

균열문제에 적용된 확장유한요소법  
The extended finite element method applied to crack problems

지 광 습\*  
Zi, Goangseup

---

ABSTRACT

The extended finite element scheme applied to crack problems is reviewed in this paper. As the enrichments of the solution space and the basic formulation are discussed, several examples of the application of the method are given. The examples include a LEFM crack, a cohesive crack, multiple LEFM cracks and dynamic crack propagation problems. It is shown that the extended finite element method is one of the powerful tools to study crack problems.

---

1. 서 론

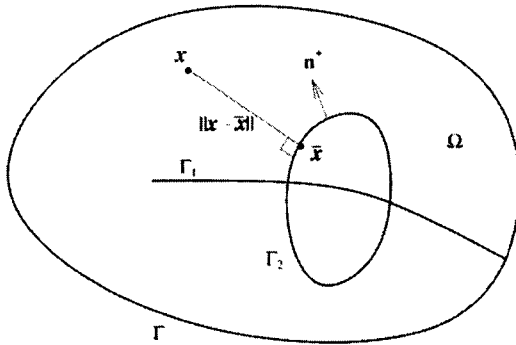
전통적인 유한요소법을 이용하여 균열성장을 해석할 때 가장 까다로운 부분중 하나는 바로 균열이 성장함에 따라 발생하는 요소망 재구성이다. 이 요소망 재구성은 그 계산비용이 상당할 뿐만 아니라 서로 다른 요소망 간의 변수값들을 투영(Projection)해야 하기 때문에 해의 정도 및 후처리과정에도 큰 영향을 끼치게 된다. 이와같은 요소망 재구성에 관한 문제는 EFGM<sup>(1,2)</sup>과 같은 무요소법이나 확장유한요소법을 사용함으로써 해결될 수 있다. 이 중 확장유한요소법의 구조는 기존 유한요소법과 잘 일치한다는 점에서 주목을 받고 있다.

확장유한요소법에서는 변위계의 일부를 국부적으로 적용된 단위분할 원리<sup>(3,4)</sup>에 따라 불연속 함수로 근사한다<sup>(5)</sup>. 그러므로 확장유한요소법에서는 변위계가 불연속이 없는 일반유한요소법의 해의 공간과 균열로 인한 불연속을 나타내는 확장된 변위계의 합으로 표현된다. 이에 대한 공학적인 의미부여는 참고문헌<sup>(6)</sup>에서 찾아볼 수 있다.

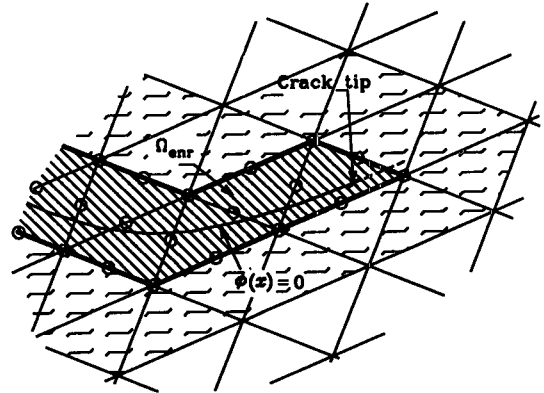
확장유한요소법은 2차원 정적 선형탄성파괴역학 문제를 대상으로 개발<sup>(5)</sup>되었다. 이 때 변위계는 선형탄성균열 끝의 점근변위계를 이용하여 확장되었다. 그 후 이 기법은 모드 II 균열<sup>(7,8)</sup>, 합성재료의 박리균열<sup>(9)</sup>, 균열상호간의 연결 및 분기<sup>(8,10,11)</sup>, 다중균열<sup>(8,12,13)</sup>, 삼차원 균열<sup>(14)</sup>, 마이크로역학<sup>(15)</sup>, 점성균열모델<sup>(16-18)</sup>, 재료의 불연속 및 합입<sup>(8,19)</sup>, 동적 균열성장<sup>(20-22)</sup>, 다중피로균열<sup>(12)</sup>, 유체역학<sup>(23)</sup>, 형상최적화<sup>(24)</sup> 등의 다양한 분야에 확대응용이 되고 있다. 본 논문에서는 이 중에서 균열문제에 적용된 확장유한요소법을 본 연구자의 최근 연구성과를 중심으로 소개하고자 한다.

---

\* 정희원 · 고려대학교 사회환경시스템공학과 조교수



(a)



(b)

그림 1. (a) 불연속면을 포함한 영역  $\Omega$ 과 (b) 해당요소망. 여기서 빗금친 부분은 확장된 영역  $\Omega_{enr}$ 이고, 물결무늬로 표시된 요소는 확장된 변위계와 그렇지 않은 변위계가 혼재한다.

## 2. 균열로 인한 불연속변위의 근사

그림 1a에는 경계  $\Gamma$ 를 가지는 영역  $\Omega$ 가 도시되어 있다. 이 영역의 변위  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 는  $\Gamma_\alpha$ 로 표시되는 균열면에서는 불연속이 된다. 즉, 다시 말하면 균열이 열리기 때문에 균열면에서 변위는 갑자기 변하게 된다. 여기서  $\alpha$ 는 1에서  $m$ 까지의 정수를 가지며, 각 균열의 번호를 나타낸다. 확장유한요소법에서는 변위계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) [\mathbf{u}_I + \mathbf{a}_I \psi_I(\mathbf{x})] \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{u}_I$ 는 절점 값,  $\mathbf{a}_I$ 는 확장함수 (enrichment function)  $\psi(\mathbf{x})$ 에 해당하는 첨가된 자유도이다. 해당 불연속면의 특성은 확장함수  $\psi(\mathbf{x})$ 에 내재되어 있다. 예를 들면, 균열의 경우는 함수 값의 불연속, 재료의 불연속인 경우는 함수의 미분이 불연속인 함수를 사용하게 된다. 이 확장함수를 유한요소법의 보간법에 따라 형상함수를 이용하여 보간한다. 여기서, 식 (1)을 전개하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_e \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_0 = \sum_I N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_e = \sum_J N_J \mathbf{a}_J \psi_J(\mathbf{x}) \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_e =$  각각, 연속변위, 불연속변위이다. 식 (3)과 (4)에서 확장함수를 보간하는 형상함수는, 연속변위의 형상함수와 같을 필요가 없다<sup>(23,25)</sup>. 가령 예를 들면 연속변위에서는 2차 형상함수를 쓰고, 확장함수에서는 1차 형상함수를 사용할 수도 있다<sup>(23)</sup>. 이와 같은 구성은 재료의 불연속을 모델할 때 발생하는 오차를 줄여준다<sup>(23,26)</sup>.

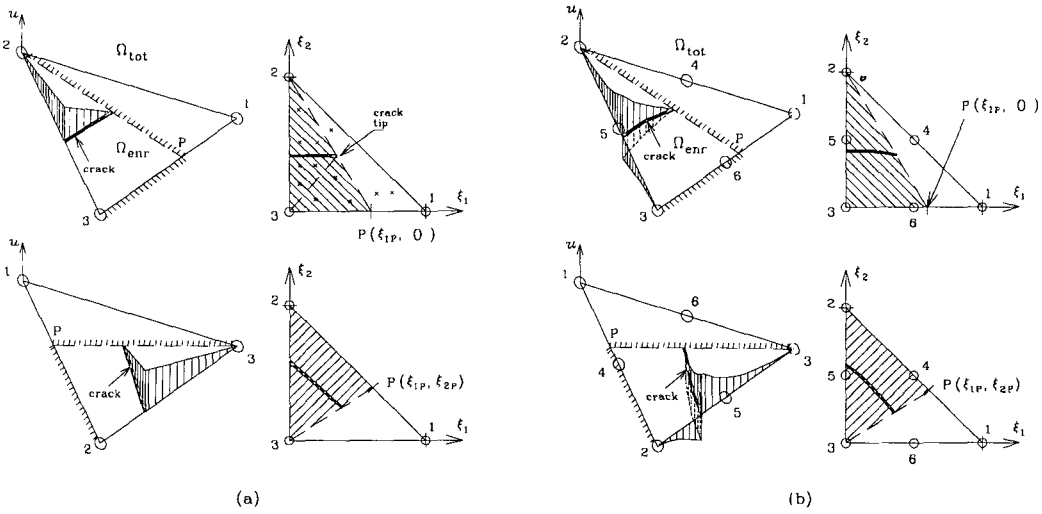


그림 2. 점성균열끝의 확장변위계: (a) 1차 삼각형 요소와 (b) 2차 삼각형 요소.

식 (4)는 단일 균열이 존재할 때 적용되는 식이며, 다중균열이 존재하는 경우는 다음과 같이 일반화시킬 수 있다.

$$\mathbf{u}_e = \sum_{J \in E} \mathbf{u}^{J,e} \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_e = \sum_{I \in M_j} N_I \psi_I^J(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I^{J,e} \quad (6)$$

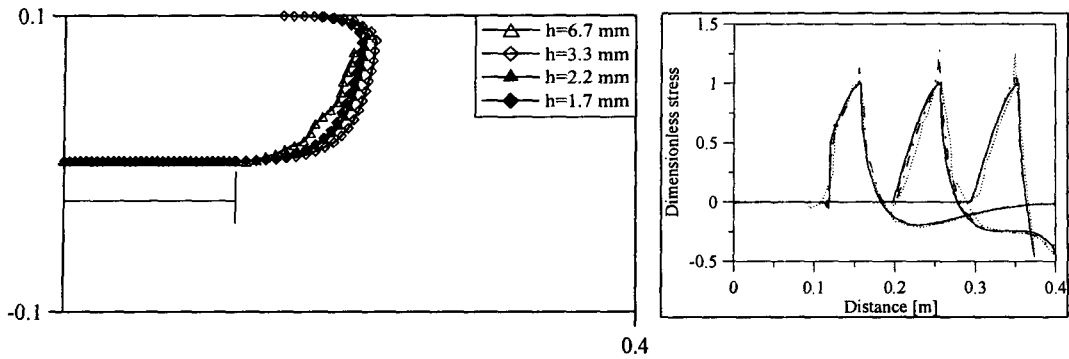
여기서  $E$  = 모든 균열을 나타내는 집합,  $\mathbf{u}^{J,e}$  = 균열  $J$ 로 인해 발생하는 불연속변위,  $M_j$  = 균열  $J$ 의 불연속 변위를 보간하기 위해 필요한 모든 절점,  $\psi_I^J(\mathbf{x})$  = 균열  $J$ 의 불연속 변위를 모델하기 위해 도입된 확장함수,  $\mathbf{a}_I^{J,e}$  = 균열  $J$ 의 불연속 변위 때문에 도입된 추가의 자유도이다.

최근에 개발된 확장유한요소법에서는 균열의 위치를 나타내기 위해 레벨셀 함수  $\phi(\mathbf{x})$ 을 이용한다<sup>(27,28)</sup>. 레벨셀은 도메인 상의 어느 한 점  $\mathbf{x}$ 에서 균열까지의 최단거리를 의미하며, 이 거리에 균열좌우에 서로 다른 부호를 붙여서 사용한다. 물론, 레벨셀의 사용이 필수적이지는 않으나, 이를 이용하면 균열의 위치를 직접적으로 기술할 필요가 없기 때문에 해석의 편이성을 크게 증대시켜 준다.

균열  $\alpha$ 가 요소를 완전히 관통한 경우의 확장함수는 레벨셀 함수의 부호를 취한 계단함수를 이용할 수 있으며, 다음과 같다.

$$\psi_I(\mathbf{x}) = \text{sign } \phi(\mathbf{x}) - \text{sign } \phi(\mathbf{x}_I) \quad (7)$$

식 (7)의 오른쪽 두 번째 항은 절점  $I$ 의 좌표 값에 따라 고정되는 상수항이며, 그림 1b의 물결무늬로 표시되어 있는 확장함수가 부분적으로 존재하는 영역의 확장함수가 실질적으로 0이 되게 만들어서, 빗금친 영역에서만 확장함수가 적용되게 하며 각 절점의 변위는  $\mathbf{u}_I$ 와 같게 된다.



(a) (b)

그림 3. 점성균열 모델과 확장유한요소법을 이용한 DCB 시편의 해석 (왼쪽: 서로 다른 요소망에 따른 균열 진전경로, 오른쪽: 균열 진전경로의 응력분포).

선형탄성 균열의 경우는 균열 끝에서 응력이 무한대가 되고, 요소가 부분적으로 잘려 있으므로 식 (7) 만으로는 부족하며, 정도를 높이기 위해 균열 끝을 포함하는 요소에서 선형탄성균열의 해석체인 Westergaard의 해를 기본으로 하는 다음과 같은 4개 함수를 이용한 확장함수를 추가적으로 사용한다.

$$\psi_I(x) = \sqrt{r} \times \left[ \sin \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (8)$$

여기서  $r$  = 균열끝에서부터  $x$ 까지의 거리,  $\theta$  = 균열끝 좌표계에서 측정된 각도이다. 그림 1b에서 균열끝을 포함하고 있는 요소에 있는 6개 절점은 식 (8)를 이용하여 해의 공간이 확장된다. 여기서 식 (7)과 같이 확장함수의 절점값을 식 (8)에서 빼주면 절점에서는 확장된 변위계가 0이 되어 절점 변위는  $u_I$ 와 같다. 하지만, 확장함수 자체가 비선형이기 때문에 그림 1b의 물결무늬 영역에서 확장변위는 완전히 없어지지 않으며, 이 부분에서는 단위분할의 원리가 만족되지 않는다. 이로 인한 오차를 저감시키기 위해  $u_0$ 의 보간을 위해서는 2차 보간함수,  $u_e$ 는 1차 보간함수를 섞어서 사용한다<sup>(4)</sup>.

점성균열의 경우는 균열 끝에서 응력이 재료의 인장강도와 같으므로 식 (8)을 사용할 수 없으며, 식 (7)을 균열끝의 위치와 맞추어서 투영한 확장함수를 사용한다<sup>(16)</sup>. 그림 2에 이 확장함수를 이용해서 표현된 1차 및 2차 삼각형 요소의 불연속 변위계가 도시되었다.

### 3. 적용 예

#### 3.1 점성균열모델

그림 3에는 파괴시험 시편으로 빈번히 사용되는 DCB 시편을 점성균열 모델과 확장유한요소법을 이용하여 수치해석하였다<sup>(16)</sup>. 균열면을 제외하고는 선형탄성재료를 사용하였다. 그림 3b에는 균열 진전경로가 미리 직선으로 주어진 경우 확장유한요소법에 의해 구한 응력분포를 PBI (Pseudo Boundary Integral) 법<sup>(29)</sup>에 의해 구한 응력분포(두꺼운 실선)와 세 개의 다른 요소망( $h = 1.7, 2.2, 3.3$  mm)의 경우를 비교하였다.

$h=1.7$  mm인 경우는 완전히 일치하여 그 차이를 찾아볼 수가 없었다. 그림 3a에는 균열 경로의 불안정성 때문에 직선으로 성장하지 못하고, 휘어지는 현상을 모사하였으며, 역시 요소망이 세분화됨에 따라 진전경로가 수렴하였다.

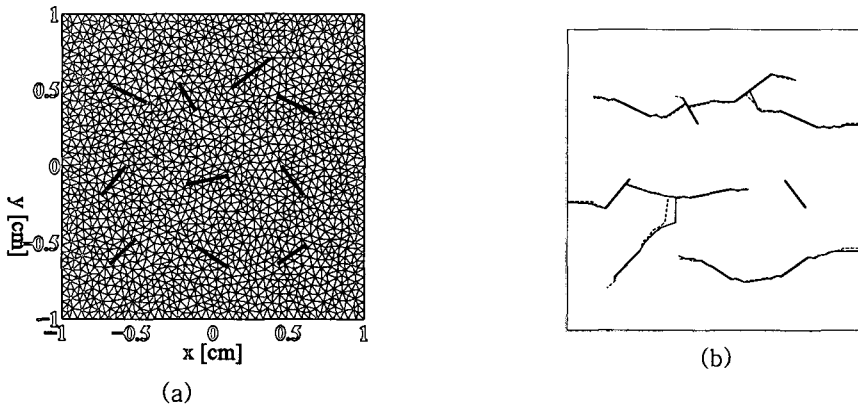


그림 4. 피로로 인한 10개의 균열이 있는 판의 균열성장해석; 여기서 (a)는  $h=0.05$  cm의 요소망과 초기 균열들, (b)는 균열성장 패턴인데, 점선은 같은 문제를 규칙적으로 구성된 요소망을 사용한 경우의 균열성장 패턴이다.

### 3.2 다중균열이 존재하는 2차원 판의 피로거동

그림 4와 같이 다중균열이 존재하는 경우는 식 (6)과 같이 일반성을 가지는 확장변위계가 사용된다. 이 문제에서는 10개의 초기 선형탄성균열로부터 성장하는 피로균열을 대상으로 하였다<sup>(12)</sup>. 피로 성장량을 결정하기 위해 Paris 법칙을 사용하였다. 그림 4b에 도시된 바와 같이 작은 균열이 합쳐져서 큰 균열을 형성하기 때문에 이를 위해 기존 방법에 비해 간단한 확장함수를 새로 개발하였다. 3.1절의 문제와 마찬가지로 요소 수를 증가시키에 따라 균열성장 패턴이 수렴하는 것을 확인하였으며, 그림 4b에 도시된 바와 같이 서로 다른 요소망에서도 만족스러운 일치도를 나타냈다.

### 3.3 동적 균열성장

정적인 균열 뿐 만 아니라, 확장유한요소법을 동적 균열진전 문제에 적용한 바 있다. 그림 5는 Kalthoff의 시험결과<sup>(30)</sup> 중 모드 I 균열성장을 모사하기 위해, 균열면에는 점성균열모델, 그 외 부분에서는 손상모델을 그 구성방정식으로 채택하고, 확장유한요소법으로 동적인 균열성장을 모사하였다<sup>(22)</sup>. 이 연구에서는 균열문제를 localization으로 정의하고 재료구성방정식이 hyperbolicity를 잃는 부분을 점성균열의 끝으로 정의하였다. 균열의 성장방향도 hyperbolicity 조건에 의해 자동으로 결정된다. 서로 다른 요소망을 사용하여 해석한 결과 균열의 성장방향은 요소망의 차이에 크게 영향받지 않았다. 이 문제는 Xu와 Needleman의 모델<sup>(31)</sup>로도 접근할 수 있으며 해석결과 요소망에 따라 균열 성장경로가 크게 영향을 받았다. 확장유한요소법을 동적인 탄성균열 성장문제에도 성공적으로 적용한 바 있다<sup>(32)</sup>.

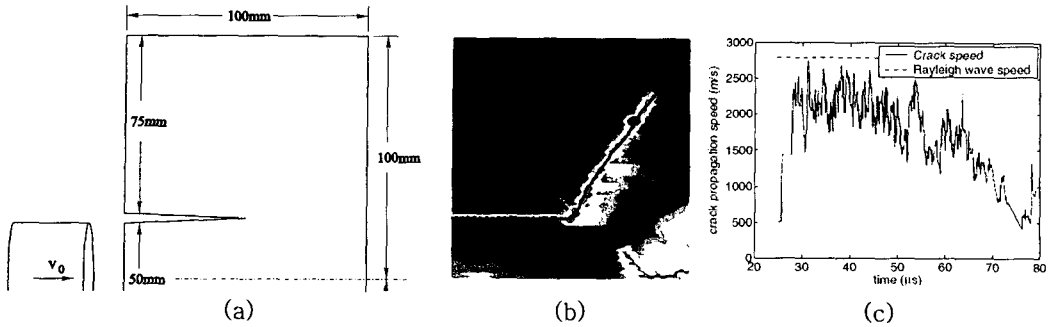


그림 5. Kalthoff 시험<sup>(31)</sup>중 모드 I 파괴 패턴의 모사; (a) 시험체의 형상, (b) 균열의 성장경로 (검은 실선) 및 손상(붉은 영역), (c) 균열의 진행속도.

#### 4. 결론

균열문제에 적용된 확장유한요소법의 유용성에 대해 논의하였다. 본 논문에서는 정적, 동적, 탄성, 비탄성의 다양한 균열문제에 확장유한요소법이 성공적으로 적용된 예를 보였다. 확장유한요소법에서는 불연속면, 즉, 균열이 요소망에 크게 영향 받지 않고 성장할 수 있으므로 요소망 재구성이 필요없거나 최소화된다. 본 논문에서는 균열문제만을 대상으로 하였지만, 불연속면 때문에 발생하는 내부 경계조건이 존재하는 거의 모든 종류의 문제에 이 기법이 잘 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

#### 감사의 글

본 논문은 고려대학교 2004년 교내 특별연구비의 지원을 받았습니다.

#### 참고문헌

- [1] Belytschko, T., and Krongauz Y., Organ, D., Fleming, M., and Krysl, P. (1996). Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139: 3-47.
- [2] Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2): 229-256.
- [3] Melenk, J. M., and Babuska, I. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory and application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139: 289-314.
- [4] Chessa, J., Wang, H., Belytschko, T. (2003). On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(7): 1015-1038.
- [5] Belytschko, T., and Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601-620.
- [6] Moes, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth

- without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131-150.
- [7] Dolbow, J., Moes, N., and Belytschko, T. (2000). An extended finite element method for modeling crack growth with friction contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(51-52): 6825-6846.
- [8] Belytschko, T., Moes, N., Usui, S., and Parimi, C. (2001). Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4): 993-1013.
- [9] Wells, G. N., de Borst, R., Sluys, L. J. (2002). A consistent geometrically non-linear approach for delamination. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(9): 1333-1355.
- [10] Daux, C., Moes, N., Dolbow, J., Sukumar, N., and Belytschko, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48: 1741-1760.
- [11] Bellec, J., and Dolbow, J. E. (2003). A note on enrichment functions for modelling crack nucleation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 19: 921-932.
- [12] Zi, G., Song, J.-H., Budyn, E., Lee, S.-H., and Belytschko, T. (2004). A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*", 12: 901-915.
- [13] Budyn, E., Zi, G., and Belytschko, T. (2004). Multiple crack growth in unit cell with extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press.
- [14] Sukumar, N., Moes, N., Moran, B., and Belytschko, T. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48(11):1549-1570.
- [15] Sukumar, N., Srolovitz, D. J., Baker, T. J., and Preevost, J.-H. (2003). Brittle fracture in polycrystalline microstructures with the extended finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56: 2015-2037.
- [16] Zi, G., and Belytschko, T. (2003). New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57: 2221-2240.
- [17] Moes, N., and Belytschko, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7): 813-833.
- [18] Wells, G. N., and Sluys, L. J. (2001). A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12): 2667-2682.
- [19] Sukumar, N., Chopp, D. L., Moes, N., and Belytschko, T. (2000). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47): 6183-6200.

- [20] Chen, H. (2003). *Enriched finite element methods and its applications*. Ph.D. Thesis, Northwestern University.
- [21] Zi, G., Chen, H., Xu, J., and Belytschko, T. (2003). The extended finite element method for dynamic fractures. *Shock and Vibration*, submitted.
- [22] Belytschko, T., Chen, H., Xu, J., and Zi, G. (2003). Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity with a new discontinuous enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(12): 1873-1905.
- [23] Chessa, J., and Belytschko, T. (2003). An extended finite element method for two-phase fluids. *Journal of Applied Mechanics ASME* 70(1): 10-17.
- [24] Belytschko, T., and Xiao, S. P., and Parimi, C. (2003). Topology optimization with implicit functions and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57: 1177-1196.
- [25] Strouboulis, T., Copps, K., and Babuska, I. (2000). The generalized finite element method: An example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(8): 1401-1417.
- [26] Stazi, F., Budyn, E., Chessa, J., and Belytschko, T. (2003). XFEM for fracture mechanics with quadratic elements. *Computational Mechanics* ; 31(1-2): 38-48.
- [27] Ventura, G., Xu, J. X., and Belytschko, T. (2002). A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(6): 923-944.
- [28] Ventura, G., Budyn, E., and Belytschko, T. (2003). Vector level set for description of propagating cracks in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(10): 1571-1592.
- [29] Zi, G., and Bazant, Z. P. (2003). Eigenvalue method for computing size effect of cohesive cracks with residual stress, with application to kink bands in composites. *International Journal of Engineering Science*, 41(13-14): 1519-1534.
- [30] Kalthoff, J. F., and Winkler, S. (1988). Failure mode transitions at high rates of shear loading, in *Impact Loading and Dynamic Behaviour of Materials*, Informationsgesellschaft, ed. C. Y. Chiem, H.-D. Kunze, and L. W. Meyer, 1: 185-195, Verlag.
- [31] Xu, X.-P., and Needleman, A. (1994). Numerical simulation of fast crack growth in brittle solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 42(9): 1397-1434.
- [32] Zi, G., Chen, H., Xu, J., and Belytschko, T. (2004). The extended finite element method for dynamic fractures. *Shock and Vibration*, submitted.