

상용 해석 소프트웨어를 이용한 접촉문제의 효과적 해석 및 최적 지지점

설계

A Study on efficient contact analysis and optimum support design using commercial analysis software

최 주 호* 원 준 호**
Choi Joo-Ho Won Jun-Ho

Abstract

In this study, an optimum support design problem is considered to minimize displacement of stacked plates under self weight condition. During the displacement analysis, several kinds of contact arise between the plates themselves and support bar. These can be easily considered if commercial analysis software, which provides capability to solve the contact problem, is used. It is found, however, that the computing time is extraordinarily long due possibly to the generality of the software and also to the ignorance of the control parameters used in the software. In this paper, the contact condition is imposed directly by the authors, while the software is used only to solve the ordinary displacement analysis problem. In this way, the computing time is decreased remarkably by more than 30 times, while yielding the same accurate results. Optimization is conducted based on this efficient analysis method to find minimum number of supporting bars using the response surface algorithm.

1. 서 론

접촉문제는 각종 구조물의 설계에서 많이 등장하는 것으로 두 개 이상의 물체가 접촉될 경우를 의미하는데, 접촉 여부, 접촉부의 응력, 변위 등이 미지량이기 때문에 비선형성을 가지며 해석시간이 많이 소요되거나 수렴이 잘 되지 않는 등의 문제가 있다. 이 중에서도 구조물을 적층하거나 지지물에 의해 지지하는 접촉문제는 원자로 설계, 복합재료 가공공정 등에서 흔히 발생하며, 이 경우 접촉현상을 잘 고려하여 최적의 지지조건을 찾는 것이 중요하다. 접촉문제는 단순 접촉과 미끄럼 마찰이 추가된 접촉 문제로 나뉘는데, 문제의 성격에 따라 단순접촉으로 간주하고 해석을 수행해도 무방한 경우가 많다.

본 연구에서 다루는 구조물의 지지문제도 이러한 단순접촉으로 간주하고 해석할 수 있는데, 이와 관련한 지금까지의 연구를 조사해 보았더니, 주로 소음 및 진동 특성을 고려한 최적의 접촉 지지조건을 구하는 것이 대부분이었고^{(1), (2)} 정적(static) 상태에서의 구조물 처짐 조건에 대한 연구는 거의 찾아 볼 수가 없었다. 본 논문에서는 이러한 정적 조건에서 적층된 구조물 및 외부 지지물 간의 복잡한 접촉현상을 유한요소법(Finite Element Method)을 이용하여 비교적 쉽게 해석하는 효과적인 방법을 개발하였다.⁽³⁾ 일반적으로 상용 해석

*정회원 · 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부, 교수

**한국항공대학교 항공우주 및 기계공학과, 대학원

소프트웨어에서는 대부분 이러한 접촉해석을 수행하는 기능을 제공하고 있으나, 이를 효과적으로 사용하기 위해서는 사용자가 여러 가지의 조건변수를 잘 이해하고 입력하지 않으면 수렴에 실패하거나 매우 긴 해석시간이 소요된다. 따라서 이를 위해 사용자는 여러 차례 시행착오를 거듭하면서 접촉해석의 경험을 축적하고 상당한 전문가가 되어야 한다. 게다가 상용 해석 소프트웨어에서는 여러 가지 접촉상황을 모두 고려해야 하므로 특정 상황의 접촉문제에 대해 매우 비효율적인 가능성이 많다. 본 연구에서도 이러한 문제점들이 발생하였는데, 비교적 단순하다고 여겨지는 정적 상태에서의 마찰이 없는 접촉문제 임에도 불구하고, 상용 소프트웨어의 접촉해석 요소를 사용한 결과 매우 긴 해석시간이 소요되었다. 본 연구의 목표는 최적의 접촉 지지조건을 구하는 것이므로, 이는 최적화 과정에서 이러한 접촉해석을 많이 반복하는 것을 의미한다. 따라서 본 연구에서는 이를 극복하기 위해 상용 해석 소프트웨어에서 제공하는 비선형 해석 알고리즘을 사용하지 않고 접촉면에 존재하는 요소(Element)들의 관계를 접촉조건을 이용한 간단한 관계식으로 정의함으로써 이러한 문제점을 획기적으로 해결하였다.

본 연구에서 대상으로 한 문제는 그림.1 과 같이 폭에 비해 매우 얇은 두께를 가진 요철판과 평판들이 차례대로 적층된 상태에서 높은 강성을 가진 지지봉(supporting bar) 격자에 의해 지지되어 여러 부위에서 접촉이 발생하는 문제이다. 지지격자를 구성하는 지지봉의 개수는 4~25 개 정도이며, 지지봉이 구조물을 지지하는 위치 및 개수에 따라 평판 구조물의 처짐은 큰 차이를 나타낸다. 따라서 특정 지지점에는 큰 하중이 걸리기도 하고, 구조물의 지지에 사용되지 않는 불필요한 지지점이 발생하기도 한다. 본 논문에서는 평판 구조물을 지지하는 지지격자의 효율적인 사용을 위해 지지점의 개수 및 위치를 설계변수로 하여, 모든 지지점이 사용되면서 처짐을 최소화 하는 지지점의 최소 개수와 위치를 찾고자 한다. 본 논문에서는 실제 구조물과 그 주변을 사실적으로 모델링 하기 위해 3 차원 모델을 구성하였고, 긴 시간과 많은 해석 횟수가 요구되는 구배(Gradient) 최적화 기법 대신 비교적 적은 횟수로 최적해를 찾는 반응표면 최적화 기법(Response Surface Optimization) 을 사용하여 최적화를 수행 하였다.^{(4),(5)} 해석과 최적화 수행을 위해 사용된 상용 소프트웨어는 ANSYS6.1⁽⁶⁾과 VisualDOC3.1⁽⁷⁾이다:

표.1 Gray Cast Iron ASTM20의 물성치

Modulus of Elasticity	66.0 [GPa]
Poisson's Ratio	0.29
Density	7.15×10^3 [kg/m ³]

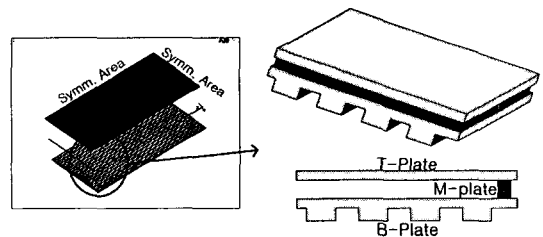


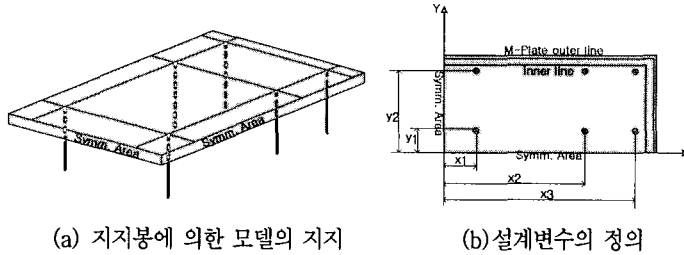
그림.1 적층 순서 및 단면 형상

2. 해석 문제의 정의

2.1. 해석 문제의 정의

본 연구에 사용된 구조물의 재질은 Standard Gray Cast Iron ASTM20이며 기계적인 성질은 표.1과 같다. 해석에 사용된 모델은 그림.1에서 나타내는 대칭조건에 의해 단순화된 1/4 모델로써 하부에 위치한 길이방향 요철이 있는 B-Plate, 중앙에 위치한 M-Plate와 상부의 평판 T-Plate가 순서대로 적층되어있다. 이 중에서 M-Plate는 판이라기 보다는 보와 같은 형상으로 B-Plate 주변을 따라 높여져, T-Plate와 B-Plate에 간극이 존재하도록 하는 역할을 한다. B-Plate와 M-Plate는 접합되어 있는 반면, T-Plate와 M-Plate는 단순 접촉되어 있다. 이러한 적층판은 그림.2(a)와 같이 지지격자 위에 놓여지게 되며 판들의 자중으로 인해 처짐이 발생한다. 이때 요철이 있는 B-Plate의 높은 강성에 비해 상대적으로 약한 T-Plate로 인해 일정 간극을 유지하던 T-Plate와 B-Plate에도 상호 접촉되는 현상이 발생한다. 따라서 본 문제에서는 T-Plate와 B-Plate 및 T-Plate와 M-Plate 사이에 각각 접촉을 고려해야 한다. 한편 모델을 받치고 있는 지지점들 역시 단순 접촉조건 하에 있으므로 지지봉과 B-Plate

사이에서 접촉이 고려되어야 하는데, 이로 인해 큰 하중이 걸리는 지지점이 발생하기도 하고, 들떠서 사용되지 않는 지지점이 발생하기도 한다.



(a) 지지봉에 의한 모델의 지지 (b) 설계변수의 정의

그림.2 모델의 지지 형태 및 설계변수의 정의

2.2. 목적함수와 설계변수의 설정

본 연구에서는 그림.2(b)와 같이 적층된 모델에 대해 되도록 지지봉의 개수를 적게 사용하면서 지지점 위치를 잘 조절하여 적층판의 처짐을 최소화하려 한다. 이를 위해 목적함수를 B-Plate 아랫면의 변위차(최대변위와 최소변위의 차이)로 정하여 이를 최소화하도록 문제를 정의하였고, 제한조건은 B-Plate 아랫면에 위치한 지지점에 발생하는 반력이 항상 0이 아닌 양(+)의 값을 갖도록 하였다. 그림.2(b)에서 보인 1/4 모델에서 xy평면의 원점이 전체 모델(full model)의 중심이며, 원점을 기준으로 각 축 방향 지지점의 거리와 지지점의 개수가 설계변수에 해당한다. 실제 최적화 수행에서는 주어진 x, y 방향의 지지점 개수 하에서 최적 지지점 위치를 구하였고, 이들 개수를 증가시켜가면서 최적화를 반복하였으며, 이 결과로부터 원하는 변위차 (예를 들어 0.01mm) 이하가 되기 위한 최소의 개수 조건과 해당 최적 위치를 선정하는 방식으로 진행하였다.

3. 유한요소해석

3.1. 유한요소의 생성

본 연구에서 사용되는 유한요소 모델은 첫째, 접촉문제를 효과적으로 해결하기 위해 본 연구에서 제시한 해석방법에 사용될 모델, 둘째는 앞의 결과의 비교 기준이 될 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석을 위한 유한요소 모델로 나누어진다. 접촉은 특성에 따라 두 가지를 고려하게 되는데, 하나는 B-Plate와 지지봉의 접촉이고 다른 하나는 T-Plate와 M-Plate 또는 B-Plate와의 접촉이다. 본 방법에 사용될 모델과 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석에 사용될 모델 모두 ANSYS 6.1에서 제공하는 육면체 요소인 Solid45를 이용하여 규격화된 요소 망인 맵메쉬(mapped mesh)를 그림.3과 같이 생성하였다.

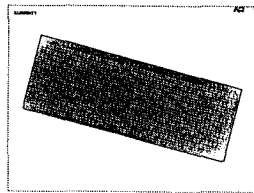


그림.3 유한요소 모델

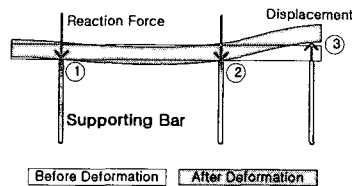


그림.4 지지봉의 접촉 상태

3.2. 지지 격자와의 접촉

앞서 설명했듯이 모델과 지지격자는 접촉되어 있기 때문에 상황에 따라 그림.4의 ①, ②와 같이 지지봉에 접촉되는 경우와 ③과 같이 분리되는 경우가 존재한다. 이를 고려하기 위해 지지봉은 변형이 없는 강체이고, B-Plate의

아랫면과 점 접촉을 한다고 가정 하였다. 그리고 ANSYS에서 제공하는 접촉요소를 활용하는 대신, 본 연구에서는 다음과 같은 접촉조건을 직접 고려하였다.

$$\begin{aligned} D \cdot Rf &= 0 \\ D &\geq 0 \\ Rf &\geq 0 \quad (D : displacement, Rf : reaction force) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 D 는 지지점에서 z 방향 변위를, Rf 는 지지봉에 의해 가해지는 반력을 의미하는데 반력이 양(+)이면 압축력을, 음(-)이면 인장력이 가해짐을 뜻한다. 이 식에 의하면 지지점에서 변위 D 는 지지봉으로의 관통을 막기 위해 항상 0 또는 양(+)이어야 하며, 반력 Rf 또한 접착(즉, 인장력 발생)을 막기 위해 항상 0 또는 양(+)이어야 한다. 또한 이들 두 변수는 같은 점에서 둘 중의 하나는 꼭 0이 되어야 하는 상보조건(complementarity condition)을 만족해야 한다. 실제 해석에서는 초기에 변위 D 가 모두 0이라는 조건에서 해석을 수행하고, 그 결과에서 식(1)조건을 이용하여 접촉여부를 체크한 후 새로운 변위조건을 생성하며, 모든 점에서 이 조건이 만족될 때까지 이를 반복한다. 여기서 변위가 0이면서 반력도 0인 경우가 발생하게 되면 이는 모델 지지에 사용되지 않는 지지점으로 간주한다. 이 방법은 사실상 ANSYS 접촉요소를 사용할 경우에도 동일하게 적용될 것으로 추정되는 방법이지만, 본 연구에서는 이를 직접 해석과정에 삽입하여 고려한 것이다.

3.3. T-Plate 와 M-Plate 및 B-Plate 의 접촉

지지봉에 의한 지지점 접촉과 더불어 고려해야 할 것이 T-Plate와 M-Plate사이의 접촉 및 T-Plate와 B-Plate사이의 접촉이다. 본 연구에서는 이를 위해 앞 절에서 설명한 지지봉과 B-Plate의 접촉과 유사한 방식으로 접촉조건을 직접 고려하였는데, 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (D_1 - D_2 + G) \cdot S_z &= 0 \\ D_1 - D_2 + G &\geq 0 \\ -S_z &\geq 0 \quad (D : displacement, G : initial gap, S_z : z-direction stress) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 D 는 각 모델의 접촉점에서의 z 방향 변위를, G 는 간극을, 그리고 S_z 는 접촉점에서의 z 방향 응력을 나타내는데 응력 부호가 양(+)이면 인장을, 음(-)이면 압축응력이 작용함을 뜻한다. 하첨자 1은 T-Plate를 나타내며, 2는 위치에 따라 B-Plate 또는 M-Plate를 나타낸다. 따라서 간극 G 는 T-Plate와 B-Plate간의 접촉에서는 두 판간의 실제 간극 크기인 M-Plate의 높이를 나타내는 반면, T-Plate와 M-Plate사이에서는 0이 된다. 이때 두 Plate 간 간격차 는 $D_1 - D_2 + G$ 로 표현되며, 이것이 0 또는 양(+)이어야 관통이 일어나지 않는다. 응력 S_z 역시 0 또는 음(-)이어야 접착이 발생하지 않는다. 그리고 이 두 변수는 상보조건, 즉 둘 중 하나는 꼭 0이어야 하는 조건을 만족해야 한다. 실제 해석에서는 앞의 경우와 마찬가지로 처음에는 모든 변위차가 양, 즉 두 판이 서로 떨어져 있다는 가정하에 해석을 실시한다. 해석 결과 각 접촉점에서 식(2)를 만족하는 지를 체크하는데, 그 결과 변위가 관통했으면 여기에는 접착조건을 부여하고, 접착했을 경우 인장응력이 발생했으면 여기에는 다시 분리조건을 부여한다. 이러한 과정을 반복하여 모든 점에서 식(2)가 만족될 때 까지 수행한다.

3.3. 전체적인 해석과정

이러한 반복 해석과정을 그림.5에 나타내었다. 본 문제에서는 두가지 접촉조건을 고려하고 있는데, 이들을 한꺼번에 같이 고려하면 두 조건을 모두 만족하기 위해 반복해석 횟수가 매우 많이 발생하는 문제가 있었다. 따라서 본 연구에서는 이를 두 단계로 나누어 고려하였다. 첫 단계는 그림.5에서 보인 Inner LOOP 단계로서 Plate와 Plate 간의 접촉조건을 고려한 해석이며, 식(2)를 만족할 때 까지 반복해석을 함을 보이고 있고, 다음 단계는 Outer LOOP 단계로서 지지봉과 B-Plate간의 접촉해석으로서 식(1)을 만족할 때 까지 반복해석을 한다.

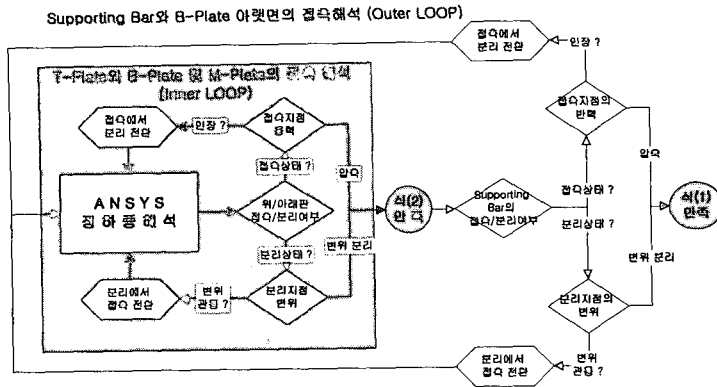


그림.5 본 연구에서 제시한 해석방법의 순서도

3.3. ANSYS 접촉해석

ANSYS 접촉요소를 이용한 해석 방법에서는 T-Plate와 B-Plate 또는 M-Plate와의 접촉을 고려하기 위해 그림.6과 같이 T-Plate 아랫면에 3차원 접촉 요소인 conta173을, M-Plate와 B-Plate 윗면에는 3차원 target170요소를 적용하였다. 그리고 B-Plate와 지지봉간의 접촉에는 접촉요소를 사용하는 대신 본 연구에서 사용한 방법을 이용하였다. 이는 ANSYS 접촉해석의 목적이 본 연구의 방법과의 차이를 보이기 위함이며, 따라서 모든 접촉 대상 부위에 접촉요소를 적용할 필요가 없기 때문이다. 이 과정 역시 그림으로 나타내면 그림.7과 같다.

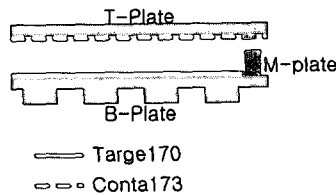


그림.6 ANSYS접촉 요소를 이용한 해석 방법에 사용된 각 부위별 접촉요소

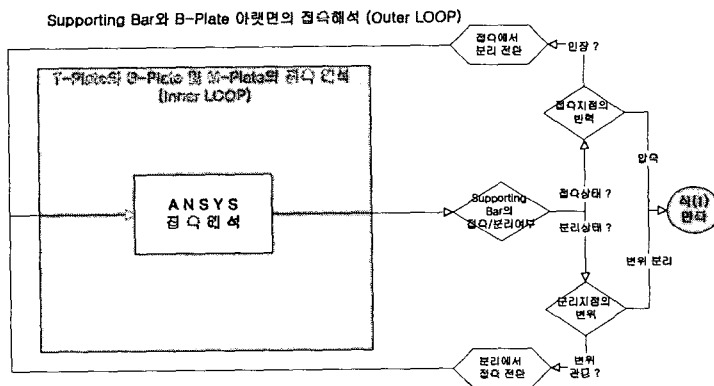


그림.7 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석방법의 순서도

3.5. 해석결과

본 연구에서 제시한 방법에 의해 반복 해석을 수행하였다. 실제 해석에서는 수렴 여부 체크를 위해서는 모든 해당 접촉점에서 접촉조건 (1) 및 (2)의 만족하는지 여부를 체크하거나 전회의 해석결과와 금회의 해석결과 차이가 거의 없으면 종료하는 것으로 하였다. 이때 오차는 1×10^{-6} 이다.

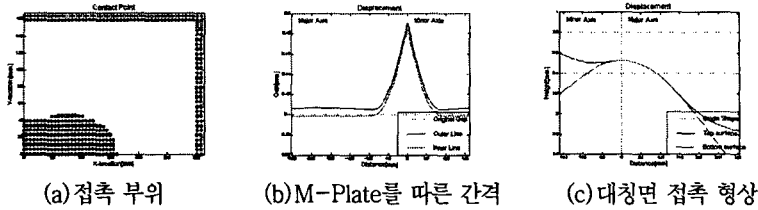


그림.8 본 방법을 이용한 해석 결과(지지점의 수=1)

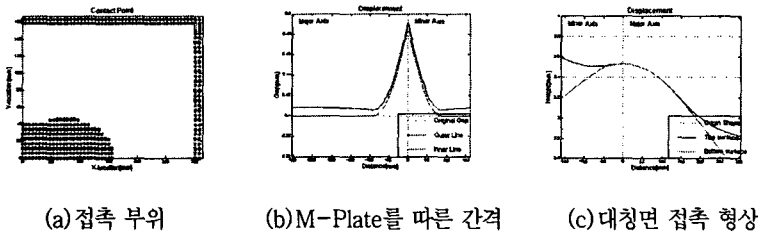


그림.9 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석 결과(지지점의 수=1)

본 방법과 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석방법의 결과 오차를 비교하기 위해 1/4 모델을 기준으로 하여 지지봉이 1 개인 경우와 x, y 방향 각각 3, 2 개씩 6 개의 지지봉이 모델을 지지할 경우 두 가지에 대해 해석을 수행하고 결과를 비교하였다. 그림.8 과 그림.9 의 (a)는 각각, T-Plate 와 B-Plate 의 접촉 및 M-Plate 의 접촉 부위를, (b)는 M-Plate 안쪽과 바깥쪽에 위치한 T-Plate 와 B-Plate 의 간격을, (c)는 대칭면의 변형 형상을 나타낸 것으로 단축방향 접촉부에 부분적인 오차가 발생하지만 본 방법과 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석 방법의 결과가 유사한 것으로 나타났다. 표.2 는 각 부위별 변위와 응력 및 해석 소요 시간을 나타낸 것으로 지지봉 의 개수에 관계없이 본 방법과 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석방법의 결과가 매우 흡사하다. 그러나 해석 시간은 34 배 및 24 배로 아주 큰 차이를 보이고 있다.

표.2 본 방법과 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석 방법의 결과

		B-Plate의 변위[mm]		T-Plate의 변위[mm]		응력 S1[MPa]		Analysis Time[sec]
		최대	최소	최대	최소	최대	최소	
Supporting Bar의 개수 = 1 nx=1, ny=1	ANSYS	0.1264	-1.1931	-0.1931	-1.1205	-0.5335	1.0000	5838
	본 방법	0.1300	-1.2097	-0.2020	-1.1368	-0.5208	1.0078	171
	ratio(%)	102.8639	101.3913	104.5826	101.4583	97.6252	100.7750	34.14
Supporting Bar의 개수 = 6 nx=3, ny=2	ANSYS	0.0022	-0.0095	0.0676	-0.4068	-0.1966	0.0771	6191
	본 방법	0.0021	-0.0095	0.0684	-0.4081	-0.1968	0.0779	258
	ratio(%)	98.1651	99.7899	101.1988	100.3664	100.0712	101.0248	24.00

4. 최적화 수행

4.1. 본 방법과 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석의 최적화 비교

3절에서 시행한 본 방법과 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석방법의 오차가 거의 없었기 때문에 최적화 역시 동일한 결과가 나올 것이라는 것을 쉽게 예측할 수 있지만, 검증에 위해 동일한 초기 조건하에 최적화를 수행하였다. 그 결과 목적함수와 설계변수의 수렴이력을 그림.10에 보였는데, ANSYS 접촉 해석에 의한 최적화 역시 거의 동일한 수렴이력을 보였다. 최적해에서의 접촉해석 결과는 본방법의 해석결과를 그림. 11에 나타내었고, ANSYS 접촉해석 결과 역시 본 방법과 거의 동일해서 표.3을 통해서만 나타내었다. 그러나 이러한 결과를 얻기 까지 소요한 시간은 큰 차이를 보이고 있다. 본 방법을 이용하여 최적화 하는데 소요된 시간은 3100sec로 약 50분 정도인 반면, ANSYS 접촉요소를 이용한 해석방법의 경우는 89933sec로 약 25시간이 걸렸다. 차이는 30배 정도로 3절에서 볼 수 있었던 시간차이를 어느 정도 유지하고 있다. 위 결과는 동일한 컴퓨터를 이용하여 동일한 조건하에 최적화 수행 시 나온 결과이다.

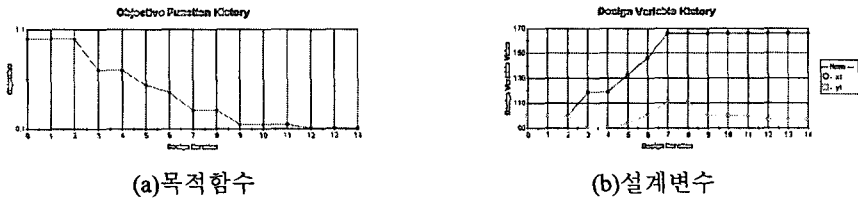


그림.10 목적함수 및 설계변수의 수렴과정

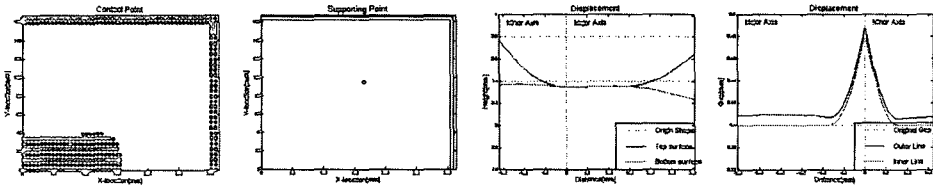


그림.11 본 방법을 이용한 최적화결과(지지점의 수=1)

표.3 최적화 결과(지지점=1)

	변위차[mm] (B-Plate)	x-location [mm]	y-location [mm]	Analysis Time[sec]
ANSYS	0.1674	164.1040	95.1270	89933
본 방법	0.1666	164.2276	95.1737	3098
ratio(%)	99.5021	100.0753	100.0491	29.0307

4.2. 최적화 수행

앞의 과정들을 통해 본 연구에서 제시한 해석 방법이 ANSYS 접촉요소를 이용한 해석에 비해 더욱 효율적으로 동일한 결과를 구할 수 있다는 결론을 얻었고, 이를 이용해 지지점의 개수 변화에 따라 변위차를 최소화하기 위한 최적화를 반복적으로 실시하였고, 그 결과를 표.4에 보였다. 여기서 장축 및 단축 방향 지지점의 수는 1/4모델이 아닌 전체 모델을 기준으로 표기할 것이다. 그림.12는 표.4의 결과를 contour로 표현한 것으로 y방향보다 x방향

표4 각 방향 지지점 증가에 따른 변위차의 최적값

B-Plate의 변위차[mm]		장축 방향 지지 점의 수 (full model 기준) [개]			
		2	3	4	5
단축 방향	2	0.1666	0.0676	0.0489	0.0490
	3	0.0940	0.0227	0.0145	0.0089
지지 점의 수 (full model)	4	0.0728	0.0153	0.0111	0.0061
	5	0.0678	0.0149	0.0101	0.0047

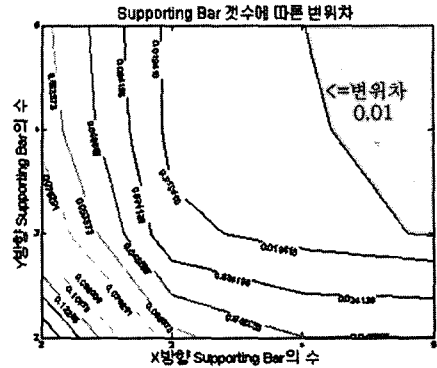


그림.12 지지점 증가에 따른 변위차 Contour

지지점 증가에 따른 변위차의 변화 폭이 더욱 큰 경향을 보였다. 또한 x, y 방향 각각 3, 4개로 12개의 지지봉 사용과 y방향 지지봉 증가로 15개의 지지봉이 사용된 경우와 같이 특정 개수 이상에서 한 방향의 지지봉 개수 증가는 변위차에 영향을 미치지 못한다는 것도 쉽게 알 수 있다. 만일 변위차를 0.01이하로 줄이기 위해 사용하게 될 최소 지지봉의 사용 개수는 x방향 5, y방향 3개로 15개가 된다.

5. 토의 및 결론

서론에서 언급했듯이 접촉문제는 일반적으로 비선형성을 가지며 반복 해석을 통해 접촉 조건을 찾아야 하며, 본 연구에서 예를 든 ANSYS와 같은 상용 해석 소프트웨어에서는 이러한 과정을 사용자가 좀 더 간편하게 사용할 수 있도록 제공해 주고 있다. 그러나 상용 소프트웨어에서는 여러 가지 접촉 상황을 다 고려해야 하기 때문에 이번 연구에서 다른 마찰이 없는 정적 상태에서의 접촉문제와 같이 간단한 문제의 경우 오히려 비효율적이었다. 그래서 본 연구에서는 상용 해석 소프트웨어에서 제공하는 알고리즘을 사용하지 않고 접촉의 조건을 이용한 간단한 관계식으로 정의함으로써 동일한 결과를 구하는데 30배에 달하는 시간의 절감을 이루었고, 이를 이용해 지지점 수에 따른 변위차의 최소 값 및 그 위치를 구할 수 있었다.

참고 문헌

1. 최명환, 강홍석, 윤경호, 김형규, 송기남, “지지격자로 지지된 모의 연료봉의 진동 특성,” 대한 기계학회 논문집 A권, 제 27권 제3호, 2003, pp.424~431
2. 류충현, 이영신, “기본 진동수 최대화를 위한 지지점의 최적 위치에 관한 연구,” 한국 소음 진동 공학회 춘계학술대회 논문집, 2002, pp.818 ~823
3. Bathe, Finite Element Procedures, Prentice-Hall Inc., 1996, pp. 754~754
4. Belegundu A. D. and Chandrupatla T. R., Optimization Concepts and Applications in Engineering, Prentice-Hall Inc, 1999, 11, pp. 141-157
5. Raymond H. M. and Douglas C. M., “Response Surface Methodology,” John Willey & Sons, Inc
6. ANSYS Structural Analysis Guide Release 6.1, Inc. 2002.
7. VisualDoc Theoretical Manual, Vanderplaats Research & Development, Inc