^* = \sqrt{1+\alpha+a^2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

따라서 (p/C), n, a를 주어진다면  $\beta$ 가 구해진다.

$$P \rightarrow \infty \text{ 에서 } \beta \rightarrow 1, (\epsilon_1)_{cr} \rightarrow \infty$$

$\alpha \rightarrow -1$  에서  $\beta \rightarrow 0$  에 의해 a가 -1에 가까울수록 p의 효과는 적게 된다.

<수치예> n=0.5 일 경우

$$\beta^2 + Y\beta - Y = 0$$

$$\beta = \frac{1}{2} (-Y + \sqrt{Y^2 + 4Y}) = \frac{Y}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{Y}} - 1 \right)$$

$$Y = 2 \left( \frac{P}{C} \right)^2 / A^{\beta}$$

(i) p/c = 0.1 일 때 ; Y = 0.02/A<sup>0.5</sup>

$$\alpha = 0 \text{ 에 대하여 } Y \approx 0.013, \beta = 0.108$$

$$\text{따라서 } (\epsilon_1)_{cr} = n \cdot \frac{1}{1-\beta} \approx n \times 1.12$$

$$\alpha = -0.5 \text{ 에 대하여 } Y \approx 0.0025, \beta = 0.0487$$

$$\text{따라서 } (\epsilon_1)_{cr} = 2n \cdot \frac{1}{1-\beta} \approx 2n \times 1.05$$

(ii) p/c = 0.1 일 때 ; Y = 2/A<sup>0.5</sup>

$$\alpha = 0 \text{ 에 대하여 } A' = \frac{2}{\sqrt{3}} ; Y \approx 1.300,$$

$$\beta = 0.663$$

$$\text{따라서 } (\epsilon_1)_{cr} \approx n \times 3.0$$

$$\alpha = -0.5 \text{ 에 대하여 } A' = 2 ; Y \approx 0.25,$$

$$\beta = 0.390$$

$$\text{따라서 } (\epsilon_1)_{cr} = (2n) \times 1.64$$

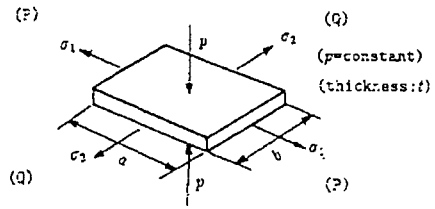


Fig.2 Small element of sheet(diffuse neck)

#### 4. Swift Hill의 확산넉킹발생조건

이 타입의 넉킹은 인장하중에 있어서 최대점근방에 있어서 발생한다. 즉 박판의 인장시험에 있어서 축방향에 생기는 넉킹현상이다. 따라서 이것이 직접파에 있어서 직접 파괴를 일으키지는 않는다. 그러나 이것도 역시 일종의 소성불안정성이다. Fig.2와 같이 박판요소가 면내의 2축응력과 일정한 면외압을 받고 있는 상태를 생각하면 외력 P, Q의 작용하에서 미소각란  $\delta\epsilon_1, \delta\epsilon_2$ 을 주어진다 가정한다. 조건식 (1) 등을 사용하여 n승 경화한 Mises 재에 대하여 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta\sigma_1 &= \sigma_1 \delta\epsilon_1 \\ \delta\sigma_2 &= \sigma_2 \delta\epsilon_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \delta\sigma_3 &= \sigma_3 \delta\epsilon_3 \\ \bar{\sigma}^2 &= \sigma_1^2 [1 - m + m^2 + m'(1 + m + m')] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= 1/2 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ 2\bar{\sigma} \delta\bar{\sigma} &= 3(\sigma_1' \delta\sigma_1 + \sigma_2' \delta\sigma_2 + q \cdot \sigma_3' \delta\sigma_3) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &= 3\delta\epsilon_1 [\sigma_1' \sigma_1 + \sigma_2' \sigma_2 \cdot \alpha - q \cdot \sigma_3' \sigma_3 (1 + \alpha)] \\ \alpha &= \epsilon_2 / \epsilon_1 = \delta\epsilon_2 / \delta\epsilon_1 = \text{일정 (비례부하; 스트레인)} \\ &= \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} = \frac{2m - 1 + m'}{2 - m + m'} \end{aligned} \quad (18)$$

$$m' = -\sigma_3 / \sigma_1 = p / \sigma_1$$

여기서 q=1에 대하여 H는 일정, q=0에 대하여 p는 일정이고

$$\delta\epsilon_1 / \sigma_1' = \delta\epsilon_2 / \sigma_2' = \delta\epsilon_3 / \sigma_3' = \delta\lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \quad (\text{Reuss의 식})$$

$$\sigma_3' / \sigma_1' = -(1 + \alpha) \quad (19)$$

$$\delta\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_1'} \delta\epsilon_1 \quad (20)$$

$$\begin{aligned}\bar{\delta\sigma} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} [\sigma'_1\sigma_1 + \sigma'_2\sigma_2 + \frac{\sigma'_2}{\sigma'_1} - q \cdot \sigma'_3\sigma_3 (1 + \frac{\sigma'_2}{\sigma'_1})] \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{\delta\bar{\epsilon}_1}{\sigma'_1} (\sigma_1^2\sigma_1 + \sigma_2^2\sigma_2 + \sigma_3^2\sigma_3) \quad (21)\end{aligned}$$

$\sigma'_3 = -(\sigma'_1 + \sigma'_2)$   
 이기 때문에  $\bar{\delta\sigma} > 0$  으로 한정한다. 따라서

$$\Delta\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}\bar{\delta\bar{\epsilon}} \quad ; \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \quad (22)$$

$\Delta\bar{\sigma} \leq \bar{\delta\sigma}$  :Swift의 불안정조건 (23)

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} < \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{\delta\bar{\epsilon}_1}{\sigma'_1} (\sigma_1^2\sigma_1 + \sigma_2^2\sigma_2 + \sigma_3^2\sigma_3) \quad (24)$$

n 승경화법칙  $\bar{\sigma} = c\bar{\epsilon}^n$ 에 있어서

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{\bar{\epsilon}} \quad (25)$$

$$\frac{\delta\bar{\epsilon}_1}{\delta\bar{\epsilon}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma'_1}{\bar{\sigma}}$$

이것과 식(25)에 의해 임계상태에서

$$\frac{n}{\bar{\epsilon}_{cr}} = (\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{1}{\sigma_3} (\sigma_1^2\sigma_1 + \sigma_2^2\sigma_2 + \sigma_3^2\sigma_3) \quad (26)$$

따라서

$$(\bar{\epsilon})_{cr} = (\epsilon_1)_{d,cr} \times \frac{2}{\sqrt{3}} A^* \quad ; \quad A^* = \sqrt{1 + \alpha + \alpha^2} \quad (27)$$

$$(\epsilon_1)_{d,cr} = n \times \frac{1}{\sqrt{3}} A^* \cdot (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_1^2\sigma_1 + \sigma_2^2\sigma_2 + \sigma_3^2\sigma_3} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= \frac{3}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \\ &= \frac{3}{2} (\sigma_1^2) [1 + \alpha^2 + (1 + \alpha)^2] = 3(\sigma_1^2) A^{*2} \quad (29)\end{aligned}$$

$$(\epsilon_1)_{d,cr} = n \times 2A^{*n} \times \frac{\sigma'_1}{\sigma_1 + \alpha^2\sigma_2 + q \cdot (1 + \alpha)^2\sigma_3} \quad (30)$$

여기서  $m = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2 + \alpha} [(2\alpha + 1) + m'(\alpha - 1)]$ ,

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma_1 + \alpha^2\sigma_2 + q \cdot (1 + \alpha)^2\sigma_3} = \frac{2 - m + m'}{3[1 + \alpha^2m - q \cdot (1 + \alpha)^2m]}$$

$$= \frac{2 + m' - \frac{1}{2 + \alpha} [(2\alpha + 1) + m'(\alpha - 1)]}{3[1 + \alpha^2 \cdot \frac{1}{2 + \alpha} [(2\alpha + 1) + m'(\alpha - 1)] - q \cdot (1 + \alpha)^2m]}$$

$$= \frac{1 + m'}{(1 + \alpha)(2 - \alpha + 2\alpha^2) + m'[\alpha^2(\alpha - 1) - q \cdot (1 + \alpha)^2]}$$

그러므로

$$(\epsilon_1)_{d,cr} = \frac{2(1 + \alpha + \alpha^2)(1 + m')}{(1 + \alpha)(2 - \alpha + 2\alpha^2) + m'[\alpha^2(\alpha - 1) - q \cdot (1 + \alpha)^2]} \quad (31)$$

$(\epsilon_2)_{d,cr} = \alpha \cdot (\epsilon_1)_{d,cr}$

$\alpha = 0, q = 0$  ( $p =$  일정)에 대해서

$$(\epsilon_1)_{d,cr} = n \times (1 + m') = (\epsilon_1)_{l,cr} \quad (32)$$

역시 임계스트레인은  $m' = (p/\sigma_1) = 0$ 의 경우에 비하여 크게 된다. 또한 n승경화법칙  $\bar{\sigma} = c\bar{\epsilon}^n$ 에 의해 식(27), 식(29)를 사용하여

$$\sqrt{3}\sigma'_1 A^* = c [(\epsilon_1)_{cr} \times \frac{2}{\sqrt{3}} A^*]^n \quad (33)$$

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= \frac{1}{3} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) = \frac{\sigma_1}{3} (2 - m + m') \\ &= \frac{\sigma_1}{3} [2 + m' - \frac{1}{2 + \alpha} [(2\alpha + 1) + m'(\alpha - 1)]] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m'} \cdot \frac{3(1 + m')}{2 + \alpha} = p \cdot \frac{1}{2 + \alpha} \cdot \frac{1 + m'}{m'} \quad (34)\end{aligned}$$

식(33), 식(34)에 의해  $p =$ 일정에 대하여 ( $q=0$ ),

$$\frac{p}{c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 + \alpha} \cdot A^* \cdot \frac{1 + m'}{m'} = [\frac{2}{\sqrt{3}} A^* \times (\epsilon_1)_{d,cr}]^n$$

$$\frac{p}{c} = \frac{2 + \alpha}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{A^*} \cdot \frac{m'}{1 + m'} \times [\frac{2}{\sqrt{3}} A^{*n} \cdot n \times \frac{(1 + m')}{(1 + \alpha)(2 - \alpha + 2\alpha^2) + m'[\alpha^2(\alpha - 1)]}]^n \quad (35)$$

$$= B \cdot \frac{m'}{1 + m'} \cdot [\frac{(1 + m')}{C - m'\alpha^2(1 - \alpha)}]^n$$

$$B = (A^*)^{n-1} \cdot 2^{2n} \cdot n^n (2 + \alpha) / (\sqrt{3})^{n+1}; \quad |\alpha| \leq 1$$

$$C = (1 + \alpha)(2 - \alpha + 2\alpha^2)$$

주어진 n, (p/c),  $\alpha$ 에 대해서 식으로부터 임계상태에서의  $m'$ 를 구해 식(31)에서 한계스트레인을 결정한다.

(p/c)를 파라메타로하고 어떤 ncl에 대하여 위와 같은 여러종류의  $\alpha$  ( $|\alpha| \leq 1$ )에 대한 한계스트레인을 구해  $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ 면에 프로트(FLD)한다. 또한 n을 변화시켜 같은 방법으로 한다.

<수치예>

(i)  $\alpha = 0, 1$ 에 대하여는 ( $p =$ 일정),

$(\epsilon_1)_{d,cr} = n \times (1 + m')$  이고 식(35)는

$$\frac{p}{c} = \hat{A} \cdot \frac{m'}{(1 + m')^{1-n}} \quad ; \quad \hat{A} = \frac{A^n}{A_0^n} \quad (36)$$

$\alpha = 0$ 에 대하여  $\hat{A} = \frac{2(2n)^n}{3^{(1+n)/2}}$

$\alpha = 1$ 에 대하여  $\hat{A} = (2n)^n$

또한  $n=0.5$ 에 대해서

$$(\frac{p}{c})^2 \cdot \frac{1}{\hat{A}^2} \cdot (1 + m') = m'^2$$

$$m'^2 - C_1 m' - C_1 = 0 \quad ; \quad C_1 = \frac{1}{\hat{A}^2} (\frac{p}{c})^2$$

$$\begin{aligned}m' &= \frac{1}{2} (C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4C_1}) \geq 0 \\ &= \frac{C_1}{2} (1 + \sqrt{1 + \frac{4}{C_1}})\end{aligned}$$

$\alpha = 0$ 에 대하여  $\hat{A} = \frac{2}{3^{0.75}} = 0.87738$

$p/c = 1.0$ 에 대해  $C_1 = 1.300, m' = 1.963$

$$(\epsilon_1)_{d,cr} = n \times \frac{2(1 + m')}{2} = n \times 3.0$$

$p/c = 0.1$ 에 대해  $C_1 = 1.3 \times 10^{-2}$ ,  $m' = 0.12$

$$(\epsilon_1)_{c,r} = n \times (1 + m') \approx n \times 1.12$$

$\alpha = 1$ 에 대하여  $\hat{A} = 1$

$p/c = 1.0$ 에 대해  $C_1 = 1$ ,  $m' = 1.618$

$$(\epsilon_1)_{c,r} = n \times (1 + m') \approx n \times 2.62$$

$p/c = 0.1$ 에 대해  $C_1 = 0.01$ ,  $m' = 0.105$

$$(\epsilon_1)_{c,r} = n \times (1 + m') \approx n \times 1.105$$

어느것도 국부네킹조건외 한계스트레인과 같다. 또한

(ii)  $\alpha = 0, 5$ 에 대하여는

$$(\epsilon_1)_{c,r} = n \times \frac{\frac{3}{2}(1+m')}{\frac{3}{2} - \frac{3}{8}m'} = n \times \frac{1+m'}{1 - \frac{m'}{4}}$$

$$A'' = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A_0 = \frac{3}{2}$$

$$A'' = 3^{\frac{3n-1}{2} - \frac{1+n}{2}} \cdot 2^{-3n+1+2n} \cdot n^n \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\frac{p}{c} = A'' \cdot \frac{m'}{1+m'} \left(\frac{1+m'}{\frac{3}{2} - \frac{3}{8}m'}\right)^n = \frac{m'}{1+m'} \left(\frac{1+m'}{1 - \frac{m'}{4}}\right)^n \cdot n^n$$

$$= \frac{1}{1+m'} \left(\frac{M'+1}{M'-\frac{1}{4}}\right)^n \cdot n^n = \frac{1}{(1+M')^{1-n}} \cdot \frac{1}{(M'-\frac{1}{4})^n} \cdot n^n$$

$$M' = \frac{1}{m'}$$

$n=0.5$ 에 대하여

$$\frac{p}{c} = \frac{1}{(M^2 + \frac{3}{4}M' - \frac{1}{4})^{0.5}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore 2 \left(\frac{p}{c}\right)^2 (M^2 + \frac{3}{4}M' - \frac{1}{4}) = 1$$

$$2 \left(\frac{p}{c}\right)^2 (4 + 3m' - m^2) = 2m^2$$

$$m' = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{c}\right)^2 \left[3 + \sqrt{25 + (32/\left(\frac{p}{c}\right)^2)}\right] \quad (37)$$

$p/c = 1$ 에 대해  $m' = 5.275$

$(\epsilon_1)_{c,r} = n \times \frac{1+m'}{1 - \frac{m'}{4}}$ 의 분모가 -인것에 의해

서  $(\epsilon_1)_{c,r} \rightarrow \infty$ 로 생각할 수 있다.

$m' < 4$ 의 조건(식(37)에 의해)  $m' = 4$ 라 하면

$x = \left(\frac{p}{c}\right)^2$ 라 하면

$$4 = \frac{1}{2} x \left(3 + \sqrt{25 + \frac{32}{x}}\right)$$

$$X = \frac{1}{x} \text{로서 } 8X = 3 + \sqrt{25 + 32X}$$

$$X \approx 1.42539 \quad \therefore 0 \leq \frac{p}{c} < 0.8376 \text{이 된다.}$$

$p/c = 0.8$ 에 대해  $m' = 3.73$

$$(\epsilon_1)_{c,r} \approx n \times \frac{1+m'}{1 - \frac{m'}{4}} = n \times 70.4$$

$p/c = 0.1$ 에 대해  $m' = 0.299$

$$(\epsilon_1)_{c,r} \approx n \times \frac{1+m'}{1 - \frac{m'}{4}} = n \times 1.404$$

위의 수치예에서 한계스트레인에 대하여 면외 압 p의 효과는 국부네킹의 경우와 비교해보면 스트레인비  $\alpha$ 가 1에 가까울수록 p의 효과는 적게 되는 것을 알수 있다.

### 5. J2G의 국부네킹 조건

Stören-Rice에 의한 국부네킹 발생조건을 기본으로하고 Gotoh가 제안한 구성식 J2G를 조합하여 해석하였다<sup>(12),(13)</sup>. 이것은 Fig.1과 같은 국부네킹미를 "스트레인속도 불연속선"으로 보고 이것의 발생조건을 파단발생조건(국부분기조건)으로 한다. 이것은 구성식에의 의존성이 강하고 통상의 J2F에서는 극히 높은 한계스트레인을 일반적으로 나타낸다. 또한  $\alpha = 0$ 의 평면변형률에서는 역시  $(\epsilon_1)_{c,r} \approx n$ 이다. 먼저 J2G는 탄소성에서 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2G} \hat{T} + \langle P(\Theta) \rangle \left\{ \frac{1}{2\sigma h_0} bT + \frac{1}{2h_0} aT \right\} \quad (38)$$

$$P(\Theta) = a + b \cos \Theta ;$$

$$\langle A \rangle = A \text{ for } A > 0, \quad A = 0 \text{ for } A \leq 0$$

$$\cos \Theta = T : \hat{T} / (T^2 \hat{T}^2)^{1/2},$$

$$a = h_0 / H_0, \quad b = 1 - a, \quad 3h_0 = d\bar{\sigma} / d\bar{\epsilon}^p$$

$$a = \cos \Theta_0 / (1 + \cos \Theta_0)$$

$$\Theta_0 = (\pi/2) - \rho \cdot \bar{\epsilon} ; \quad \bar{\epsilon}^p = \int d\bar{\epsilon}^p \dots (A)$$

$$\hat{T} = T - \dot{\omega}T + \dot{\omega}, \quad T = \sigma - \sigma_m 1$$

$$\dot{\omega} = (1/2)(L - L^T), \quad L = \partial u / \partial x$$

$$\dot{\epsilon} = (1/2)(L + L^T) \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} - (\dot{\epsilon}_v/3) 1$$

$$\sigma = \text{Cauchy 응력}, \quad \dot{\epsilon}_v = \text{Euler 변형률속도}$$

$$\sigma_m = \sigma_{kk}/3, \quad \dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{kk}$$

1=단위텐서, G=전단탄성계수

J2G의 특징은 Fig.3에 나타난 것처럼 후속항 복면에 현재의 응력점에서 꼭지점형성을 하는 것이다. 이 꼭지점의 원추형 반각은  $\theta_0$ 로서 윗식의 (A)에 의해 꼭지점의 성장속도를 규정시킨다. 이 인자로서 새로운 재료정수  $\rho$ 가 도입되고 있다.

일반적으로

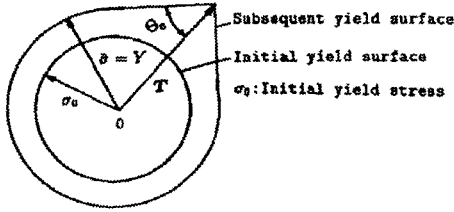


Fig.3 Vertexed yield surface used in J2G  
 $0 \leq \rho < 1$  (39)

이고  $\rho=0$ 라 하면 식(38)의 J2G는 통상의 J2F가 된다. J2G에 의한 경우 판재의 변형한계스트레인은 주로 이  $\rho$ 값과 가공경화율  $h_0$ 에 의하여 지배된다.

이 J2G와 S-R의 국부분기조건을 조합하여  $\sigma_3 = -p$ 가 작용하는 경우의 한계변형율을 규정하면 임계조건이 다음식처럼 구해진다. 단, 직선스트레인 경로를 고려한다.

$$A g_1^4 + C g_1 g_2 + E g_2^4 = 0 \quad (40)$$

$$A = (a_{11} - \sigma_1)(a_{33} - \hat{\sigma})$$

$$E = (a_{22} - \sigma_2)(a_{33} + \hat{\sigma})$$

$$C = (a_{11} - \sigma_1)(a_{22} + \sigma_2) + (a_{33}^2 - \hat{\sigma}^2)$$

$$- (a_{12} + a_{33} - \hat{\sigma})(a_{21} + a_{33} - \hat{\sigma})$$

$$\hat{\sigma} = (1/2)(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \hat{\tau} = (1/2)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (41)$$

$$a_{11} = (1/3D^*) \{ (1/H^*) + (b/4h_0 M^2) \{ (2m-1-m')^2 + am'(4m+1-5m') \} \}$$

$$a_{22} = (1/3D^*) \{ (1/H^*) + (b/4h_0 M^2) \{ (2-m-m')^2 + am'(m+4-5m') \} \}$$

$$a_{12} = (1/6D^*) \{ (1/H^*) - (b/2h_0 M^2) (2m-1-m'-am') \times (2-m-m') \}$$

$$a_{21} = (1/6D^*) \{ (1/H^*) - (b/2h_0 M^2) (2-m+m'-am') \times (2m-1-m') \}$$

$$a_{33} = 1 / \{ (1/H^*) + (ab/2h_0 M^2) m'(1+m-2m') \}$$

$$1/H^* = (1/G) + (1/H_0)$$

$$M^2 = 1 - m + m^2 + m'(m' - m - 1)$$

$$D^* = (1/12H^*) \{ (1/G) + (1/H_0) \} + (h_0^*/M^2) m'(1+m-2m') \times (1/2) \{ (1/G) + (a/H_0) \} + (2h_2^*/9)$$

$$+ (2h_1^*/3) \{ 4 + (m'/M^2) (1+m-2m') \}$$

$$h_1^* = (b/4H_0) \quad ; \quad h_2^* = (3b^2/4h_0)$$

식(40)이 실근을 갖게 되었을때 국부네킹이 존재하는 것이 되고 이 시점에서 파단이 발생된다.

(i)  $A=0$  가 먼저 생길 경우 : 이 시점에서는  $n$

가 1축방향과 평행인 즉 2축을 따라서 국부네킹이 발생한다.

(ii)  $A>0$ 에서  $c = -2\sqrt{AE}$ 가 먼저 생길 경우는  $\tan\psi = g_2/g_1 = (A/E)^{1/4}$ 의 방향으로 국부네킹이 발생한다.

Fig.4에서 Fig.6까지는 위에서 구한 것을 가지고  $G=80\text{GPa}$ ,  $C=20\text{MPa}$ 에 대하여 FLD(forming limit strain diagrams)로 나타냈다.

Fig.4는 면외압이 없는 경우( $p=0$ )의 FLD이다. (a)는 정수  $\rho=0.8$ 에 대하여  $n$ 값이 0.0에서 0.5까지 0.05간격을 가지고 변화한 경우이다. 또한 (b)는 정수  $n=0.05$ 값에 대하여  $\rho$ 값이 0.05에서 1.0까지 0.05의 간격으로 변화한 경우이다.

Fig.5는 면외압  $p/c=0.1$ 일때의 FLD이다. (a)는 정수  $\rho=0.8$ 에 대하여  $n$ 값이 0.0에서 0.5까지 0.05간격을 가지고 변화한 경우이다. 또한 (b)는 정수  $n=0.05$ 값에 대하여  $\rho$ 값이 0.05에서 1.0까지 0.05의 간격으로 변화한 경우이다. Fig.4와 Fig.5를 비교해보면 FLD는 Fig.5에 있어서  $p$ 가 상당히 크게 되지만  $p$ 의 존재에 의해서 높게되는 것을 확인할수 있다. 더욱이 Fig.5에 있어서 종좌표상의 한계스트레인은 앞절의 Hill에서와 같이  $n$ 값보다 크게 되었다.

Fig.6은 면외압  $p/c=0.5$ 일때의 FLD이다. (a)

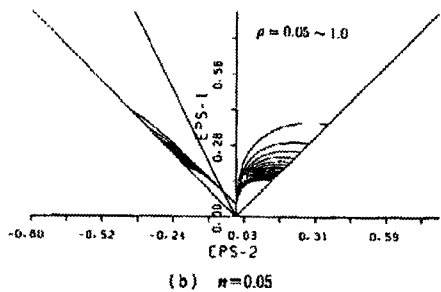
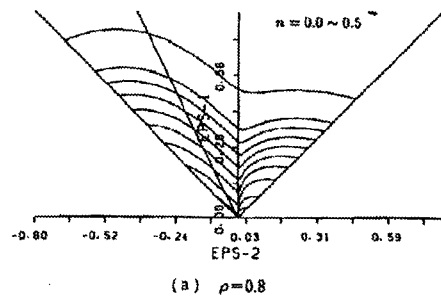


Fig.4 FLD nets for  $p=0$

는 정수  $\rho = 0.8$ 에 대하여 또한 (b)는 정수  $n=0.05$ 값에 대한 것이다. Fig.4와 Fig.5, Fig.6을 비교해보면  $p$ 의 영향은  $p$ 가 크면클수록 더욱더 현저하게 되는 것을 확인할 수 있다. FLD는 Fig.5에 있어서  $p$ 가 상당히 크게 되지만  $p$ 의 존재에 의해서 높게 되는 것을 확인할 수 있다. 특히 Fig.4(a)와 Fig.6(a)를 비교해보면 고전론을 사용한 전절의 결과와 같고 스트레인비  $\alpha$ 가 -1에 가까울수록  $p$ 의 효과는 적게 되는 것을 재차 확인되었다.

이상의 결과로  $\alpha = 0$ 인 평면변형율에 대한 경우를 포함해서  $p$ 의 영향으로 한계스트레인이 현저하게 증대하는 것을 알 수 있었다.

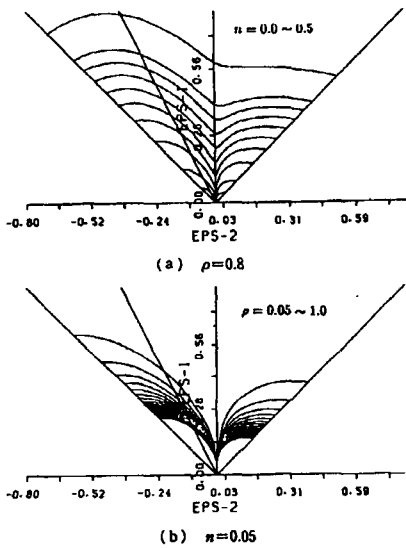


Fig.5 FLD nets for  $n/c=0.1$

### 6. 결 론

판재의 변형한계스트레인의 면외압의존성에 대해서 종래의 이론치에 비해 상당히 크게 되는 사실을 도출하였다. 종래의 이론은 어느것도 평면응력을 가정하고 있기 때문에 면외압의 영향은 고려할 수가 없었다. 따라서 본 논문은 국부분기조건에 따른 여러 변형한계조건식을 적용하여 이론해석하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) Swift 와 Hill의 고전론과 J2G에 면외압  $p$ 의 도입을 하여 이론해석 하였다.

(2)  $\alpha = 0$ (평면스트레인)에 대한 경우를 포함하여  $p$ 의 영향으로 한계스트레인이 현저하게 증대하며  $p$ 가 클수록 한계스트레인은 크게 된다.

(3) 면내스트레인비  $\alpha$ 가 -1에 가까울수록  $p$ 의 효과는 작게 된다.

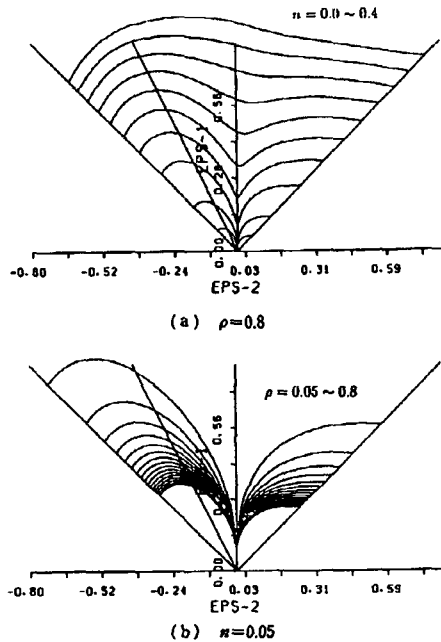


Fig.6 FLD nets for  $p/c=0.5$

### 참 고 문 헌

- (1) Hill, R., "On Discontinuous Plastic States with Special Reference to Localized necking in Thin Sheets", J. Mech. Phys., Solids, 1-1, pp.19~28, 1952.
- (2) Marciniak, Z. and Kuczynski, k., "Limit Strains in the Processes of Stretch-Forming Sheet Metal", Int. J. Mech. Sci., 9-9, pp.609~620, 1967.
- (3) Stören, S. and Rice, J. R., "Localized Necking in Thin Sheets", J. Mech. Phys.

Solid, 23-6, pp.421~441, 1975.

(4)宅田裕彦, 森謙一郎, 八田夏夫, “板材成形における成形限界予測への延性破壊条件式の適用”, 第46回塑性加工聯合講演會, 千葉, pp.155~156, 1995.

(5)伊藤耿一, 佐藤浩一, 秋谷暢久, “薄板の破断限界ひずみ及ばす分岐モードの影響”, 第46回塑性加工聯合講演會, 千葉, pp.149~150, 1995.

(6)後藤學, “弾塑性構成式に一形式(第4報, 金属薄板のFLDの計算への適用)”, 日本機械學會論文(A編), 49-437, pp.92~100, 1983.

(7)後藤學, 三浦篤之, 平子誠, “深絞りおよび張出し成形における金属板の變形限界ひずみ”, 塑性と加工, 30-342, pp.1022~1029, 1989.

(8)Gotoh, M., “The Theoretical Prediction of Forming Limit Strains of Sheet Metals in Press-Forming Process”, JSME Int. J., Ser. I, 34-3, pp.297~304, 1991.

(9)後藤學, 鄭泰勳, “せん断帯形成による變形限界の數値的研究(第1報, 板材の成形限界ひずみの板厚依存性と傾斜材料の變形限界)”, 日本機械學會論文(A編), 61-592, pp.2636~2641, 1995.

(10)鄭泰勳, 後藤學, “せん断帯形成による變形限界の數値的研究(第2報, 接合板の變形限界)”, 日本機械學會論文(A編), 62-594, pp.569~575, 1996.

(11)Swift, H.W., “Plastic Instability Under Plane Stress, J. Mech. Phys. Solids, Vol.1, No.1, pp.1~6, 1952.

(12)Gotoh, M., “A simple plastic constitutive equation with vertex effect”, Engng. Fracture Mech., 21-4, pp.673~684, 1985.

(13)後藤學, “弾塑性構成式に一形式(第7報, 2次元及び軸對稱塑性成形の有限要素による數値解析への適用)”, 日本機械學會論文(A編), 54-504, pp.1579~1587, 1988.