

독립성분분석법에 의한 잡음첨가신호의 분석성능비교

Comparison of Analysis Performance by Independent Component Analysis to Additive Noise Signals

박용수*, 조용현

대구가톨릭대학교 컴퓨터정보통신공학부

Yong-Soo Park, Yong-Hyun Cho

School of Computer and Information Comm. Eng.,

Catholic Univ. of Daegu

E-mail : timpark@chol.net

요약

본 논문에서는 잡음이 첨가된 선형적으로 혼합된 신호들을 대상으로 뉴우턴법과 할선법의 고정점 알고리즘 각각을 적용할 때 그 분리성능을 비교 검토하였다. 여기서 뉴우턴법은 기울기 변화에 따른 속성을 이용하며, 할선법은 접선의 변화를 이용하는 속성을 가진다. 실험에 이용된 신호는 512x512 픽셀의 2개 2차원 영상이며, 가우스 분포와 라플라시안 분포의 잡음을 이용하였다. 실험 결과, 할선법의 알고리즘이 뉴우턴법보다 잡음에 강인한 특성을 가짐을 알 수 있었다. 한편, 잡음이 첨가되지 않은 경우보다 가우시안 잡음 및 라프라시안 잡음을 첨가한 경우, 절대합 오차값에서 각각 약 23% 및 약 9.7% 정도 원영상과의 오차를 보였다.

1. 서론

통계학, 신호처리, 그리고 신경망 등에서 적당한 변환에 의해 알맞은 데이터의 표현을 찾기 위하여 일반적으로 선형변환을 이용한다. 최근에 개발된 독립성분분석은 정보 내에 포함된 성분들의 통계적인 의존성을 최소화하는 효과적인 선형변환기법으로 정보통신시스템, 의료신호분석, 독립화자분리시스템, 그리고 경제시계모델 등에 널리 이용되고 있다.

독립성분분석(independent component analysis : ICA)은 데이터의 통계적 성질을 고려한 선형변환 기법으로 데이터의 분포정보를 이용하는 다차원 방법이다^[1].

지금까지 발표된 신경망을 이용한 ICA 방법으로는 엔트로피를 최소화하는 것에 기초를 둔 fixed point(FP) 알고리즘, 비선형 PCA에 기초한 recursive least square 알고리즘, 결합엔트로피를 최대화하기 위하여 확률적 기울기를 이용하는 Bell & Sejnowski(BS) 알고리즘, natural gradient 알고리즘 등이 제안되었다^[2].

최근 시끄러운 환경에서 카테일 파티 문제를 해결 할 수 있는지에 대한 논의가 활발하게 대두되고 있다. 즉 잡음이 있는 환경 하에서 원래의 신호를 분리해 낼 수 있는지에 대하여 해결하려는 연구가 활발하게 진행되고 있다^[3,4].

본 연구에서는 실세계에서 발생할 수 있는 잡음 환경을 고려한 독립성분분석을 수행한다. 이를 위하여 엔트로피 최적화 방법에서 유도된 빠른 학습속도를 갖는 FP 알고리즘과 기존의 FP 알고리즘의 계산을 간략화하기 위해 도입한 할선법(Secant method)^[5] 알고리즘을 이용하여 잡음이 첨가된 환경 하에서 각각을 적용함으로써, 잡음이 고려되지 않는 환경과 비교하고, 또한 두 가지 알고리즘의 분리성능을 비교 검토한다. 제안된 기법을 512x512개의 영상신호를 가지는 2개의 신호들로부터 임의의 혼합행렬에 따라 발생되는 혼합신호들을 각각 대상으로 실험하여 성능을 확인하였다.

2. 신경망 기반 ICA

ICA는 m개의 입력신호 s 가 선형적으로 혼합된 n개의 신호 x 가 알려져 있을 때, 혼합된 신호로부터 역으로 m개의 독립인 입력신호를 찾는 기법이다. 여기서 입력신호들을 혼합하는데 이용된 혼합행렬 A 는 알려져 있지 않으며, 혼합과정에서 잡음 n 이 추가 될 수도 있다. 이때 혼합신호와 입력신호와의 관계는

$$x = As + n = \sum_{i=1}^m s(i)a(i) + n \quad (1)$$

로 표현된다. 여기서 잡음 n 은 보통 입력신호와 구별되지 않기 때문에 생략할 수도 있으며, $\mathbf{A} = [a(1), a(2), \dots, a(m)]$ 으로 $a(i)$ 는 ICA의 basis vector이다. 결국 ICA는 알려진 혼합신호로부터 혼합행렬의 역행렬 \mathbf{A}^{-1} 을 찾는 기법이다. 이상의 관계를 요약하면 그림 1과 같다. 그럼에서 보면 혼합기(mixer)의 출력신호인 혼합신호는 알 수 있으나 혼합기의 특성인 \mathbf{A} 와 입력신호인 원 신호 s 는 알려져 있지 않다. 결과적으로 입력신호와 출력신호가 일치하도록 하는 즉, $y = \mathbf{Wx} = \mathbf{WAs}$ 에서 $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}$ 의 관계를 만족토록 하는 것이다.

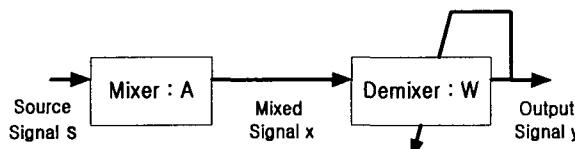


그림 1. ICA를 위한 구성도

ICA는 알려진 혼합신호 x 로부터 출력신호 y 를 찾는 기법으로 궁극적으로는 역혼합행렬 \mathbf{W} 을 찾아서 원 신호 s 의 근사값을 알아내는 것이다. 여기서 영평균과 whitening된 혼합신호를 이용하면, 신호의 1차와 2차의 통계성에 따른 상관성이 이미 고려되어 좀 더 효율적인 ICA를 수행할 수 있다.

2.1 신호의 영평균과 Whitening

신호의 영평균은 데이터의 1차적 통계성을 고려한 정규화로 학습알고리즘을 간략하게 하는 기법이다.

이는 신호 데이터 벡터 \mathbf{x} 에서 평균값 \mathbf{x}^* 를 뺀 차를 구함으로써 간단하게 구할 수 있다. 즉, 영평균된 새로운 데이터 벡터 \mathbf{x} 는

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \quad (2)$$

이다. 한편, 데이터의 2차적 통계성을 고려한 상호간의 의존성을 줄이기 위한 기법으로 whitening이 이용되고 있다. whitening은 데이터 벡터 \mathbf{x} 의 공분산행렬이 단위행렬값을 갖도록 함으로써 구할 수 있다. 즉, $E\{\mathbf{xx}^T\} = \mathbf{I}$ 가 되도록 한다. 이렇게 함으로써 white-ness된 벡터의 성분들 상호간의 상관성이 줄어들어 강한 독립성분이 된다. PCA^[6]는 공분산행렬의 고유벡터와 고유치를 추정하는 수치적 기법으로 이루어진다. 일반적인 PCA whitening 행렬 \mathbf{V} 는

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}^{(-1/2)} \mathbf{E}^T \quad (3)$$

이다. 여기서 \mathbf{D} 는 고유값 λ 로 구성되는 대각행렬이며, \mathbf{E} 는 고유벡터 \mathbf{c} 로 구성되는 직교행렬이다. 본 연구에서는 혼합신호로부터 원 신호를 추출하기 전에 신호데이터를 영평균 정규화하고, 표준 PCA 기법으로 whitening하여 이용하였다.

2.2 고정점 알고리즘

고정점 알고리즘은 엔트로피 최적화 방법으로부터 유도된 기법으로 그 수렴속도가 적어도 2차 함수정도로 지금까지 알려진 기법 중 가장 빠른 학습속도를 가진다. 이는 신호 내에 포함된 상호정보를 고려한 것으로 그 척도는 독립성의 거리이다. 결국 상호정보를 최소화함으로써 ICA의 해를 구하는 기법이다.

상호정보는 랜덤변수 상호간의 독립성의 정보이론적 척도로 ICA 변환을 찾기 위한 판별로서 이용될 수 있다. 일반적으로 변수들 상호간의 정보를 표현하는 상호정보는 비가우스성의 척도로 이용되는 negentropy로 정의된다. n 개의 랜덤변수 벡터 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ 를 위한 negentropy $J(\mathbf{y})$ 는

$$J(\mathbf{y}) = H(y_{gauss}) - H(\mathbf{y}) \quad (4)$$

이다. 여기서 $H(\mathbf{y})$ 는 랜덤변수 \mathbf{y} 의 엔트로피(entropy)이며, y_{gauss} 는 가우스 랜덤벡터이다. 이때 negentropy $J(\mathbf{y})$ 를 이용한 상호무관(decorrelation)한 n 개 랜덤변수 $y_i (i=1, \dots, n)$ 사이의 상호정보 $I(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 은

$$I(y_1, y_2, \dots, y_n) = J(\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^n J(y_i) \quad (5)$$

로 정의된다. 결국 ICA에서 독립성을 최대화하기 위해 식 (5)로 정의되는 상호정보 $I(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 을 최소화하는 것은 negentropy를 최대화하는 것이다. 여기서 negentropy의 최대화는 식 (5)의 우측 2번째 항의 최대화로 가능하다. 이를 위한 근사식으로 최대 엔트로피 원리를 이용한 식은

$$J(y_i) \approx c[E\{G(y_i)\} - E\{G(v)\}]^2 \quad (6)$$

와 같이 정의된다. 여기서 G 와 c 는 각각 비2차(non-quadratic) 함수와 상수이고, v 는 평균이 0이고 분산이 1인 표준화된 가우스 변수이며, 랜덤변수 y_i 도 평균이 0이고 분산이 1인 변수로 가정한다. negentropy의 근사화를 위한 식 (6)은 ICA 변환을 추정하기 위한 목적함수로 이용될 수 있다. 따라서 ICA에서 독립변수들의 상호간 무관성을 고려한 하나의 독립성분 $y_i = \mathbf{W}^T \mathbf{x}$ 를 찾기 위한 목적함수 $J_G(\mathbf{W})$ 는 식 (6)에 따라

$$J_G(\mathbf{W}) = [E\{G(\mathbf{W}^T \mathbf{x})\} - E\{G(v)\}]^2 \quad (7)$$

로 표현된다. 이를 전체 n 개의 독립성분 모두에 대해서 확장하면

$$\begin{aligned} & \maximize \sum_{i=1}^n J_G(\mathbf{w}_i) \quad \text{w.r.t.} \quad \mathbf{w}_i, \quad i=1, 2, \dots, n \\ & \text{subject to } E\{(\mathbf{w}_k^T \mathbf{x})(\mathbf{w}_j^T \mathbf{x})\} = \delta_{jk} \end{aligned} \quad (8)$$

이 된다. 여기서 \mathbf{w}_i 는 역혼합행렬 \mathbf{W} 의 행벡터 중에

하나이며, ICA 변환은 $s = \mathbf{W}\mathbf{x}$ 로 얻어진다. 결국 식 (7)이나 (8)로 정의된 ICA를 위한 목적함수를 최대화하기 위한 방법이 요구된다. 이러한 방법으로 가장 간단한 알고리즘은 기울기하강(gradient descent)에 기초를 둔 기법들이나, 이 방법에 기초한 알고리즘들의 제약들을 해결하기 위한 대안으로 FP 알고리즘이 제안되었다^[5].

데이터 벡터 \mathbf{x} 의 상관행렬 $E\{\mathbf{xx}^T\}=\mathbf{I}$ 로 whitening 되어 있다고 가정할 때, 하나의 독립성분을 위한 식 (7)로부터 FP 알고리즘을 유도하면 다음과 같다. 식 (7)에서 $J_G(\mathbf{W})$ 의 최대화는 반드시 $E\{G(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\}$ 의 최적에서 얻어진다. 이때 Kuhn-Tucker 조건으로부터, $E\{(\mathbf{W}^T\mathbf{x})^2\} = \|\mathbf{W}\|^2 = 1$ 조건 하에서 $E\{G(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\}$ 의 최적은 다음의 값

$$E\{\mathbf{x}g(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\} - \beta\mathbf{W} = 0 \quad (9)$$

으로 얻어진다. 여기서 $g(\cdot)$ 는 비2차 함수 G 의 미분이고, $\beta=E\{\mathbf{W}_0^T\mathbf{x}g(\mathbf{W}_0^T\mathbf{x})\}$ 인 상수이며 \mathbf{W}_0 는 \mathbf{W} 의 최적값이다. 따라서 방정식 (9)의 근을 구하기 위해 빠른 수렴속도를 가지는 뉴우턴의 기법^[8,12-14]을 도입한다. 뉴우턴법은 충분히 정확한 초기값이 설정되었을 때 항상 근에 수렴한다. 이를 위해 식의 좌변 항을 $F(\mathbf{W})$ 로 나타내고, 그것의 Jacobian matrix $JF(\mathbf{W})$ 를 구하면 다음과 같다. 즉,

$$JF(\mathbf{W})=E\{\mathbf{xx}^Tg'(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\}-\beta\mathbf{I} \quad (10)$$

이다. 한편 데이터 벡터 \mathbf{x} 가 이미 whitening되어 있어 뉴우턴법에 의해 해를 구하는데 이용되는 $JF(\mathbf{W})$ 의 역행렬 계산을 간단하게 하기 위해 식 (10)의 우변 첫째 항을

$$E\{\mathbf{xx}^Tg'(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\} = E\{\mathbf{xx}^T\}E\{g'(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\} = E\{g'(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\}\mathbf{I} \quad (11)$$

로 근사화할 수 있다. 식 (11)을 식 (10)에 대입하면 Jacobian matrix는 대각선 행렬이 되어 쉽게 역행렬을 계산할 수 있다. 따라서 β 를 \mathbf{W}_0 대신에 \mathbf{W} 의 현재 값으로 나타내어 근사화된 반복기법으로 근인 역혼합행렬 \mathbf{W} 를 구하는 뉴우턴법은

$$\begin{aligned} \mathbf{W}' &= \mathbf{W} - [E\{\mathbf{x}g(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\} - \beta\mathbf{W}] / [E\{g'(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\} - \beta], \\ \mathbf{W}^* &= \mathbf{W}' / \|\mathbf{W}'\| \end{aligned} \quad (12)$$

와 같다. 여기서 \mathbf{W}' 는 \mathbf{W} 의 새롭게 경신된 값이고, $\beta=E\{\mathbf{W}^T\mathbf{x}g(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\}$ 이다. 결국 식 (12)는 뉴우턴법에 기초를 둔 ICA를 위한 FP 알고리즘이다. 또한 식 (12)의 윗식 양쪽에 $\beta - E\{g'(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\}$ 를 곱해 구해지는 더욱 간단한 뉴우턴법의 FP 알고리즘은

$$\mathbf{W}' = E\{\mathbf{x}g(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\} - E\{g'(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\}\mathbf{W}, \mathbf{W}^* = \mathbf{W}' / \|\mathbf{W}'\| \quad (13)$$

으로 표현될 수 있다.

2.3 할선법에 기초한 FP-ICA

할선법은 현재의 함수 값과 바로 이전의 함수 값만을 이용함으로써 해를 구할 수 있어 기존의 Newton 기법에 기반을 둔 알고리즘에서처럼 별도의 1차 미분계산이 요구되지 않는다. 이는 Newton기법에 비해 할선법이 반복에 소요되는 시간이 적게 걸리는 근거이다. 따라서 β 를 \mathbf{W}_0 대신에 \mathbf{W} 의 현재값으로 나타낸 근사화된 반복방법의 할선법에 기초한 역혼합행렬 \mathbf{W} 를 구하는 식은

$$\begin{aligned} f(\mathbf{W}') &= [E\{\mathbf{x}g(\mathbf{W}'^T\mathbf{x})\} - \beta\mathbf{W}'] \\ f(\mathbf{W}) &= [E\{\mathbf{x}g(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\} - \beta\mathbf{W}] \\ \mathbf{W}' &= \mathbf{W} - f(\mathbf{W})[(\mathbf{W}-\mathbf{W}')/(f(\mathbf{W})-f(\mathbf{W}'))] \\ \mathbf{W}^* &= \mathbf{W}' / \|\mathbf{W}'\| \end{aligned} \quad (14)$$

와 같다. 여기서 \mathbf{W}' 는 \mathbf{W} 의 새롭게 경신된 값이며, \mathbf{W}' 은 바로 전에 계산된 \mathbf{W} 의 값이고, $\beta = E\{\mathbf{W}^T\mathbf{x}g(\mathbf{W}^T\mathbf{x})\}$ 이다. 결국 식 (14)는 할선법에 기초를 둔 ICA를 위한 FP 알고리즘이다. 여기서는 역혼합행렬 \mathbf{W} 를 구하는데 별도의 1차 미분인 Jacobian matrix의 계산이 요구되지 않아 보다 빠른 계산시간을 가진다.

3. 시뮬레이션 결과 및 분석

제안된 학습알고리즘의 신경망 기반 ICA의 타당성과 성능을 평가하기 위해서 인공적으로 생성된 2개의 신호를 각각 대상으로 시뮬레이션 하였다. 시뮬레이션에서는 512x512개의 2차원 데이터를 가지는 2개의 독립된 신호를 대상으로 임의의 값을 가진 혼합행렬로부터 생성된 신호들에 512x512 잡음을 추가하여 제시된 알고리즘을 수행하였다. 이 때 가우시안 잡음은 평균과 분산을 각각 0과 0.001로 하였으며, 라프라시안 잡음은 분산을 0.01로 하였다. 복원 성능을 평가하기 위해 각 신호의 절대합오차(absolute sum error : ASE)를 정의하여 원 신호와 복원된 신호의 정합성을 각각 비교하였다. 이 때 절대합오차 $ASE = \frac{1}{(512)^2} \sum_{i=1}^{512} |x_i - y_i|$ 이며, 여기서 x_i 와 y_i 는 각각 원 신호와 복원된 신호의 i 번째 값이다. 시뮬레이션은 팬티엄IV-1.5G 컴퓨터상에서 Matlab 5.1로 실행하였다.

그림 2는 원 영상신호와 임의의 혼합행렬로부터 생성된 혼합신호 2개를 각각 나타낸 것이다. 그림 3(b)의 혼합신호는 2×2 의 임의의 임의값을 가지는 혼합행렬 \mathbf{A} 로부터 생성된 신호위에 가우시안과 라프라시안 잡음을 각각 추가한 신호이며, 그 각각에서는 원 신호들과 잡음이 겹쳐진 것을 발견할 수 있다. 실제에서 혼합신호들은 알려져 있으나 원 신호들은 미지의 신호들이다. 시뮬레이션에서는 혼합된 신호들을 전처리한 후 입력신호로 하여 ICA를 수행하였다.

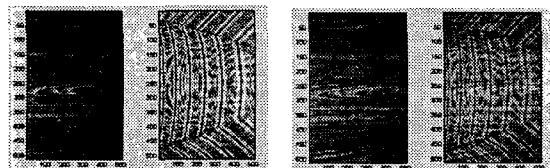


그림 2. 512x512의 2개 독립된 영상신호

그림 3은 그림 2(b)의 혼합신호들을 대상으로 (a) 기존의 뉴우턴법 FP-ICA와 (b) 할선법 FP-ICA를 각각 수행한 후 복원된 2개 영상신호들이다. 그림에서 원 신호와 복원된 신호들 사이의 순서는 일치되지 않음을 알 수 있다. 이는 수행과정에서 신호의 순차를 고려하지 않는 ICA의 속성이 반영되었기 때문이다. 여기서 원 신호와 복원된 신호를 순서에 맞추어 서로 비교하면 육안으로 상당히 유사함을 알 수 있다. 복원된 신호는 각각 혼합된 신호의 독립성분이다.

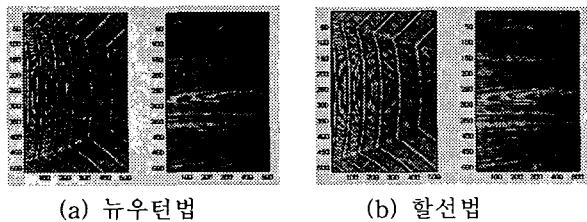


그림 3. 두 가지 FP-ICA에 의해 복원된 신호

표 1은 10번의 실험을 통하여 원신호에 잡음을 첨가하지 않는 경우와 잡음을 첨가했을 경우, 각각의 대응되는 원 신호와 복원된 신호에 대해 데이터단위로 그 절대합오차와 학습반복수의 평균을 나타낸 것이다. 우선 잡음이 없는 경우를 보면, 절대합오차는 두 가지 알고리즘 모두 0.0069로 거의 동일하여 오차가 없이 분리 가능함을 알 수 있으며, 학습반복수는 할선법이 적으나, 분리에 소요되는 시간은 뉴우턴법이 약간 빠름을 알 수 있다. 다음으로 잡음이 첨가된 환경에서는 첫째, 절대합오차값에서 비교해 보면 가우시안 잡음($mean=0$, $sigma=0.001$)을 첨가했을 경우는 뉴우턴법 FP-ICA 및 할선법 FP-ICA가 각각 0.2387과 0.2260으로 할선법 FP-ICA가 잡음특성에 나음을 알 수 있다. 또한, 라프라시안 잡음($sigma=0.01$)의 경우는 절대합오차가 뉴우턴법 및 할선법 FP-ICA가 0.1006 및 0.0932로 역시 할선법 FP-ICA가 다소 잡음 특성에 나음을 알 수 있다. 한편 잡음을 첨가하지 않는 경우인 0.0069보다 많은 차이를 보이는데, 이는 원영상에 잡음이 첨가된 상태에서 분리됨으로써 평균23% 정도의 순상을 가져온 것으로 볼 수 있다. 둘째로, 분리에 소요된 시간 면에서 가우시안 잡음의 경우는 할선법이 다소 빠르고, 라프라시안 잡음의 경우는 뉴우턴법이 다소 빠름을 알 수 있다. 그러나 가우시안 잡음이 적용되는 경우가 많음으로 할선법 알고리즘이 유리하다고 볼 수 있다. 이로써 잡음이 있는 환경에서 절대합오차값 및 분리소요시간측면에서 두 알고리즘을 비교해 보면 뉴우턴 FP-ICA 알고리즘보다 할선법 FP-ICA 알고리즘이

잡음에 더 강인한 특성을 갖는 것을 알 수 있다.

표 1. 원 신호와 잡음이 첨가된 신호의 절대합
오차와 학습반복수

입력 신호	뉴우턴법 FP-ICA			할선법 FP-ICA			
	절대합 오차, ASE k	학습 반복수, t	소요 시간	절대합 오차, ASE k	학습반 복수, k	소요 시간	
원신 호	1	0.0025	2.73	3.02	0.0025	2.60	4.58
	2	0.0112	4.45	4.83	0.0112	2.60	4.64
	평균	0.0069	3.59	3.93	0.0069	2.60	4.61
원신 호 + im	1	0.2370	2.82	4.18	0.2350	1.82	3.61
	2	0.2403	3.64	5.40	0.2171	2.91	5.78
	평균	0.2387	3.23	4.79	0.2260	2.37	4.70
원신 호 + la	1	0.1015	4.36	5.16	0.0941	2.00	4.33
	2	0.0997	3.00	3.54	0.0922	2.45	5.31
	평균	0.1006	3.68	4.35	0.0932	2.23	4.82

*im=Gaussian잡음, la=Laplacian잡음

4. 결론

본 논문에서는 잡음이 첨가된 선형적으로 혼합된 신호들을 대상으로 뉴우턴법과 할선법의 FP-ICA 각각을 적용할 때 그 분리성능을 비교 검토하였다. 이때, 평균과 분산이 각각 0과 0.001인 가우시안 잡음 및 분산이 0.01인 라프라시안 잡음의 경우, 할선법의 FP-ICA가 뉴우턴법의 FP-ICA보다 잡음에 강인한 특성을 가짐을 알 수 있었다. 한편 잡음을 첨가되지 않고 분리한 경우보다 가우시안 잡음 및 라프라시안 잡음을 첨가한 경우가 절대합 오차가 각각 23% 및 9.7%로 원영상과의 오차를 보였다.

향후 잡음환경에서도 원신호를 가능한 그대로 분리할 수 있는 방법을 연구 및 다른 알고리즘과의 비교연구도 뒤따라야 할 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] P. Comon, "Independent Component Analysis -A New Concept?", Signal Processing, vol.36, No.3, pp. 287-314, Apr. 1994
- [2] T.W. Lee, Independent Component Analysis : Theory and Applications, Kluwer Academic Pub., Boston, 1998
- [3] A. Hyvarinen, "Noisy independent component analysis by Gaussian moments", Proc. ICA'99, Aussois, France, pp.473-478, 1999.
- [4] Hyung-Min Park, Adaptive Filtering Methods or Acoustic Noise Reduction and Noisy speech Recognition, Ph.D. thesis, KAIST, Daejeon, 2003
- [5] K. Atkinson, Elementary Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993
- [6] K .I. Diamantaras and S. Y. Kung, Principal Component Neural Networks : Theory and Applications, Adaptive and learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control, John Wiley & Sons, Inc., 1996