

## 동하중 하에서 축소 모델의 구성과 전체 시스템 응답과의 비교 연구

### Study on the Time Response of Reduced Order Model under Dynamic Load

박수현\*      조맹효†  
Soohyun Park      Maenghyo Cho

---

#### ABSTRACT

In this paper, an efficient model reduction scheme is presented for large scale dynamic systems. The method is founded on a modal analysis in which optimal eigenvalue is extracted from time samples of the given system response. The techniques we discuss are based on classical theory such as the Karhunen-Loeve expansion. Only recently has it been applied to structural dynamics problems. It consists in obtaining a set of orthogonal eigenfunctions where the dynamics is to be projected. Practically, one constructs a spatial autocorrelation tensor and then performs its spectral decomposition. The resulting eigenfunctions will provide the required proper orthogonal modes(POMs) or empirical eigenmodes and the correspondent empirical eigenvalues (or proper orthogonal values, POVs) represent the mean energy contained in that projection. The purpose of this paper is to compare the reduced order model using Karhunen-Loeve expansion with the full model analysis. A cantilever beam and a simply supported plate subjected to sinusoidal force demonstrated the validity and efficiency of the reduced order technique by K-L method.

---

#### 1. 서    론

Karhunen-Loeve Decomposition(KLD)은 초창기에 신호처리 분야에서 시작되었고 오늘날 음성 및 영상 인식과 같은 분야에까지 유용하게 이용되고 있다. 이 방법은 데이터 분석을 수행하는데 있어서 아주 강력한 통계처리 기법이다. 기계공학분야에서는 난류유동장의 특성을 파악하기 위해 처음으로 이 기법이 사용되었다[1]. Karhunen-Loeve 분해법은 실험이나 수치해석을 통해서 얻어진 신호들로부터 중요한 고유치함수들을 계산하는 과정이다. KLD 방법은 또한 정확한 직교 분해법이라고 불리어지는데, 이 방법은 공간적인 정보를 얻는데 적합하며, 비선형 구조 시스템의 축소 모델을 구성하는데 기본적인 정보를 제공한다. 여기서 동적 거동을 해석할 때, 직교 고유함수 집합을 얻는데 KLD방법이 기여를 한다. 이 방법을 제외한 어떤 다른 선형 전개를 통해서도 같은 수의 모드를 계산해서 더 정확한 동적 응답을 구현할 수 없다는 것을 볼 때, 이 KL 모드 집합은

---

\* 서울대학교 기계항공공학부 대학원생

† 서울대학교 기계항공공학부 부교수

고려하는 모드의 개수에 관계없이 근사화의 오차를 최소화 시킬 수 있다는 점에서 최적이라 할 수 있다. KLD를 통해서 단지 몇 개의 모드를 계산하고 이것을 이용해서 지배적인 구성 성분까지 파악할 수 있다[2]. 이 기법은 축소 모델 방법에 이용되었고, 유체 동역학[2-4], 열 해석[5], 그리고 결합 탐지[6] 의 분야에까지 이르러 시스템의 응답을 재구성하는데 이용되고 있다. 구조의 동적 해석과 시스템의 특성 구현 분야에서 많은 연구자들이 KLD 방법이 정확한 저차 동적 모델을 얻는데 이용될 수 있는 것을 보여주고 있다[7-9]. KLD에 의해서 추출된 소수의 모드는 전통적 방법인 Galerkin 또는 Rayleigh-Ritz[10] 방법으로부터 계산된 모드와 비교할 때, 똑같은 양의 에너지를 가진다고 한다. 그러나 구조의 동적 해석에서 KLD 방법을 이용하여 보면, KLD를 이용하여 추출된 모드와 일반적인 진동 모드 사이에는 약간의 차이점이 존재한다. 그러나 참고문헌 [11]에 의하면, KLD 방법을 이용한 수치해석 자료로부터 계산된 고유벡터가 진동의 보통 모드의 고유 벡터에 수렴한다고 지적하고 있다. 실제로 Steindl 과 Troger [12]의 연구를 보면, KL 모드들이 표준 Galerkin 근사화의 최선의 선택이라고 한다. 실제로 KL 분해법은 동적 시스템의 시물레이션이나 실험측정을 통해서 얻어진 공간 자동상관성 텐서를 구성함으로써 수행된다. 그러므로 KLD 분해법을 수행함으로써 공간 자동상관성 텐서의 고유함수들이 요구되는 정확한 적교 모드를 제공하고, 또한 이 고유치들이 동적 구조물에 내재된 평균 에너지를 대신한다는 것을 알 수 있다. 이 기법은 Azzez - Vakakis[13] 과 Wolter - Sampaio[14] 의 동적충격 문제의 해석에 이용되기도 하였다. 다른 축소 모델 기법도 Friswell[15] 등에 의해 유사한 동적충격 문제에 이용되기도 하였다.

현재의 이론의 타당성을 검토하기 위해, 외팔보의 진동과 평판의 진동을 모델로 하여 해석해 보고자 한다. KL 분해법을 유한요소를 이용하여 구현하고, 이를 모달 해석과 비교하였다. KL 분해법에 의해 축소 모델을 구성하고 이 축소 모델의 해석 결과를 비교하여, 작은 수의 모드를 이용하더라도 정확한 해석이 가능함을 확인 하고자 한다.

## 2. The Karhunen-Loeve 분해법

특정한 상태의 변화를 시공간적 함수의 일련의 흐름으로 동적 시스템이 구성된다고 가정한다.  $u(x,t)$  이고,  $x \in D$ ,  $D$ 는 Hilbert 공간이며, 또한 시간  $t \in [0, \infty)$ 이다. 변화를 위한 자동 상관성 텐서를 정의하기 위해 2계 통계학적 과정이 모델로 구성된다.  $v(x,t)$ 를 평균 변화와의 편차라고 정의를 하면,

$$v(x,t) = u(x,t) - E[u(x,t)] \quad (1)$$

여기서,  $v(x,t)$ 는 평균이 0인 확률론적인 처리 과정이며 자동 상관성 텐서는 자동 공변 텐서와 같다. 만약  $v(x,t)$ 이 실수라면 두 점사이의 공간적 자동 상관성 텐서 함수는 다음과 같이 다이어드 곱으로 정의된다.

$$R(x,x') = E(v(x,t) \otimes v(x',t)). \quad (2)$$

$u(x,t)$ 와  $v(x,t)$ 는 제곱 평균에서 연속적이고, 이러한 가정이 공간  $D$ 에서  $R(x,x')$ 의 연속성을 보장해준다.

동역학에서 주된 특징을 나타내는 변화의 축소 모델을 구성하기 위해서  $v(x,t)$ 를 다음과 같은 형태의 확장으로 나타낼 수 있다.

$$v(x, t) = \sum_k a_k(t) \psi_k(x) \quad (3)$$

$$E[a_k(t) a_l(t)] = \lambda_k \delta_{kl} \quad (4)$$

이 되고, 여기서 상관 되지 않은 모드들은

$$\langle \psi_k, \psi_l \rangle = \int_D \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \delta_{kl} \quad (5)$$

로 표시할 수 있다. 집합  $\{\psi_k\}$ 는  $\{\psi_k\} = L_2^n$ 인 정규 직교모드이다. 식 (3)을 식(2)에 대입하면 다음과 같은 식이 구성된다.

$$R(x, x') = \sum_k \lambda_k \psi_k(x) \otimes \psi_k(x') \quad (6)$$

정의와 가정에 따르면,  $R(x, x')$ 는 양정이며, 연속적인 Hermitian 연산자가 된다. Mercer의 정리 [16]에 의하면 식(6)에서 주어진  $R(x, x')$ 의 표현의 존재와 유일성이 보장된다. 여기에서  $\{\psi_k\}$ 는 적분연산자의 고유함수이고,  $R(x, x')$ 과  $\{\lambda_k\}$ 는 상호작용하는 음이 아닌 값을 가지는 고유치가 된다. 그래서

$$\int_D R(x, x') \psi_k(x') dx' = \lambda_k \psi_k(x) \quad (7)$$

이 되고, Karhunen-Loeve 정리에 의하면 식(3)에서 보듯이 커널  $K(x, x')$  적분 연산자의 고유함수인  $\{\psi_k\}$ 와 그에 상응하는 고유치  $\{\lambda_k\}$ 를 이용해서 자동 공변 텐서  $K(x, x')$ 의 연속적인 2계 통계학적 과정을 연속적으로 전개할 수 있다. 집합  $\{\psi_k\}$ 는 정확한 직교 모드(Proper Orthogonal Mode : POM)에 의해 형성되고, 밀착하는 구조라고 불린다.

그러므로 원래의 시간변위  $u(x, t)$ 는 식(3)에서 보이는 전개를 절단해서  $K$ 개를 취한 급수에 평균을 더함으로써, 축소된 차원으로 재구성 될 수 있다.

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \psi_k(x) + E[u(x, t)] \quad (8)$$

여기에서, 시간의 계수인  $a_k(t)$ 는 각 POM  $\psi_k(x)$ 를 시간 변위에 투영함으로써 쉽게 구할 수 있다.

$$a_k(t) = \langle v(x, t), \psi_k(x) \rangle \quad (9)$$

마지막으로 고유치들은 다음과 같은 초기의 가정을 이용해 표현할 수 있다.

$$\lambda_k = \langle \psi_k, R \psi_k \rangle = E[|\langle \psi_k, v \rangle|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle \psi_k, v \rangle|^2 dt, \quad (10)$$

위 식은 함수 공간상에서  $\psi_k$  축에 시스템의 평균 에너지가 투영된 것이다. 뿐만 아니라, 총 평균 에너지가 모든 고유치의 합과도 같다. 주어진 특정한 수의 모드에 있어서, 어떤 다른 선형 분해법을 사용하더라도 특정 동적 시스템에서 계산된 정확한 직교 모드들로부터 구하는 KL 분해법만큼의 정확한 에너지를 나타낼 수 없다는 점에서 위 식은 최적이라고 할 수 있다[3].

### 3. 직교 모드(POM)의 구성

KL 분해법을 구성하는 것에는 2가지 실용적인 방법이 있다. 고전적인 직접 방법(direct method)이 있고, 그 후에 새롭게 나온 스냅 샷(snap shot) 방법이 있다.[3] 이 논문에서는 직접 방법만을

논의하기로 한다.

동적 시스템의 변위가  $N$ 개의 지점에서 측정되거나 계산되고, 그 각각을  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$ 로 명명하기로 한다. 이 변위들을  $M$ 번 표본화하면, 다음과 같은  $M \times N$ 의 앙상블(Ansemble) 행렬을 형성하게 된다.

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N] = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_2) & \dots & u_N(t_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t_M) & u_2(t_M) & \dots & u_N(t_M) \end{bmatrix} \quad (11)$$

그 다음에 고정점과 초기의 가정에 의해 평균 변화량을 계산한다.

$$V = U - \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M u_1(t_i) & \sum_{i=1}^M u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M u_N(t_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^M u_1(t_i) & \sum_{i=1}^M u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M u_N(t_i) \end{bmatrix} \quad (12)$$

그리고 나면  $N \times N$  차원의 공간 상관 행렬이 계산된다.

$$R = \frac{1}{M} V^T V. \quad (13)$$

이  $R$ 의 고유 벡터들로부터 정확한 직교 모드(POMs)들이 구해지고, 이들은  $R$ 의 대칭성 때문에 직교하게 된다. 고유치들은 정확한 직교 값(POVs)들을 제공할 것이다. 명확하게, 행렬의 차원은 표본점의 수인  $N$ 에 의해 결정된다.

KL 축소 모델을 구성하기위해, 식(8)에서  $K$ 를 10개의 POMs으로 구성하면 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\bar{u}(x, t) \approx \sum_{k=1}^{10} a(t) \psi_k(x) + E[u(x, t)] \quad (14)$$

10개의 POMs들의 행렬을  $\tilde{\psi}$ 로 나타내면,  $\tilde{\psi}^T$ 를 운동방정식에 곱함으로써 축소 모델의 운동방정식을 정립할 수 있다.

$$M_\psi \ddot{a} + K_\psi a = F_\psi \quad (15)$$

여기서,

$$M_\psi = \tilde{\psi}^T M \tilde{\psi}, \quad K_\psi = \tilde{\psi}^T K \tilde{\psi}, \quad F_\psi = \tilde{\psi}^T F$$

이다. 새로 구성된 시스템의 벡터와 축소된 행렬은 10이라는 축소된 차원이 됨을 알 수 있다. 이 시스템은 POMs들의 계수인  $a(t)$  벡터를 수치적으로 계산함으로써 시스템의 응답을 구할 수 있다.

## 4. 수치예

유한 요소법에 기초를 둔 외팔보와 평판의 동적 거동을 Newmark Scheme을 이용하여 시간 적분을 수행 하였다. 이 결과를 토대로 축소된 모델을 형성하고, 전체 도메인에서 해석한 결과와 비교하여 도시하였다.

### 4.1 외팔보의 경우

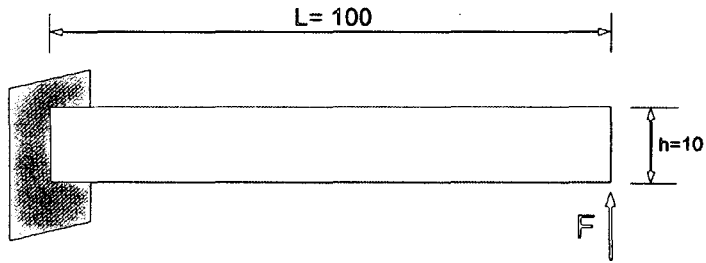


Fig.1 Cantilever Beam

$E=10\text{ GPa}$ ,  $8 \times 4$  격자를 형성하고, 0.001초 간격으로 1000개의 표본을 추출하였다. 그리고 가해지는 외력은 주기가 0.005초 인 정현파를 이용하였다. 그리고 정확한 직교 모드를 추출하는데 있어서, 10개의 POM과 20개의 POM를 이용해 축소 모델을 형성해 이로부터 얻어진 변위 결과를 전체 도메인에서 해석한 결과와 비교하여 도시하였다.

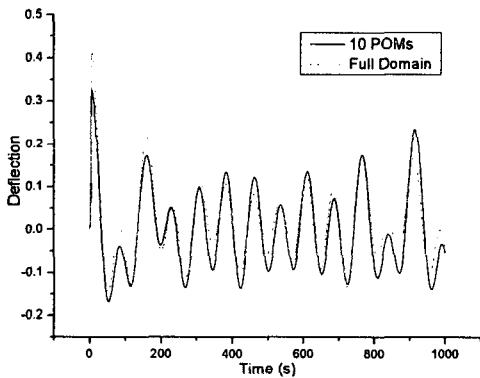


Fig.2 (a) Comparison 10 POMs (Proper Orthogonal Modes) to Full Domain on Cantilever beam

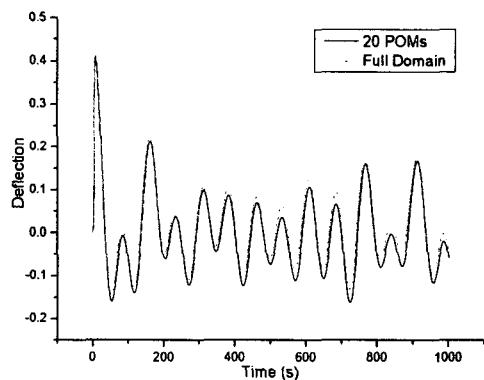


Fig.2 (b) Comparison 20 POMs to Full Domain on Cantilever beam

#### 4.2 평판의 경우

$E=1000\text{ GPa}$ , 이고  $8 \times 8$  격자를 형성하고, 0.001초 간격으로 1000개의 표본을 추출하여 해석하였다. 가해지는 외력은 주기가 0.1초인 정현파를 이용하였다. 평판에서의 축소 모델을 구성할 때에는 외팔보 보다 더 작은 수의 POMs들을 이용하여 해석하였다. 5개의 POM과 10개의 POM을 이용한 결과를 [그림4] (a), (b)에 도시하였다. 평판의 경우 외팔보의 경우보다 정확한 응답이 구해짐을 확인할 수 있다. 두 번째 봉우리 지점에서 확대한 그래프 [그림5] (a), (b) 에서 이를 확인할 수 있다.

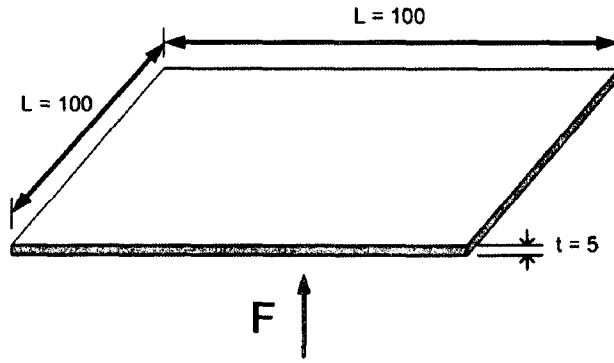


Fig.3 Plate

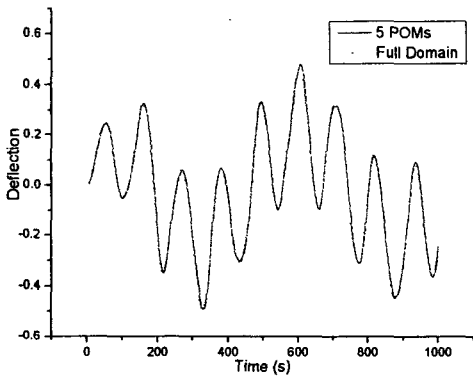


Fig.4 (a) Comparison 5 POMs to Full Domain on Plate

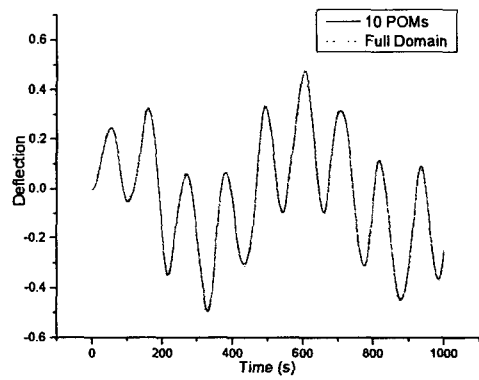


Fig.4 (b) Comparison 10 POMs to Full Domain on Plate

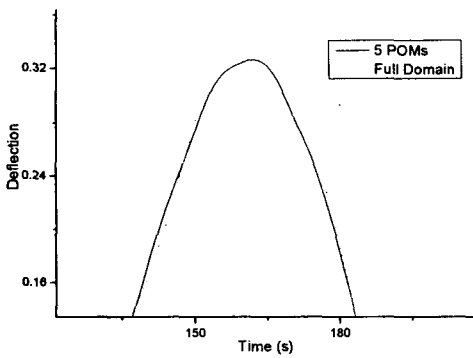


Fig.5 (a) Peak perturbation of 5 POMs

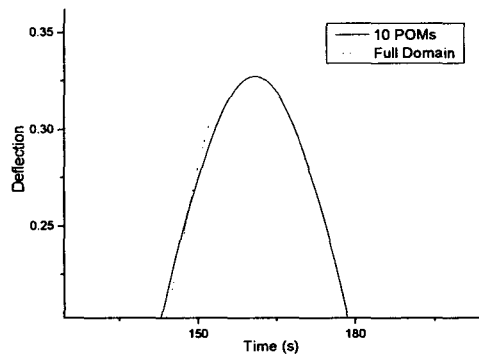


Fig.5 (b) Peak perturbation of 10 POMs

## 5. 결론

본 연구에서는 Karhunen-Loeve 분해법을 사용하여 축소 모델을 구성하였다. Karhunen-Loeve 분해법은 표본에서 추출한 N개의 시간 응답을 이용하여, 그 응답으로부터 각 지점 마다 평균값에 대한 편차 행렬을 구성하고, 그 행렬을 이용해 자동 상관성 텐서를 구성한다. 자동 상관성 텐서를 이용해 고유치와 고유 모드를 계산한다. 고유 모드 중 일부 몇 개의 모드만으로도 축소 모델이 형성 가능하고, 그것으로 부터의 해석 결과 또한 신뢰성을 보장한다.

본 연구에서는 외팔보와 평판의 시간 응답 해석을 통해서, KL분해법에 의한 축소 모델의 결과가 전체 도메인에 의한 해석과 비교하여 매우 신뢰할 수 있음을 보여 준다. 축소 모델은 고유치 문제뿐만 아니라 최적화 문제나 구조물의 동적 거동을 해석할 때에도 매우 유용하다. 적절한 차원의 범위로 이루어진 축소 모델은 동적해석이나 반복 계산이 요구되는 작업에 매우 효율적이다.

본 연구에서는 동적 해석을 수행함에 있어서 Karhunen-Loeve 분해법을 이용하여 구성된 축소 모델의 효율성과 신뢰성에 대해서 살펴보았다. 대형 구조물의 시간 응답은 많은 시간과 계산 절차를 요구한다. 그러나 KL분해법에 의해 축소모델을 구성함으로써, 구조물의 동적 거동을 지배하는 고유치와 고유 모드를 효율적이고 신뢰성 있게 얻을 수 있다. 본 연구는 공력/ 구조 연계 문제로 그 적용 범위를 확장하여 연구될 계획이다.

## 참고 문헌

1. Lumley, J.L., 1971, *Stochastic tools in turbulence*, Academic Press.
2. P. Holmes, J. L. Lumley and G. Berkooz, 1996, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge University Press.
3. L. Sirovich, 1987, *Quarterly of Applied Mathematics* Vol.XLV, pp. 561-571, pp. 573-582, pp. 583-590, *Turbulent and the dynamics of coherent structures. Parts I-III: coherent structures.*
4. L. Sirovich and H. Park, 1990, *Physics of Fluids A- Fluid Dynamics* Vol.2, pp. 1649-1658, pp. 1659-1668. *Turbulent thermal convection in a finite domain Parts I-II: theory.*
5. H. M. Park and D. H. Cho, 1996, *Chemical Engineering Science*, Vol.51, pp. 81-98, *The use of the Karhunen-Loeve decomposition for the modeling of distributed parameter systems.*
6. H. T. Banks, M. L. Joyner, B. Wincheski and W. P. Winfree, 2001, *Inverse Problem* Vol.16, pp. 929-945, *Nondestructive evaluation using a reduced-order computational methodology.*
7. X. Ma, M. F. A. Azeez and A. F. Vakakis, 2000, *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol.14, pp. 37-48, *Non-linear normal modes and non-parametric system identification of non-linear oscillators.*
8. I. T. Georgiou and I. B. Schwartz, 1999, *SIAM Journal on Applied Mathematics* Vol.59, pp. 1178-1207, *Dynamics of large scale coupled structural mechanical systems: a singular perturbation proper orthogonal decomposition approach.*

9. J. P. Cusumano, M. T. Sharkady and B. W. Kimble, 1994, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Physical Sciences and Engineering* Vol.347, pp. 421-438, Experimental measurements of dimensionality and spatial coherence in the dynamics of a flexible-beam impact oscillator.
10. L. Sirovich, B. W. Knight and J. D. Rodriguez, 1990, *Quarterly of Applied Mathematics* Vol. XLVIII, pp. 535-548, Optimal low-dimensional dynamical approximations.
11. B.F. Feeny and R. Kappagantu, 1998, *Journal of Sound and Vibration* Vol.211, pp. 607-616, On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations.
12. A. Steindl, H. Troger, 2001, *International Journal of Solids and Structures* Vol.38, pp. 2131-2147, Methods for dimension reduction and their application in nonlinear dynamics.
13. M.F A. Azzez, A.F. Vakakis, 2001, *Journal of Sound and Vibration* Vol.240, pp. 859-889, Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations.
14. C. Wolter, R. Sampaio, 2001, *Proceedings of the First Brazilian Workshop in Applications of Dynamics and Control*, ABCM/SBMAC; Sao Carlos, Brazil, pp. 129-172, Karhunen-Loeve bases: applications to solid mechanics.
15. M.I. Friswell, J.E.T. Penny, S.D. Garvey, 1996, *Journal of Sound and Vibration* Vol.196, pp. 453-468, The application of the IRS and balanced realization methods to obtain reduced models of structures with local non-linearities.
16. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, 1955, *Functional analysis*, Frederick Ungar.