

# 다자유도 시스템의 진동제어를 위한 MR감쇠기 용량 및 위치 선정

## Capacity and Placement of MR Damper for Vibration Control of MDOF System

이 상 현\*      민 경 원\*\*      이 루 지\*\*\*      김 대 곤\*\*\*\*  
Lee, Sang-Hyun    Min, Kyung-Won    Lee, Roo Jee    Kim, Dae-Kon

---

### ABSTRACT

In this paper, preliminary design procedure of magnetorheological (MR) dampers is developed for controlling the building response induced by seismic excitation. Hysteretic biviscous model which is simple and can describe the hysteretic characteristics of MR damper is used for parametric studies. The capacity of MR damper is determined as a portion of not the building weight but the lateral restoring force. A method is proposed for the optimal placement and number of MR dampers, and its effectiveness is verified by comparing it with the simplified search algorithm. Numerical results indicate that the capacity, number and the placement can be reasonably determined using the proposed design procedure.

---

### 1. 서 론

최근 들어 대형 건축 및 토목 구조물의 에너지 소산능력을 증가시키기 위해 많이 이용되고 있는 준능동 감쇠기는 적은 전력을 사용하며, 큰 감쇠 능력을 가지고 있어서 구조 시스템에 대한 내진 및 내풍을 위해서 매우 유용하게 사용된다<sup>(1-2)</sup>. 준능동 감쇠기의 하나인 MR감쇠기는 자기신호에 따라 MR 유체의 점성을 쉽게 바꿀 수 있고, 대용량의 감쇠력도 감쇠장치 외의 특별한 기계적 장치 없이 쉽게 구현할 수 있어서 최근 들어 많은 학자들에 의하여 건축구조물에의 적용성에 대한 이론적, 실험적 연구가 수행되고 있다<sup>(3-6)</sup>.

감쇠기의 설계방법은 주어진 목표성능을 달성하기 위하여 요구되는 감쇠기의 용량, 설치위치, 설치방법 등을 체계적으로 제시할 수 있어야 한다. 감쇠기는 고유의 이력특성과 설계변수를 가지고 있기 때문에 설계방법도 그에 따라 매우 다르다. Soong 등은 점성과 탄성을 구조물에 추가함으로써 진동을 줄이는 점탄성 감쇠기의 설계를, 모달 변형에너지 법을 이용하여 감쇠기의 성능을 등가감쇠비로 치환하는 방법을 사용하여 수행하였다<sup>(7)</sup>. Shulka와 Datta<sup>(8)</sup>, Garcia와 Soong<sup>(9)</sup>는 단순 순차적 최적설계방법(simplified sequential search algorithm, SSSA)을 적용하여 각각 점탄성감쇠기와 점성 감쇠기의 최적위치를 구하였다. 이상현 등은 고유 값 지정방법을

---

\* 서울대학교 공학연구소 객원연구원, 공학박사, 전화: 02-709-2731, E-mail: lshyun@msn.com

\*\* 단국대학교 건축대학 건축공학과 부교수

\*\*\* 단국대학교 건축대학 건축공학과, 석사과정

\*\*\*\* 서울산업대학교, 구조공학과, 조교수

통하여 단위크기의 점성 및 강성에 대한구조물의 고유 값의 변화율에 의하여 점탄성 감쇠기의 최적분포를 구할 수 있음을 보였다<sup>[10]</sup>. Filatrault 와 Cherry는 마찰감쇠기에 대하여, 구조물의 주기, 지진의 주요주기, 그리고 감쇠기의 미끄러짐 힘에 대한 변수 연구를 통하여, 변위와 소산에너지의 합으로 주어지는 성능지수를 최소화하는 마찰감쇠기 미끄러짐 힘의 최적분포를 제시하였다<sup>[11]</sup>. Fu와 Cherry는 마찰감쇠된 시스템의 횡력수정 계수를 구하고 이를 사용하여 마찰감쇠기를 설계하였다<sup>[12]</sup>. Moreschi 와 Singh는 유전자 알고리즘을 사용한 금속항복감쇠기와 마찰감쇠기의 설계절차를 제안하였다<sup>[13]</sup>.

일반적으로 MR 감쇠기는 탄성, 점성, 그리고 마찰 특성 모두를 가지고 있으며, 자기장의 크기에 따라 그 크기가 변하기 때문에 매우 강한 비선형성을 가지고 있다<sup>[14]</sup>. MR 감쇠기의 설계절차는 이러한 MR 감쇠기의 이력 특성을 고려할 수 있어야 한다.

본 연구의 목적은 지진하중을 받는 건축구조물의 진동제어를 위한 MR 감쇠기를 설치할 때, 감쇠기의 이력특성을 고려하여 감쇠기의 용량, 설치위치, 그리고 설치 개수 등을 체계적으로 제시하는 예비설계절차의 개발이다. 지진응답특성이 지진 및 구조물의 주기에 따라 매우 달라짐을 고려하여 20개의 지진을 사용하여 얻은 결과를 평균하였고, 비제어시 구조물의 응답스펙트럼에 대하여 정규화된 변수를 사용하였다. 단자유도 구조물에 대한 해석의 결과를 사용하여 다자유도 구조물의 목표응답성능을 달성하기 위하여 요구되는 MR 감쇠기들의 총 용량을 결정하였으며, 최종적으로 감쇠기를 전 층에 고루 분포시키는 방법 (uniformly distributed damping system, UDDS), SSSA, 그리고 반복 해석을 요구하지 않고 특정 위치에 설치하는 방법의 유효성을 비교 평가하여 감쇠기의 최적설치위치와 설치 개수를 구하였다.

## 2. MR감쇠기 모델

Wereley는 다음과 같이 MR감쇠기의 힘-속도 관계에서 이력특성을 가지는 이력 이점성 모델을 제안하였다<sup>[15]</sup>.

$$F_{MR} = \begin{cases} C_1\dot{x} - f_y & \dot{x} < -\dot{x}_1 & \ddot{x} > 0 \\ C_0(\dot{x} - v_o) & -\dot{x}_1 \leq \dot{x} < \dot{x}_2 & \ddot{x} > 0 \\ C_1\dot{x} + f_y & \dot{x}_2 \leq \dot{x} & \ddot{x} > 0 \\ C_1\dot{x} + f_y & \dot{x}_1 \leq \dot{x} & \ddot{x} < 0 \\ C_0(\dot{x} + v_o) & -\dot{x}_2 \leq \dot{x} < \dot{x}_1 & \ddot{x} < 0 \\ C_1\dot{x} - f_y & \dot{x} < -\dot{x}_2 & \ddot{x} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

여기서,

$$\dot{x}_1 = \frac{f_y - C_o\dot{x}_o}{C_o - C_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{f_y + C_o\dot{x}_o}{C_o - C_1} \quad (2)$$

이고,  $v_o$ 는 저속도 영역의 이력곡선의 폭을 결정하는 변수이다.

연구에서는 감쇠력 계산에 Bouc-Wen 모델을 사용하는 경우와 달리 적분과정을 요구하지 않기 때문에 적은 시간노력을 요구하며, 힘-속도 관계의 이력특성을 모사할 수 있는 이력 이점성 모델을 사용하여 변수연구를 수행하기로 한다.

### 3. MR 감쇠기의 설치위치 및 개수

감쇠기의 최적위치와 개수에 대한 연구는 많은 연구자들에 의하여 수행되어 왔다. 일반적으로 목적함수에 대한 변화율을 이용하는 최적설계의 경우, 주어진 구속조건에 대하여 감쇠기의 양, 위치, 개수에 대한 정보를 제공하지만 많은 반복수행을 요구하고 경우에 따라 수렴성이 좋지 않은 단점을 가지고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여, 주어진 용량을 가지는 하나의 감쇠기를 설치할 때마다 수치해석을 반복 수행하여, 최대층간변위나 혹은 최대층간속도를 가지는 층에 순차적으로 설치해 가는 SSSA이 이용되고 있으며, Shulka와 Datta는 점탄성 감쇠기에<sup>[8]</sup>, Garcia와 Soong은 점성감쇠기에 적용하여 그 유효성을 검증하였다<sup>[9]</sup>. 그러나, 이러한 SSSA는 감쇠기의 제어력이 바뀌지 않는 수동형 감쇠기의 경우에만 적합하며, MR감쇠기와 같이 자기장의 신호에 따라 감쇠기의 최대제어력의 크기가 바뀌는 준능동 감쇠기에는 적용하기 어렵다. 특히, 하중의 특성에 따라 최적위치가 바뀌는 특성을 가지고 있다. 만일, SSSA를 MR감쇠기에 적용하기 위해서는 감쇠기의 상태를 passive-on 상태로 가정한 후 특정한 하중에 대한 설계를 수행해야 하며, MR감쇠기의 특성이나 하중이 바뀌는 경우에는 passive-on 상태로 특정하중에 대하여 구한 위치가 최적위치가 아닐 수 있다.

본 절에서는 정형 20층 구조물에 대하여, UDDS, SSSA, 그리고, 반복 해석을 요구하지 않고, 비제어시 응답 특성의 정보만을 이용하여 선택된 특정 위치에 설치하는 방법의 유효성을 비교 평가하여, MR감쇠기의 최적설치위치와 설치 개수에 대한 정보를 얻도록 한다. 해석에 사용한 20층 건물의 사양은 Datta가 점탄성감쇠기의 최적설계에 사용한 것과 동일한 사양을 가지고 있으며, 표 1에 나타나 있다. 해석에 사용한 하중은 El Centro 지진 하중이고, MR감쇠기의 사양은  $C_o=91kN\cdot s/m$ ,  $C_1=1kN\cdot s/m$ ,  $v_o=0m/s$ 이고, 감쇠기의 최대마찰력만을 설계변수로 고려하였다. 설치방법들의 유효성을 비교하기 위하여, 모든 방법들의 설치한 감쇠기들의 최대마찰력의 총합은 다음 식에 의하여 결정하였다.

$$\sum_j^{n_d} f_{yj} \cos^2 \theta_j = \rho \sum_i^n K_i S_{di} \quad (3)$$

여기서,  $f_{yj}$  과  $\theta_j$  는 각각 j번째 감쇠기의 최대마찰력과 설치각도를 나타낸다.  $K_i$  와  $S_{di}$  는 i층의 횡방향 층강성과 비제어시 최대층간 변위를 나타낸다.

해석에서는  $\rho$  를 0.1로 설정하였으며, 감쇠기의 설치각도는 0인 것으로 가정하였다. 또한, 감쇠기는 모두 동일한 크기를 가지는 것으로 가정하였다. 감쇠기 분포를 위하여, UDDS, 최대층간변위를 최적위치지수로 사용한 SSSA (SSSA-1), 최대층간속도를 최적위치지수로 사용한 SSSA (SSSA-2), 1-10층의 저층부에 설치하는 방법 (Case 1), 6-15층의 중층부에 설치하는 방법 (Case 2), 11-20층의 고층부에 설치하는 방법 (Case 3)을 사용하였다. Case 1, 2, 3은 하나의 층에 2개씩, 모두 20개의 감쇠기를 설치하였다. 구조물의 제어성능을 평가하기 위한 성능지수는 다음과 같다.

$$J_1 = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{\max_t |d_i(t)|}{d_n^{\max}} \right\}, J_2 = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{\max_t |\ddot{x}_{ai}(t)|}{\ddot{x}_{an}^{\max}} \right\}, J_3 = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{\sigma_{d_i}}{\sigma_{d_n}^{\max}} \right\}, J_4 = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{\sigma_{\ddot{x}_{ai}}}{\sigma_{\ddot{x}_n}^{\max}} \right\} \quad (4)$$

여기서,  $d_i$ 는  $i$ 층 층간변위를,  $d_n^{\max}$  비제어시 최대층간변위,  $\ddot{x}_{ai}$ 는  $i$ 층 절대가속도,  $\ddot{x}_{an}^{\max}$ 는 비제어시 최대절대가속도를 나타낸다. 그리고,  $\sigma$ 는 RMS 응답을 나타낸다.

그림 1은 감쇠기수가 20개로 고정된 UDDS, Case 1, 2, 그리고 3의 성능지수와 감쇠기의 수가 변하는 SSSA 방법에 의한 성능지수의 비교를 보여준다. SSSA 경우, 감쇠기수에 관계없이 감쇠기 용량의 총합은 동일하도록 설정하였다. 즉, 하나의 감쇠기는 최대마찰력이 20개의 감쇠기의 최대마찰력의 합과 동일한 감쇠기를 한 층에 설치한 것을 의미한다. 전 층에 동일한 크기의 감쇠기를 설치하는 UDDS가 Case 1, 2, 3보다 우수한 제어효과를 보여준다. 또한, SSSA-1이 SSSA-2보다 우수한 제어효과를 보이는 것으로부터, MR 감쇠기는 층간속도 보다는 층간변위가 큰 층에 설치하는 것이 효과적임을 알 수 있다. 특히, 주목할 것은 SSSA-1을 사용함으로써, 10개의 감쇠기만을 사용하고도 20개의 감쇠기를 사용한 UDDS의 제어 효과와 동일한 층간변위제어효과를 얻을 수 있다는 사실이다. 이것은 전 층에 감쇠기를 설치하는 것이 현실적이지 못함을 고려할 때, 매우 큰 장점이라 할 수 있다. 그러나, SSSA-1은 감쇠기의 수가 20개인 경우를 제외하고는 비제어시보다 절대가속도 응답을 증가시키는 결과를 가져온다. 이것은 SSSA-1이 감쇠기의 수가 작은 경우에는 층간변위가 크게 발생하는 곳에 큰 용량을 가지는 감쇠기를 집중시키고, 층전단력에 비해 과도하게 큰 제어력이 가해지는 층의 급격한 응답의 변화를 가져와 최대절대가속도 응답을 증가시켰기 때문이다.

앞에서 언급한대로, SSSA는 동일한 크기의 감쇠기만을 기초로 최적설계를 수행하기 때문에, 특성이 변하는 MR감쇠기의 경우에는 적합하지 않다. 특히, 하중에 따라 위치가 바뀐다는 것은 매우 비현실적이다. 따라서, 현실적인 고려상, 비선형성이 강한 MR감쇠기의 경우에는 변화율에 의한 최적설계나, 1개의 설치 시 마다 새로운 해석을 요구하는 SSSA에 의하여 감쇠기의 위치와 용량을 결정하는 것 보다는 오히려, 초기 구조물에 대한 응답정보, 설치상의 제약조건, 층 전단력 등의 초기설계조건만을 고려해, 감쇠기 수, 용량, 그리고 층별분포를 대략적으로 설계한 후, 감쇠기의 정확한 모델, 하중, 그리고 준능동 제어알고리즘과 같은 방법을 적용하여 성능을 조율하는 것이 합리적이다.

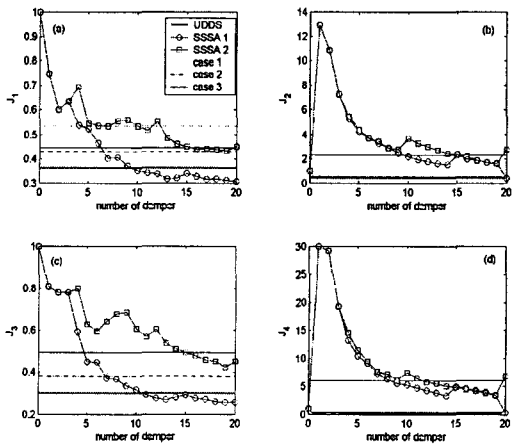


표 1. 20층 전단건물의 사양

Floor	Mass (tons)	stiffness (kN/cm)
1-5	300.0	4,000
6-10	250.0	3,000
11-15	175.0	2,000
16-20	100.0	1,000
damping ratio 2%		

그림 1. 20층 건물에 대한 감쇠기 설치방법에 따른 성능지수

본 연구에서는 최대마찰력이 총합이 (4)식에 의하여 주어지는 감쇠기를 층별 분포시킬 때, 다음과 같이 k층에 설치되는 감쇠기의 최대마찰력을 층전단력에 비례하여 산정한다.

$$f_{yk} = \rho K_k S_{dk} \frac{\sum_{i=1}^n K_i S_{di}}{\cos^2 \theta_k \sum_{j=1}^{n_d} K_j S_{dj}} \quad (5)$$

여기서, j는 설치되는 위치를 나타내는 지수이다.

표 2는 20개의 감쇠기가 설치된 UDDS, Case-1, 2, 3, 10개의 감쇠기를 설치한 SSSA-1, 2, 그리고 제안된 방법에 의하여 10개의 감쇠기를 설치한 경우의 성능지수를 보여준다. 제안된 방법은 비제어시 RMS 층간변위가 가장 큰 10곳에 (5)식에 의하여 최대마찰력이 산정된 MR감쇠기를 설치한 경우이다.

표 2로부터, 제안된 방법이 변위성능제어에 있어 가장 효율적임을 알 수 있다. 특히, 제안된 방법은 감쇠기 설치 전과 후 2번의 수치해석만을 수행하고, 감쇠기 개수가 10개로 UDDS, Case-1,2,3 보다 작은 수의 감쇠기를 사용하는 장점을 가지고 있다. 또한, 가속도응답제어에 있어서는 가장 효율이 좋은 UDDS의 성능에 근접하는 성능을 보이고 있다. 고층부에 동일한 크기의 감쇠기를 설치한 Case 3의 가속도응답이 크다는 사실로부터, 상대적으로 횡강성이 작은 고층부에 저층부보다 작은 용량의 감쇠기가 설치되어야 최대가속도응답의 크기가 증가하는 것을 방지할 수 있음을 알 수 있다.

표 2 각 방법의 성능 비교

	UDDS	SSSA-1	SSSA-2	Case-1	Case-2	Case-3	Proposed
$J_1$	0.362	0.352	0.535	0.534	0.430	0.447	0.349
$J_2$	0.437	2.218	3.677	0.455	0.550	2.312	0.449
$J_3$	0.300	0.317	0.607	0.394	0.382	0.494	0.274
$J_4$	0.205	5.270	7.413	0.378	0.383	6.051	0.344
감쇠기 개수	20	10	10	20	20	20	10
해석 횟수	2	11	11	2	2	2	2
감쇠기 크기	동일	동일	동일	동일	동일	동일	상이

#### 4. 설계 절차

다음과 같은 절차에 의하여, 지진하중을 받는 다자유도 구조물의 진동제어를 위한 MR 감쇠기의 최대용량, 설치위치, 및 개수를 산정하고, 그 유효성을 검증한다.

Step 1: 비제어된 구조물에 대한 수치해석 수행 시간이력해석, 혹은 응답스펙트럼해석을 이용하여, 비제어시의 구조물의 1차 모드 주기, 층간변위, 절대가속도, 층전단력을 계산한다.

Step 2: 목표성능지수의 산정 MR감쇠기를 사용하여, 달성하고자 하는 변위 및 가속도 목표성능지수를 결정한다.

Step 3:  $\rho$ ,  $C_1$ ,  $v_0$  결정: 동일한 목표성능지수를 달성하기 위하여 요구되는  $\rho$ ,  $C_1$ ,  $v_0$ 의 여러 조합 중, MR감쇠기로 실현 가능한 조합을 선택한다. 초기단계에서는  $C_1$ 과  $v_0$ 를 0으로 두고 1차 모드 주기에 대하여  $\rho$ 의 크기만으로 설계를 수행하여, 대략적인 감쇠기 용량을 산정한다. 이 때의  $\rho$ 는 passive-on시 실현할 수 있는 최대마찰력에 상응하는 크기이다.  $C_1$ 을 실제보다 작게 보는 것은 제어효과를 과소평가하는 반면,  $v_0$ 를 작게 보는 것은 제어효과를 과대평가하기 때문에,  $C_1$ 과  $v_0$ 를 0으로 설정하는 것의 오차는 크게 발생하지 않게 된다.

Step 4: 설치위치, 설치개수, 층별최대용량의 결정: 감쇠기의 수를 결정한 후, 비제어시 RMS 층간변위가 가장 크게 발생하는 곳을 감쇠기 수만큼 선정한다. 그리고, 설치되는 층의 층전단력에 따라 층별 감쇠기 최대용량을 결정한다.

Step 5: MR 감쇠기 설계: 주어진 층별분포에 따른 최대마찰력의 최대값과 최소값을 실현할 수 있는 MR 감쇠기를 설계한다. 만일 최대값과 최소값의 차가 커서, 하나의 MR 감쇠기로 이를 실현하는 것이 불합리한 경우, 성능이 다른 MR감쇠기를 설계하도록 한다.

Step 6: 수치해석: 주어진  $\rho$ 와 실제의,  $C_1$ ,  $v_0$ 을 고려하여 해석을 수행한다.

Step 7: 목표성능수준이 달성되지 않는 경우, Step 3-5를 반복한다. 변위성능목표를 만족하지 않은 경우에는  $\rho$ 를 증가시키고, 변위성능목표는 만족시키나 가속도성능목표를 만족하지 않은 경우에는 분포시키는 층의 수를 증가하여 하나의 감쇠기의 최대마찰력의 크기를 줄이도록 한다.

Step 8 (선택): 준능동제어알고리즘 적용: 준능동제어알고리즘 적용을 통하여 성능을 개선하도록 한다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 MR 감쇠기를 사용하여 건축구조물의 진동제어를 위하여 수행할 때, 감쇠기의 이력특성을 고려하여 감쇠기의 용량, 설치위치, 그리고 설치 개수 등을 체계적으로 제시하는 예비설계절차가 제시되었다. 이력특성을 모사할 수 있고 해석이 간단한 이력 이점성 모델을 사용하여 단자유도 구조물에 대한 변수연구를 선행 한 후, 수치해석결과를 바탕으로 다자유도 구조물의 목표응답성능을 달성하기 위하여 요구되는 MR 감쇠기들의 총 용량을 결정할 수 있는 방법을 제안하였고, 주어진 총 용량의 감쇠기에 대하여, UDDS, SSSA, 그리고 무작위로 특정위치에 설치하는 방법들의 제어효과에 대한 비교를 통하여, MR 감쇠기의 층별분포를 결정할 수 있는 방법을 제안하였다. 수치해석 결과는 제안된 방법이 적은 수의 감쇠기를 가지고도 층간변위와 절대가속도 제어에 있어 모두 효과적임을 보여준다.

## 감사의 글

이 연구는 한국건설교통기술평가원에서 위탁 시행한 2003년도 건설핵심기술연구개발사업(03산학연 C103A2000010-03A0200-00110)에 의한 것임.

## 참고문헌

1. GW, Bergman LA, Caughey TK, Chassiakos AG, Claus RO, Masri SF, Skelton RE, Soong TT, Spencer BF Jr., Yao JTP. "Special issue structural control: past, present, and future", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE ,1997, Vol.123, No.9, pp.897-971.
2. Brogan, W.L, "Modern control theory", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey1991,
3. Jansen, LM, Dyke SJ. "Semiactive control strategies for MR dampers: comparative study". *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE Vol 126, No 8, 2000, pp. 795-803.
4. H, Sodeyama H, Hata K, Iwata N. Komatsu Y. SunakodaK. Soda S. "Dynamic performance evaluation of magneto-rheological damper", *Proceeding of International Conference on Advances in Structural Dynamics*, vol. 1, Hong Kong, China, 2000. pp. 319-26.
5. Spencer Jr. BF, Dyke SJ, Sain MK. "Magnetorheological dampers: a new approach to seismic protection of structures", *Proceedings of Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996. pp. 676-81.
6. Carlson JD, Spencer Jr. BF. "Magneto-rheological fluid dampers for semi-active seismic control", *Proceedings of 3rd International Conference on Motion and Vibration Control*, vol. 3, Chiba, Japan, 1996. pp. 35-40.
7. Zhang RH, Soong T.T, "Seismic design of viscoelastic dampers for structural application", *Journal of Structural Engineering* ,ASCE, 1992, Vol.118, No.5, pp.1375-1392
8. Shukla AK, Datta TK. "Optimal use of viscoelastic dampers in building frames for seismic force. *Journal of Structural Engineering*", 1999, Vol. 125, No.4, pp.401-409.
9. D. Lopez Garcia and T.T. Soong, "Efficiency of a simple approach to damper allocation in MDOF structures", *Journal of Structures Control*, 2002, Vol.9, No.1 pp. 19-30.
10. Sang-Hyun Lee, Dong-In Son, Jinkoo Kim, Kyung-Won Min, "Optimal Design of Viscoelastic Dampers using Eigenvalue Assignment", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2004, Vol.33, No.4, pp521-542
11. A. Filiatrault, S.Cherry, "Seismic Design Spectra for Friction-Damped Structures", *Journal of Structural Engineering*, 1990, Vol.116, No.5, pp.1334-1355
12. Yaomin Fu and Sheldon Cherry, "Design of friction damped structures using lateral force procedure", *Earthquake engineering and Structural Dynamics*, 2000, Vol.29, No.7, pp. 989-1010
13. Mahendra P. Singh and Luis M. Moreschi, "Optimal seismic response control with dampers", *Earthquake engineering and Structural Dynamics*, 2001, Vol.30, No. 4, pp. 553-572
14. Phillips RW. *Engineering applications of fluids with a variable yield stress*. Ph.D thesis, University of California, Berkeley, California, 1969.
15. Wereley NM, Pang L, Kamath GM. "Idealized hysteresis modeling of electrorheological and magnetorheological dampers", *Journal of Intelligent Material, Systems and Structures*, Vol. 9, No 8, 1998, pp. 642-649.