

## 지진하중을 받는 구조물의 모드기여계수 산정

### Estimation of Modal Participation Factor of a Structure under Earthquake Load

○황재승\*                      김홍진\*\*  
Hwang, Jae Seung          Kim, Hong Jin

---

#### ABSTRACT

Modal participation factor(MPF) is essential to analyze structural response under earthquake load. MPF of real structure differs from that of analytic mathematical model due to the error induced from analytical assumption and construction. In this study, a identification method is proposed to calculate the MPF of real structure based on  $H^\infty$  optimal model reduction. The MPF is obtained from the relationship between observability, controllability matrix of realized from S.I. and typical 2-degree state space model. The proposed method is verified thorough examples.

---

#### 1. 서    론

##### 1.1 연구의 배경 및 목적

선형 구조물 해석방법 중 모드중첩법은 단순하면서 매우 유용한 방법이다. 건축, 토목구조물과 같이 저차의 수개 모드가 거동을 지배하는 경우는 더욱 그러하다. 지진하중을 받는 전단 구조물은 지반의 가속도와 각층 질량에 의해 생성되는 관성력에 지배를 받으며, 각층에 전달되는 관성력은 모드기여계수(Modal Participation Factor, 이하 MPF)에 의하여 각 모드에 전달된다. 그러므로 MPF는 지반가속도가 각 모드에 미치는 영향을 나타내는 계수로써 그 크기에 따라 모드의 거동이 달라지는 매우 중요한 요소이다. MPF는 고유벡터를 정규화하는 방법에 따라 그 크기가 달라지는 상대적인 양이다. 그러므로 고유벡터가 가지는 정규화방법, 물리적인 특성에 따라 그 크기가 달라지며 이들이 해석과정 또는 역 해석 과정에 미치는 영향을 평가하기 위해서 이를 명확히 파악할 필요가 있다. MPF는 운동방정식을 구성하는 변수를 독립된 기저를 가지는 모드공간으로 분해하는 과정에서 정의되는 개념이기 때문에, 해석과정에서 이를 정의하거나 구하는 방법은 이미 구조 동역학을 다루는 많은 문헌에 나타나 있다.<sup>1), 2), 3)</sup>

진동실험이나 실측된 시간이력을 이용하여 구조물의 동적특성을 추정하는 기법이 많이 연구되었으며, 최근에는 시스템 식별기술이 고도화 되면서 이를 활용한 연구가 진행되고 있다. 모드특성에 대한 해석 및 실험<sup>4)</sup> 진동수영역, 시간영역에서의 식별이론<sup>5), 6)</sup>을 비롯하여, 비선형시스템과

---

\*    전남대학교 건축학부 교수(jshwang@jnu.ac.kr)

\*\*   포항 산업 과학연구원 선임연구원

실시간에서의 식별기술<sup>7), 8)</sup>이 개발되었으며, 시스템 식별을 쉽게 적용하기 위한 프로그램<sup>9)</sup>이 있다. 그러나 이들 연구는 주로 구조물의 상태방정식, 진동수, 감쇠비나 모드형상을 산정하는 것으로, MPF를 산정하는 것은 아직 이루어지지 않았다. 본 연구에서는 지진하중을 받는 구조물의 명확한 해석이나 역해석에 사용되는 MPF를 산정하는 방법에 대해서 다루고자 한다. 이를 위하여 고유치해석 과정에서 정규화 방법에 따라 달라지는 기존 MPF 산정방법을 간략히 고찰하고, 실 구조물의 MPF를 진동실험과 시스템 식별을 통하여 산정하는 방법을 제시하고자 한다.

## 1.2 연구의 내용 및 범위

본 연구의 MPF 산정방법은 시스템 식별이론에 기초하고 있다. 기존의 시스템 식별방법을 이용하여 구조물의 모드 진동수와 감쇠비를 구하고, 이로부터 구성된 단 자유도계 시스템의 상태방정식을 정형화한 후, 실험에 의해 최소구현(minimal realization)된 새로운 상태방정식을 비교하여 MPF를 구하는 방법이다. 물리적인 의미를 가지는 단 자유도계 구조물의 운동방정식을 정형화된 상태방정식으로 고정하고, 시스템 식별로부터 구해진 임의의 상태방정식을 변환행렬을 이용하여 정형화된 상태방정식과 비교하는 과정에서, 각 시스템의 가제어 행렬과 가관측 행렬<sup>10)</sup>의 상관관계로부터 MPF를 산정하는 방법이다.

다자유도 시스템의 MPF는 각각의 모드를 단자유도시스템으로 변환한 후 산정하였으며, 변환과정에서 모델응축기법을 사용하였다. 사용된 모델응축기법은 H $\infty$ 최적모델 응축법(H $\infty$  Optimal Model Reduction)<sup>11)</sup>이다.

출력의 특성에 따른 MPF의 영향을 고찰하기 위하여, 출력으로 각각 변위와 가속도를 사용하는 경우 MPF 산정방법을 제시하였으며, 출력에 첨가되는 노이즈의 영향을 고찰하기 위하여 노이즈의 크기에 따른 MPF예측 방법을 제시하였다. 입력과 출력은 모두 알고 있다고 가정하였으며, 입력은 지진이력을 사용하였으며 출력은 구조물의 지반에 대한 상대변위, 가속도로 설정하였으며, 층간변위는 고려하지 않았다. 본 연구의 MPF 산정방법을 검증하기 위하여 수치해석을 수행하였다. 수치해석방법에서는 단자유도 시스템에 대하여 기존의 지진이력과 해석결과를 이용하여 MPF 산정방법을 검증하였으며, 노이즈의 크기에 따른 영향을 고찰하였다.

## 2. 모드기여계수 산정방법

### 2.1. 모드기여계수의 정의

그림 1과 같이 지반가속도를 받는 n층 전단구조물의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = -M\{1\} \ddot{x}_g \quad (1)$$

여기서, M, C, K 는 각각 구조물의 질량, 감쇠 강성행렬이며, {1}는 모든 원소가 1인 n차의 열 벡터, x는 구조물과 지반의 상대변위,  $\ddot{x}_g$ 는 지반가속도이다. 식 (1)를 식(2)와 같은 변환에 의해 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = \Phi \eta \quad (2)$$

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\eta} + \Phi^T C \Phi \dot{\eta} + \Phi^T K \Phi \eta = -\Phi^T M \{1\} \ddot{x}_g \quad (3)$$

여기서,  $\eta$ 는 모드일반화좌표,  $\phi$ 는 모드행렬이다. 모드분리에 의하여 각각의 모드는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = - \frac{\phi_i^T M \{1\}}{\phi_i^T M \phi_i} \ddot{x}_g \quad (4)$$

여기서,  $\phi_i$ ,  $\eta_i$ 는 각각  $i$  번째 모드벡터와 모드이다. 각 모드에 해당하는 모드기여계수는 식(4)로부터 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma_i = \frac{\phi_i^T M \{1\}}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (5)$$

식 (5)와 같이 MPF는 각층의 질량뿐만 아니라 고유벡터에도 영향을 받기 때문에 고유벡터를 정규화하는 방법에 따라 달라지는 것을 알 수 있다.

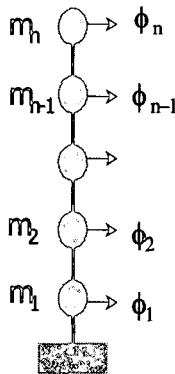


그림 1. 전단 구조물 모형

## 2.2 시스템 식별에 의한 모드기여계수산정

구조해석에 의하여 예측된 구조물의 진동수, 감쇠비, 고유벡터와 같은 동적특성은 실제 구조물이 완성된 후의 동적특성과 다르다. 유한요소모델과 같은 해석상의 가정에 의한 오차, 재료의 강도 및 시공상의 오차 등이 반영된 결과로, 시공완료 후 진동실험을 통하여 명확한 구조물의 동적특성을 파악하게 된다.

구조물의 질량은 단순한 적산등에 의하여 충분한 신뢰성을 가지고 예측될 수 있지만, MPF는 질량의 분포뿐만 아니라, 모드 벡터와 연관된 동적변수이므로 이에 대한 명확한 예측이 필요하다. 본 연구에서는 진동실험을 통한 시스템 식별기술을 이용하여 구조물의 MPF를 구하는 방법을 제시한다. 시스템 식별모형은 차수에 따라 고차모드를 포함한 전달함수를 제공한다. 그러므로 MPF를 구하기 위해서는 식별결과를 적절한 응축방법을 사용하여 단 자유도계시스템으로 응축하여 사용한다. 본 연구에서는 식별된 상태방정식을  $H_\infty$  최적모델 응축법을 사용하여 주된 관심대상이 되는 모드만을 구현하도록 하였다. 시스템 식별로부터 구한 상태방정식은 사용한 입력, 출력, 출력

에 첨가된 노이즈의 크기에 따라 영향을 받기 때문에, 이러한 요소가 구조물의 MPF산정에 미치는 영향을 고찰하였다.

시스템 식별로 구한 구조물의 상태방정식은 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다. 본 상태방정식은 고차의 전달함수를 가지는 시스템 식별 모형을  $H_\infty$  최적모델 응축법 이용하여 단자유도시스템이 구현(realization)된 것으로 가정한 것이다.

$$\dot{\bar{z}} = \bar{A}\bar{z} + \bar{B}u \quad (6,a)$$

$$y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \quad (6,b)$$

여기서,  $\bar{z}$  는  $2 \times 1$  벡터로 시스템의 상태변수이며,  $u, y$ 는 각각 구조물에 작용하는 단일 입력과 출력을 나타낸다.  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  는 시스템 식별로부터 구현된 시스템 행렬을 나타내며, 행렬의 차수는 각각  $2 \times 2, 2 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 1$  이다. 식 (6)과 같이 구현된 상태방정식은 입력  $u$  와 출력  $y$ 만의 관계만을 만족시키는 임의의 방정식이 가능하므로 이를 구성하는 시스템 행렬 또한 무수히 많은 값을 가진다. 그러므로 상태변수  $\bar{z}$ 는 특별한 물리적 의미를 가지지 않으며, 입력과 출력의 전달함수를 구성하는 매개체 역할을 한다. 그러나 상태변수가 물리적 의미를 가지는 상태방정식이 존재하며 그러한 상태방정식은 단자유도시스템을 상태방정식으로 변환하는 과정에서 얻을 수 있다. 식 (4)와 같이 모드공간으로 치환된 단 자유도계 시스템의 운동방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\Gamma_i \ddot{x}_g \quad (7)$$

식 (9)를 상태방정식으로 치환하여 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{z} = Az + Bu \quad (8 a,b)$$

$$y = Cz + Du$$

여기서,  $z = (\eta, \dot{\eta})^T$  이며  $u, y$  는 각각 외력과 구조물의 계측된 응답,  $A, B$ 는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -2\xi_1 \omega_1 \end{bmatrix} \quad (9a)$$

$$B = - [0 \quad \Gamma_1]^T \quad (9b)$$

행렬  $C, D$  는 계측된 응답의 종류에 따라 달라지는데, 여기에서는 계측된 응답(출력)이 변위와 가속도인 경우에 대하여  $C, D$ 를 나타내었다. 계측응답이 변위인 경우의 행렬  $C, D$ 는 다음과 같다.

$$C = [1 \quad 0], \quad D = 0 \quad (10)$$

또한, 계측응답이 가속도인 경우의 행렬  $C, D$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C = [-w_1^2 \quad -2\xi_1 w_1] \quad D = [\Gamma_1] \quad (11)$$

식 (8)은 상태변수가 구조물의 변위와 속도를 나타내는 물리적인 의미를 가진다. 또한 식 (9)의 상태방정식을 구성하는 시스템 행렬 A, B, C, D는 구조물의 질량, 감쇠, 강성으로 표현되는 전형적인 행렬로 표현할 수 있다. 그러므로 시스템 식별로부터 구한 상태방정식을 물리적 의미를 가지며 전형적인 시스템 행렬을 가지는 식(9)와 같은 상태방정식으로 변환하게 되면, 그로부터, 구조물의 기여계수를 구할 수 있다.

구조물의 응답이 가속도인 경우는 식 (11)과 같이 행렬 D가 MPF로 표현되어 곧바로 구할 수 있다. 또한, 식 (6)의 상태방정식에서 행렬  $\bar{D}$  는 변환행렬의 영향을 받지 않기 때문에 식 (11)의 행렬 D와 동일하다. 그러므로 구조물의 응답이 가속도인 경우에는 시스템 식별결과로 얻은 상태방정식의 행렬  $\bar{D}$ 로부터 구조물의 질량을 구할 수 있다. 하지만, 시스템 식별과정에서 행렬  $\bar{D}$ 는 많은 오차가 발생하므로, 실제 구조물의 질량을 제공하지 못하고 있다. 이러한 단점 때문에, 행렬  $\bar{D}$ 에 의하지 않고, 또 구조물의 응답이 가속도가 아닌 경우에도 구조물의 질량을 구하기 위해서는 더 일반적인 방법이 필요하다. 이를 위하여, 시스템 식별로 구한 상태방정식을 변환행렬 T를 이용하여 식 (8)과 같은 전형의 상태방정식 형태로 변환하여, 구조물의 질량을 구하는 방법을 고려해 볼 수 있다. 식 (6)의 상태변수  $\bar{z}$  는 변환행렬 T에 의하여 식 (8)의 상태변수 z로 변환된다고 가정하면, 다음과 같은 변환관계를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$z = T \bar{z} \quad (12)$$

식 (14)를 식(10)에 대입하면, 변환된 상태방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= T^{-1} A T \bar{z} + T^{-1} B u \\ y &= C T \bar{z} + D u \end{aligned} \quad (13a, b)$$

식 (13)은 변환행렬 T에 의해 변환된 것으로식 (6)과 같다고 가정하면, 시스템 행렬  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ 는 다음과 같이 변환행렬 T와 전형 상태방정식의 시스템 행렬 A, B, C, D로 나타낼 수 있다.

$$\bar{A} = T^{-1} A T, \quad \bar{B} = T^{-1} B, \quad \bar{C} = C T, \quad \bar{D} = D \quad (14)$$

식 (14)는 변환행렬 T에 의하여 임의의 형태로 식별된 시스템은 전형의 상태방정식으로 변환이 항상 가능하다는 것을 의미한다. 식 (14)를 이용하여 다음과 같은 가제어 행렬(controllability matrix) 행렬과 가관측 행렬(observability matrix)을 이용하여 유도할 수 있다.

$$[B, AB] = T [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}] \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \end{bmatrix} \quad (16)$$

식 (15)와 (16)에서 변환행렬 T를 구하고 등치한 후 정리하면 다음과 같다.

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A \end{bmatrix} [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}] \quad (17)$$

식 (17)의 우변에 있는 값은 식(10), (11)과 시스템 식별로부터 구한 시스템 행렬을 이용하여 구할 수 있는 값이다. 좌변의 값은 식 (9)와 같이 미지의 MPF에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[B, AB] = [B_o, AB_o] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Gamma_i \quad (18)$$

여기서,  $B_o = -[0 \ 1]^T$  이다. 식(18)을 식(17)에 대입하고 정리하면 MPF은 다음과 같다

$$\Gamma_i E = [B_o, AB_o]^{-1} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A \end{bmatrix} [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}] \quad (19)$$

여기서 E는 2x2의 단위행렬이다. 식 (19)에서  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  는 식별로부터 구할 수 있으며, A,  $B_o$ , C 또한 식별로부터 구한 구조물의 진동수와 감쇠비(  $w_o$ ,  $\xi_o$ )로 나타낼 수 있으므로 MPF를 구할 수 있다.

### 3. 모드기여계수 산정예제

본 장에서는 2장에서 기술한 MPF 산정방법을 예제구조물에 적용하여 제안된 MPF 산정방법을 검증하였다.

그림 2와 같은 1자유도계 시스템에 지진하중 F(t) (입력 u)이 작용한다고 가정한다. 외란은 EI Centro 지진 시간이력을 사용하였다. 수치해석에 사용된 외란의 특성 및 시스템의 질량, 진동수 및 감쇠비가 표 1에 나타나 있다. 시스템의 응답(출력 y)은 상대 변위와 가속도를 사용하였으며, 각각의 출력 종류에 따라 구현된 시스템 행렬(  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ )이 표 2에 나타나 있다. 시스템 행렬  $\bar{A}$  로부터 구한 진동수, 감쇠비는 거의 정확하게 일치하고 있으며, 식(19)를 이용하여 기여계수를 구한 결과 오차가 변위의 경우 0.26%, 가속도인 경우 2.2%로 가속도를 출력으로 사용하는 경우 약간 크게 나왔으나 거의 근접하게 실제 모드기여계수( = 1.00 )를 예측하고 있음을 알 수 있다.

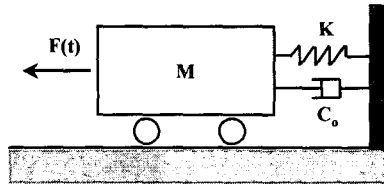


그림 2. 1자유도계 시스템 모델

구조물의 출력(변위, 가속도)에 노이즈가 첨가되는 경우, 노이즈의 크기가 구조물의 MPF 산정에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 수치해석을 수행하였다. 구조물의 출력은 가속도를 사용하였으며, 노이즈 RMS 크기는 가속도 RMS 크기의 20%까지의 백색잡음으로 가정하였다. 표 3은 가속도에 첨가되는 노이즈의 크기에 따른 MPF의 크기를 나타낸다. 수치해석결과를 보면, 노이즈의 크기와 관계없이 일정한 크기이하에서는 MPF을 충분한 신뢰성을 가지고 예측하나 일정 이상의 노이즈의 크기가 되면 MPF 예측이 불안정해지는 것을 알 수 있다. 노이즈의 크기는 가관측, 가제어 행렬의 안정성에 영향을 미치며, 그 결과 MPF 예측 시 그 크기에 따라 갑자기 불안정해지는 것을 알 수 있다.

표 1. 1자유도 시스템과 외란의 특성

구분	항목	사 양
구조물	계 계수	질량 : 1170 ton, 진동수 : 0.7 Hz, 감쇠비 : 0.5%
	정형의 시스템 행렬	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -19.3444 & -0.0440 \end{bmatrix} \quad B = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 변 위 : $C = [1 \ 0]$ 가속도 : $C = [-19.3444 \ -0.0440]$
외란	지진	El Centro 1940 NS
해석조건	시간간격	0.01 sec
	해석시간	50 sec

표2. 출력의 종류에 따른 MPF산정 결과

출 력	시스템 행렬	동적 특성		
변 위	$\bar{A} = \begin{bmatrix} 99.9134 & 100.0544 \\ -100.0101 & -99.9577 \end{bmatrix}$	MPF (오차)	진동수 (Hz)	감쇠비 (%)
	$\bar{B} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.1279 \\ -0.0427 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [1 \ 0]$			
가 속 도	$\bar{A} = \begin{bmatrix} 99.9135 & 100.0543 \\ -100.0102 & -99.9575 \end{bmatrix}$	MPF(오차)	진동수 (Hz)	감쇠비 (%)
	$\bar{B} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.2452 \\ 0.0818 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [1 \ 0]$			

표 3. 노이즈의 크기에 따른 MPF산정결과

노이즈의 크기 비율	MPF	오차
0%	1	-
7%	1	-
15%	1.001	0.1%
17%	1.0018	0.18%
18%	-3	unstable
20%	-3.7	unstable

## 4. 결 론

본 논문에서는 시스템식별을 통해 구조물의 MPF를 산정하는 방법을 제안하였다. 제안된 MPF 산정방법은 시스템 식별기법을 통하여 구현된 고차의 상태방정식을  $H_\infty$  최적응축기법을 이용하여 구조물의 응답에 가장 큰 영향을 미치는 단 자유도계 상태방정식으로 축소모형화 한 후, 정형화된 상태방정식과 응축된 상태방정식 사이의 가제어 행렬과 가관측 행렬의 변환관계를 이용하여 산정하는 방법이다.

본 연구에서 제안된 MPF 산정방법의 검증을 위하여 단 자유도계 시스템에 대한 수치해석을 수행하였다. 시스템 출력에 첨가되는 노이즈가 MPF에 미치는 영향을 평가한 결과 노이즈의 크기는 MPF에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 나타났지만 노이즈의 크기가 일정크기를 넘어서는 순간 MPF 예측이 불안정해지는 것을 알 수 있었다.

추후, 고층건물에 지진이 작용하는 경우 고차모드의 영향을 고찰하기 위한 MPF 산정에 대한 연구는 더 이루어져야 할 것으로 사료된다.

## 감사의 글

이 연구는 “건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁시행 한 2003년도 건설핵심 기술연구개발사업(03산학연C103A1040001-03A0204-00110)에 의한 것임”을 밝히며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Roy R. Craig, Jr (1981). Structural Dynamics, John Wiley & Sons, Inc. Publishers.
- (2) Ray W. Clough, Joseph Penzien (1975) Dynamics of Structure, McGraw-Hill.
- (3) Mario Paz, William Leigh (2004). Structural Dynamics : Theory and Computation. 5th Edition, Kluwer Academic Publishers.
- (4) D.J. Ewins (1986). Modal Testing : Theory and Practice. Bruel & Kjar Korea Ltd.
- (5) Jer-Nan Juang(1994). Applied System Identification. Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs.
- (6) Lennart Ljung (1987). System Identification : Theory for the User. Prentice Hall, Inc.
- (7) Julius S. Bendat(1990). Nonlinear System analysis and Identification from Random Data. John Wiley & Sons.
- (8) Karl J. Astrom, Bjorn Wittenmark (1995). Adaptive Control. 2nd Edition. Addison Welsley.
- (9) Lennart Ljung(2001). System Identification Toolbox for Use with MATLAB. The Math Works.
- (10) Chi-Tsong Chen (1984). Linear System Theory and Design. Holt-Saunders International Editions.
- (11) Michael Green, David J.N. Limebeer (1995). Linear Robust Control. Prentice Hall.