

확률변수의 상관성을 고려한 사장교의 신뢰성해석

The Reliability Analysis of the Cable Stayed Bridge Considered to Correlation of the Random Variable

한 성 호* · 권 의 성** · 정 인 수*** · 신 재 철***

Han, Sung Ho · Kwon, Eui Sung · Jung, In Su · Shin, Jae Chul

Abstract

Developed is the new program that the reliability analysis can be performed more effectively considering the correlation of structural members about the cable stayed bridge. This program is formulated the stochastic finite element method suitable for the reliability analysis and the new safety evaluation method is proposed which is different from the existing one by the deterministic method or MCS response analysis. After conducting the initial equilibrium analysis of cable stayed bridges, the stochastic finite element is formulated through the perturbation method and the reliability analysis considering the correlation of stochastic variables is conducted. The results in various types of cable stayed bridge show that the probability of failure considering the correlation is larger than the non-correlation. The fan system is more stable than other systems at the structural response and the probability of failure.

1. 서 론

사장교의 정확한 거동을 파악하기 위해서는 비선형 해석을 수행하여야 하며 전체 강성에 영향을 주는 여러 변수들을 분석하는 것이 중요하므로 정적해석, 고유치해석, 동적응답해석 및 시공단계해석 등을 병행해야 한다.^{(1),(2),(3)} 이와 같은 구조해석 과정에서 가장 중요한 것은 구조형식 및 설계변수에 따라 구조물의 역학적 거동을 파악하고 전체 구조물에 어떤 영향을 주는가를 충분히 검토하는 것이다. 그러나 기존의 확정론적 방법에 의한 구조해석으로는 확률변수에 따른 구조물의 역학적 거동 및 설계변수에 대한 영향을 명확하게 파악하기 어려울 뿐만 아니라 경험에 의한 안전계수를 사용한 평가방법 역시 구조물의 안전성을 명확히 파악하기는 어렵다. 그러므로 사장교 구조물에 포함되어 있는 불확실성에 의한 영향을 논리적으로 구조물의 안전도 해석에 활용할 수 있는 신뢰성 평가방법에 의해 수행하는 것이 합리적일 것이다. 그러나 이러한 신뢰성 평가방법은 매우 복잡한 비선형 상태함수를 이용해야 할뿐만 아니라 비선형 상태함수의 형태를 명확하게 나타내는 것조차 어렵기 때문에 실용화되지 못하였다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 대안으로 매우 정확한 해석 결과를 얻을 수 있는 MCS 방법을 이용하여 신뢰성해석을 수행하는 것이 보편화되었다. 하지만 MCS 방법은 비선형 상태함수를 구하기 위해 반복적 구조해석을 수행해야 하므로 시간이 과다하게 소요되는 단점이 있어 복잡한 구조물의 신뢰성해석에는 적합하지 않은 평가방법이며 다른 근사해법에 대한 검증방법으로 주로 이용되고 있다. 따라서 본 연구에서는 사장교 구조물을 대상으로 확률유한요소법을 기존의 신뢰성이론에 적합하도록 정식화하여 구조물의 확률변수에 대한 상관성을 고려한 응답해석 및 신뢰성해석을 수행할 수 있는 프로그램을 작성함으로써 기존의 확정론적인 방법 및 MCS 응답해석에 따른 신뢰성 평가방법 보다 효율적으로 안전성을 검토하고자 하며, 파괴확률을 정량적으로 파악하고자 한다.^{(4),(5),(6),(7)}

2. 확률유한요소해석

본 연구에서 이용한 불확실량의 해석문제에 대한 전형적인 수치해법의 하나인 섭동법은 강성행렬 $[K]$ 를 재료의 불확실성을 나타내는 확률변수 $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$ 의 함수로 가정하고, Taylor식으로 전개하면 다음 과 같다.

- * 정회원 충남대학교 토목공학과 공학박사
- ** 정회원 충남대학교 토목공학과 석사과정
- *** 정회원 충남대학교 토목공학과 공학박사
- **** 정회원 충남대학교 토목공학과 교수

$$[K] = [K_0] + \sum_{i=1}^N [K]_i^{(1)} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [K]_{ij}^{(2)} a_i a_j + \dots \quad (1)$$

$[K_0]$ 는 $a = 0$ 인 경우의 강성행렬이며, 강성행렬 $[K]$ 를 편미분한 $[K]_i^{(1)}$ 과 $[K]_{ij}^{(2)}$ 는 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K]_i^{(1)} = \left. \frac{\partial [K]}{\partial a_i} \right|_{a=0} \quad [K]_{ij}^{(2)} = \left. \frac{\partial^2 [K]}{\partial a_i \partial a_j} \right|_{a=0} \quad (2)$$

그리고 하중벡터 $\{F\}$ 와 변위벡터 $\{U\}$ 역시 위의 식 (2)와 같이 전개하면 다음 식과 같이 표현된다.

$$\{F\} = \{F\}_0 + \sum_{i=1}^N \{F\}_i^{(1)} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{F\}_{ij}^{(2)} a_i a_j + \dots \quad (3)$$

$$\{U\} = \{U\}_0 + \sum_{i=1}^N \{U\}_i^{(1)} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U\}_{ij}^{(2)} a_i a_j + \dots \quad (4)$$

식 (1), (3), (4) 식을 평형방정식 $[K]\{U\} = \{F\}$ 에 대입하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \{U\}_0 &= [K]_0^{-1} \{F\} \\ \{U\}_i^{(1)} &= [K]_0^{-1} (\{F\}_i^{(1)} - [K]_i^{(1)} \{U\}_0) \\ \{U\}_{ij}^{(2)} &= [K]_0^{-1} (\{F\}_{ij}^{(2)} - [K]_i^{(1)} \{U\}_j^{(1)} - [K]_j^{(1)} \{U\}_i^{(1)} - [K]_{ij}^{(2)} \{U\}_0) \end{aligned} \quad (5)$$

변위에 대한 1차 섭동법(First Order Perturbation Method)은 식 (4)의 우변에서 1차항만 고려한 것으로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{U\} = \{U\}_0 + \sum_{i=1}^N \{U\}_i^{(1)} a_i \quad (6)$$

따라서 1차 섭동법에 의한 변위의 기대치와 공분산 행렬은 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$E^{(1)}[\{U\}] = \{U\}_0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} COV^{(1)}[\{U\}, \{U\}] &= E[(\{U\} - E^{(1)}[\{U\}])(\{U\} - E^{(1)}[\{U\}])^T] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U\}_i^{(1)} \{U\}_j^{(1)T} E[a_i a_j] \end{aligned} \quad (8)$$

또한 변위에 대한 2차 섭동법(Second Order Perturbation Method)은 1차 섭동법과 같이 식 (4)에서 2차 항까지 고려한 것으로 다음 식과 같다.

$$\{U\} = \{U\}_0 + \sum_{i=1}^N \{U\}_i^{(1)} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U\}_{ij}^{(2)} a_i a_j \quad (9)$$

2차 섭동법에 의한 변위의 평균과 공분산 행렬은 다음 식과 같다.

$$E^{(2)}[\{U\}] = E^{(1)}[\{U\}] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U\}_{ij}^{(2)} a_i a_j \quad (10)$$

$$\begin{aligned} COV^{(2)}[\{U\}, \{U\}] &= COV^{(1)}[a_i a_j] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \{U\}_{ij}^{(2)} \{U\}_{kl}^{(2)} \\ &\quad \cdot (E[a_i a_j] E[a_k a_l] + E[a_i a_k] E[a_j a_l]) \end{aligned} \quad (11)$$

각 절점에서 변위값을 구한 후, 계산되는 부재력의 평균 및 공분산 행렬들은 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{F\}_0 &= [K]_0 \{U\}_0, \quad \{F\}_i^{(1)} = [K]_i^{(1)} \{U\}_0 + [K]_0 \{U\}_i^{(1)} \\ \{F\}_{ij}^{(2)} &= [K]_{ij}^{(2)} \{U\}_0 + [K]_i^{(1)} \{U\}_j^{(1)} + [K]_j^{(1)} \{U\}_i^{(1)} + [K] \{U\}_{ij}^{(2)} \end{aligned} \quad (12)$$

3. 신뢰성해석

사장교의 주형과 주탑에서는 축력과 휨모멘트가 동시에 작용하고 케이블에는 긴장력만 작용하고 있으므로 한계상태방정식의 확률변수는 축력, 휨모멘트, 케이블긴장력, 단면적, 단면이차모멘트로 구성된다. 주형과 주탑 및 케이블에 대한 부재응력을 확률변수의 함수로 나타내면 식 (13)과 같다.

$$\sigma_g = \frac{P(\cdot)}{A_g} \pm \frac{M(\cdot)}{I(\cdot)} y, \sigma_c = \frac{T(\cdot)}{A_c} \quad (13)$$

여기서 σ_g, σ_c : 주형과 주탑, 케이블응력, $P(\cdot), M(\cdot)$: 주형과 주탑의 축력, 휨모멘트
 $T(\cdot)$: 케이블긴장력, A_g, A_c : 주형과 주탑, 케이블단면적

따라서 한계상태방정식은 윗 식을 이용하여 다음 식과 같이 정의할 수 있다.

$$g(\cdot)_{\sigma_x} = \sigma_{y_x} - \frac{P(\cdot)}{A_g} - \frac{M(\cdot)}{I(\cdot)} y, g(\cdot)_{\sigma_c} = \sigma_{y_c} - \frac{T(\cdot)}{A_c} \quad (14)$$

여기서 σ_{y_x} 및 σ_{y_c} 는 주형, 주탑과 케이블극한응력을 나타내고 있으며 한계상태방정식에 대한 표준편차는 식 (15)에 의해 계산할 수 있다.

$$\sigma_M = \left[\sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \right]^{1/2} \quad (15)$$

본 연구에서는 식 (14)를 이용하여 확률변수에 의해 발생하는 최대 부재응력에 대하여 평균과 표준편차를 계산하여 신뢰성해석을 수행하였다.

4. 사장교의 확률유한요소해석

확률변수는 표 1, 2에 나타난 단면계수와 정하중, 케이블긴장력을 고려하였으며, 변동계수는 10%를 적용하여 그림 1과 같은 세 가지 형태의 사장교에 대해서 수치해석을 수행하였다. 대상 사장교의 전체적인 개형은 주경간장이 375m, 측경간장이 150m, 주탑의 높이가 75m인 사장교를 총 23개의 절점과 12개의 등가 트러스 요소, 22개의 보요소로 구성하였다.

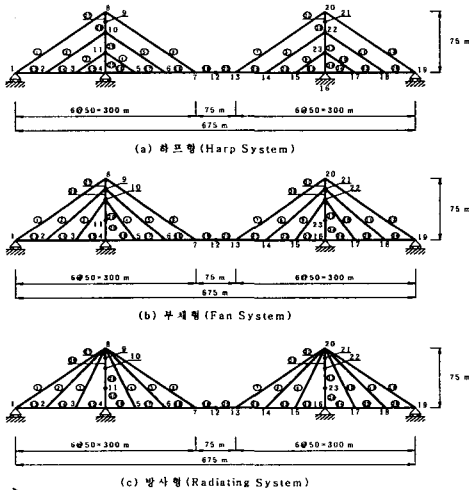


Fig. 1 Modelling of the Cable Stayed Bridge

Table 1 Mean and standard deviation of random variable for cable stayed bridge

Random variable		Mean	Std. D.	C.O.V(%)
E(tonf/m ²)	Girder	2.1×10 ⁷	2.1×10 ⁶	10
	Tower	2.1×10 ⁷	2.1×10 ⁶	10
	Cable	2.0×10 ⁷	2.0×10 ⁶	10
Dead load (tonf/m)	Girder	23.0	2.3	10
	Tower	5.181	0.5181	10
A(m ²)	Girder	1.74	0.174	10
	Tower	0.66	0.066	10
I(m ⁴)	Girder	2.83	0.283	10
	Tower	4.55	0.455	10
Live load	Uniform (tonf/m)	7.90	0.790	10
	Concentrated (tonf)	64.8	6.48	10

4.1 케이블초기긴장력 결정

주형의 사하중 분포에 따른 케이블초기긴장력은 사장교의 비선형성을 고려한 시산법을 이용하여 모든 절점에서 최대 상태변위 0.001mm의 수렴조건으로 결정하였다. 주어진 대상 사장교가 대칭구조이므로 케이블 1~6번 요소의 초기긴장력에 대한 해석 결과는 표 2와 같다. 주형의 수직변위에 대한 비선형 해석과 초기형상 해석에 대한 결과를 비교해 보면 초기형상 해석의 중요성을 알 수 있으므로 케이블지교량인 사장교는 초기형상 해석을 통한 초기긴장력을 도입한 후 구조응답해석을 수행하는 것이 합리적인 것으로 판단된다.

Table 2. Initial cable tension force (tonf)

Cable No. \ Type	Harp	Fan	Radial
1	2949.31	2921.31	2890.72
2	2837.73	2497.82	2303.12
3	2321.30	1443.61	1123.21
4	2342.03	1477.48	1189.39
5	2486.31	2042.93	1836.55
6	3215.78	3292.59	3310.04

4.2 사장교의 확률유한요소해석 결과

사장교의 확률유한요소해석을 수행하기 위해 정적하중하에서 단면적, 케이블요소의 탄성계수, 초기 긴장력, 주탑·주형의 탄성계수, 단면이차모멘트, 사하중, 집중활하중, 등분포활하중 등을 확률변수로 고려하였으며 평균(Mean), 표준편차(Standard Deviation) 및 변동계수는 표 1과 같이 각각 10%로 동일하게 적용하여 구조 해석을 수행하였다. 또한 등분포활하중은 도로교설계기준에 의해 장경간 교량인 경우 DB하중보다 DL하중의 영향이 더 크므로, DL-24 하중을 8차선에 재하하는 조건과 충격계수 $i=15/(40+L)$ 에 의해 계산된 0.04를 적용하여 산정된 등분포활하중 7.90t/m와 집중활하중 64.8tonf를 최대 휨모멘트가 발생할 수 있도록 중앙경간에만 재하하여 선형·비선형구조해석을 수행하였으며, 절점 변위와 부재력, 케이블긴장력에 대한 각각의 평균값과 표준편차값의 해석결과를 분석하였다.⁽⁸⁾

4.2.1 절점변위

사장교의 형식에 따른 변위에 대한 비선형 결과를 그림 2~3과 같이 나타냈으며, 주형에서는 수직변위, 주탑에서는 수평변위에 대하여 결과를 검토하였다. 주형의 수직변위는 12절점에서의 변위가 세 가지 형식에서 모두 가장 크게 나타났으며, 변동계수도 역시 가장 큰 것을 알 수 있다. 전반적으로 세 가지 형식의 변위는 측경간에서는 상향 중앙경간에서 하향의 변위양상을 보이며 중앙경간에서의 변동계수가 측경간보다는 크게 나타나고 있다. 주탑의 수평변위는 세 가지 형식 모두 상단에서 가장 크며, 변동계수 역시 가장 크게 나타나고 있다. 변위에 대한 해석결과를 검토해 보면, Radial형이 주형의 수직변위와 주탑의 수평변위가 다른 형식의 사장교 보다 작게 나타나고 있으며, 확률변수의 불확실량에 따른 변동계수도 가장 작기 때문에 다른 형식보다 유리함을 알 수 있다.

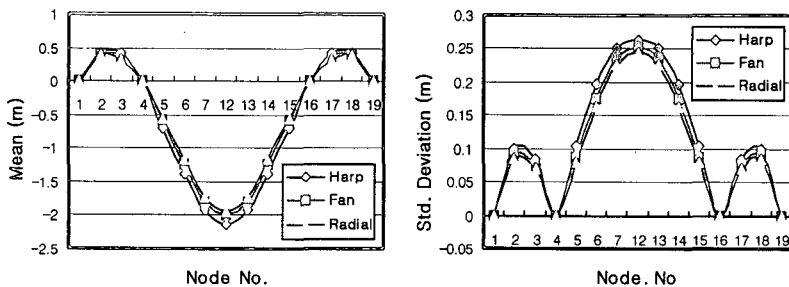


Fig 2. Mean and standard deviation of vertical displacement at the girder

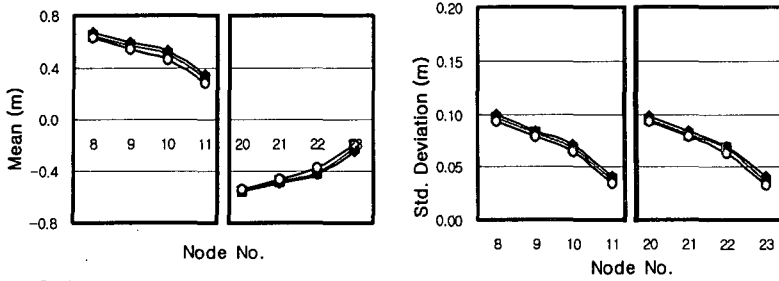


Fig 3. Mean and standard deviation of horizontal displacement at the tower

4.2.2 부재력

부재력의 비선형해석결과를 그림4~5에 도시하였다. 주형과 주탑의 축력에 대한 평균값을 보면 주형과 주탑의 접합부에서 가장 큰 값을 보이고 있으며 변동계수는 전 구간에 10% 미만을 보이고 있다. 주형에서 가장 큰 변동계수를 보이는 부재는 압축에서 인장으로 변하는 중앙경간의 중앙부재에서 큰 변동폭을 보이고 있다. 또한 휨모멘트 평균값은 주형의 측경간과 중앙경간에서는 Radial형이, 중앙경간의 주탑부분에서는 Harp형과 Fan형이 큰 값이 나타났다. 표준편차는 주형과 주탑의 접합부에서 가장 크며, 변동계수는 표준편차가 가장 큰 절점에서 보다 중앙경간의 7번 절점에서 크게 나타나고 있다. 이는 7번 절점을 경계로 휨모멘트가 부(-)에서 정(+)으로 변환되는 절점이기 때문으로 판단된다.

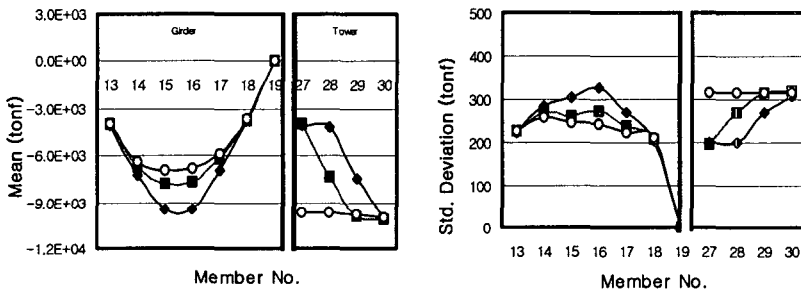


Fig 4. Mean and standard deviation of axial force

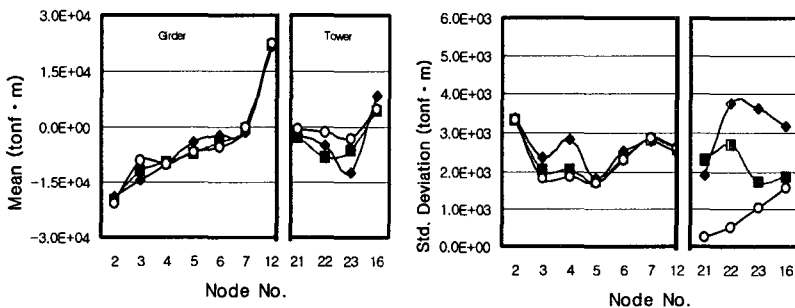


Fig 5. Mean and standard deviation of bending moment

사장교와 같은 케이블이 지지하는 장경간의 교량 설계시 형식을 선별하는데 있어 중앙경간과 측경간의 사하중과 활하중에 대한 휨모멘트의 영향을 고려할 때 어느 형식이 유리한지 명확히 판단할 수 없으므로 축력과 휨모멘트가 동시에 작용하는 사장교는 부재의 합응력을 고려하는 것이 합리적일 것으로 판단된다.

4.2.3 케이블긴장력

케이블긴장력에 대한 비선형해석결과는 그림 6과 같이 나타낼 수 있다. 평균값은 전반적으로 Fan형과 Radial형에 비해 Harp형이 크게 나타났으며, 모두 6번 케이블보다는 1번 케이블긴장력이 가장 크게 나타났다. 표준편차값은 가장 큰 긴장력이 작용하는 1번 케이블에서 발생하고 있으며 변동계수는 전반적으로 11% 미만의 영향을 받고 있다. 대부분의 케이블에서 초기 긴장력에 비해 활하중 재하시의 긴장력이 증가하는 반면, 감소하는 케이블이 존재하기 때문에 사장교의 케이블긴장력에 대한 결정이 매우 중요하며, 시공단계 해석시에 각 단계별 긴장력의 산정에 많은 어려움이 따를 것으로 판단된다.

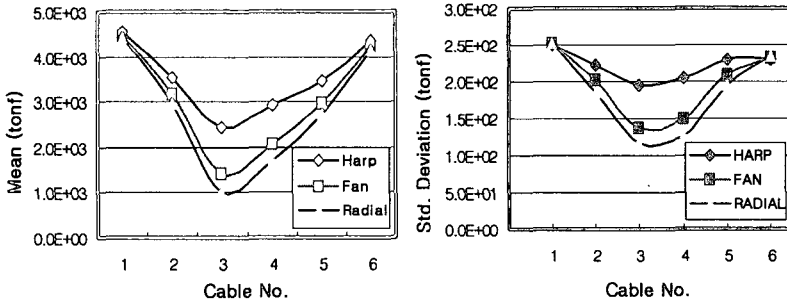


Fig. 6 Mean and standard deviation of cable tension force

5. AFOSM 해석 결과

섭동법을 이용하여 작성한 SFEMP(Stochastic finite element method program)의 응답해석 결과를 이용하여 AFOSM 방법에 의해 신뢰성해석을 수행한 결과 즉 수렴오차를 0.001로 하여 계산한 신뢰성지수 및 이에 상응하는 파괴확률은 그림 7~10과 같다. 신뢰성해석 방법 중 본 연구에서 이용한 AFOSM 방법은 한계상태방정식을 비선형으로 계산하기 때문에 파괴확률이 상당히 정확할 것으로 판단된다.^{(4),(6)} 변위의 불확실량은 사용성에 대한 신뢰성해석이므로 생략하였으며 부재력 즉 주형과 주탑의 축력 및 휨모멘트에 의해서 신뢰성해석을 수행하였다. 이때 각각의 확률변수는 정규분포를 갖는 것으로 가정하여 대상 사장교의 신뢰성지수(β) 및 파괴확률(P_f)를 계산하여 서로 비교·검토했다. 사장교 케이블을 평행강선 스트랜드로 가정하여 극한인장응력은 $18,000 \text{ kgf/cm}^2$ 로 산정하였으며 주탑과 주형은 SM490인 강재로 가정하여 극한응력을 $3,200 \text{ kgf/cm}^2$ 로 산정하였다. 이때, 극한응력의 변동계수(C.O.V)는 5%로 가정하여 해석하였다.⁽⁸⁾ 선형·비선형해석에서 축응력과 휨응력이 가장 크게 발생하는 주형 및 주탑 부재에 대하여 신뢰성해석을 수행하였다. 확률변수의 상관성은 케이블긴장력, 사하중, 등분포활하중에 대하여 고려하였으며, 표 3과 같이 CASE 1~7의 경우에 대하여 신뢰성해석을 수행하였다.

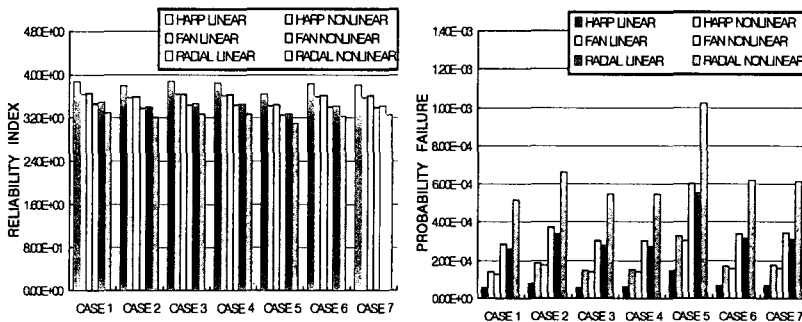


Fig 7. Reliability index and probability failure for AFOSM (member 13)

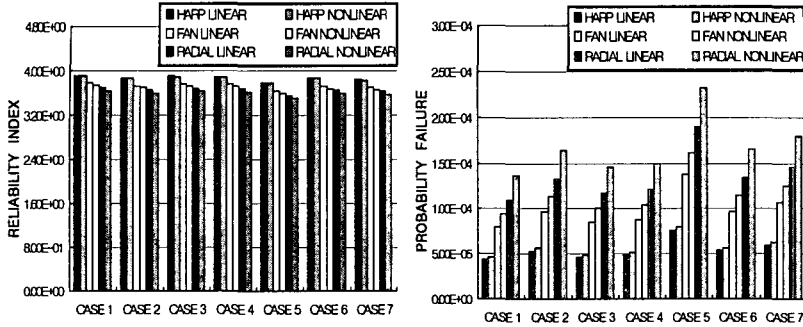


Fig 8. Reliability index and probability failure for AFOSM (member 19)

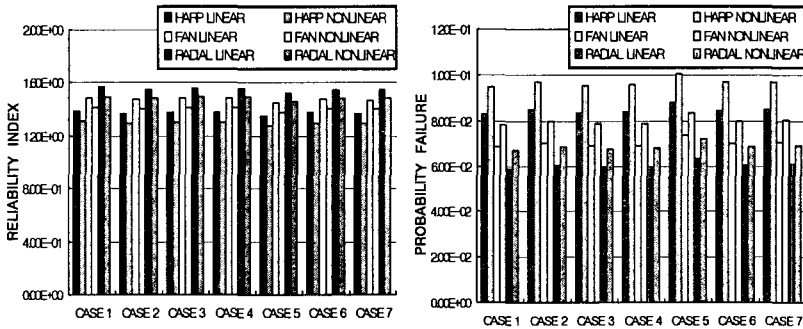


Fig 10. Reliability index and probability failure for AFOSM (Cable 1)

Table 3 Correlation of random variables

Case Correlation	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 6	Case 7
Tension	-	0.25	0.25	-	0.75	0.75	-
Dead Load	-	0.25	-	0.25	0.75	-	0.75
Live Load	-	-	0.25	0.25	-	0.75	0.75

신뢰성해석 결과에 의하면 케이블은 전반적으로 비슷한 파괴확률을 보이고 있으나, Radial형이 다른 형식에 비해 파괴확률이 가장 작게 나타났으며, 주형의 경우 Harp형이 가장 작게 나타났다. 반면에 주탑의 경우 Harp형이 Fan형과 Radial형에 비해 큰 파괴확률을 보이고 있다. 상관성을 고려하여 파괴확률을 검토한 결과 상관성이 증가하면서 파괴확률이 증가하는 것으로 나타났으며, 선형해석에 의한 결과보다는 비선형해석에 의한 파괴확률이 크게 나타났다. 따라서 불확실성을 포함하는 사장교의 형식을 선정할 경우, 각각의 확률변수에 따른 확률유한요소해석이 수행되어야 할 것이며, 확률변수의 상관성을 고려한 신뢰성해석이 선행되어야 할 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서는 확률유한요소법을 이용한 사장교와 같은 복잡한 구조물을 해석한 후 확률변수의 상관성을 고려한 신뢰성해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

1. 구조해석의 각단계마다 확률변수들의 분산특성을 고려할 수 있는 확률유한요소법을 기존의 신뢰성이론에 적용하여 사장교와 같이 복잡한 구조물에 대해 상관성을 고려한 신뢰성해석을 보다 효율적으로 수행할 수 있는 프로그램을 작성하였다.
2. 상관성을 고려하여 신뢰성해석을 수행한 결과 상관성이 증가하면서 파괴확률이 크게 나타났기 때문에 사장교의 형식 선정 시, 확률변수의 상관성을 고려한 신뢰성해석이 선행되어야 할 것으로 판단된다.
3. 사장교의 구조형식에 따른 상관성을 고려한 신뢰성해석을 수행한 결과 구조제원이 같은 경우에도 단면력에 따른 파괴확률을 비교하면 상대적으로 장·단점을 가지고 있으나 대체적으로 부채형 사장교가 다른 구조형식에 비하여 비교적 우수한 것으로 나타났다.

추후 확률변수들의 상관성을 고려하여 차량하중, 지진하중, 풍하중, 파랑하중과 같은 동하중을 고려한 동적 확률유한요소해석 및 신뢰성해석에도 범위를 확대해 나갈 필요성이 있다고 사료된다.

참고 문헌

1. JHON F. Fleming, ENGIN A. Egesell, Dynamic Behaviour of a Cable-Stayed Bridge”, Earthquake Engineering and Structure Dynamics. Vol. 8, pp. 1-16, 1980.
2. ALY, S. Nazmy, AHMED M. Abdel-Ghaffar, “Non-linear Earthquake-Response Analysis of Long-span Cable-stayed Bridges Theory”, Earthquake Engineering and Structure Dynamics, Vol. 19, pp. 45-62, 1990
3. 건설교통부 한국건설기술연구원, “장대교량의 내풍성능 향상기술에 관한 연구”, 2000.
4. Handa, K. and Karrholm, G., “Application of Finite Element Method in the Statistical Analysis of Structures”, Chalmers University. of Technology, Sweden, 1975.
5. Baecher, G.B. and Ingra, T.S., “Stochastic FEM in Settlement Prediction”, Journal of Geotechnical Engineering Division, Vol.107, No. GT4, pp. 449-463, 1981.
6. Handa, K. and Andersson, K., “Application of finite element methods in the statistical analysis of structures”, Proceedings of the 3rd International Conference on Structural Safety and Reliability, pp. 409-417, 1981.
7. Freudenthal, A. M., Garrelts, J. M. and Shinozuka, M, “The Analysis of Structural Safety” Journal of the Structural Division., ASCE, Vol. 92, No. ST1, pp. 267-325, 1966.
8. 건설부, “도로교 표준시방서”, 1996.