

미분구적법에 의한 Pasternak지반 위에 놓인 보-기둥의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Beam-columns Resting on Pasternak Foundation by Differential Quadrature Method

이 태 은[†] · 이 병 구* · 강 희 중**

Tae Eun Lee, Byoung Koo Lee, Hee Jong Kang

Key Words : differential quadrature method(미분구적법), free vibration(자유진동), natural frequency(고유진동수), beam-column(보-기둥), Pasternak foundation(Pasternak 지반)

ABSTRACT

This paper deals with the free vibration analysis of beam-columns resting on Pasternak foundation by the Differential Quadrature Method. Based on the differential equation subjected to the boundary conditions, adopted from the open literature, which governs the free vibrations of such member, this equation is applied to the Differential Quadrature Method. For computing natural frequencies, the numerical procedures are developed by QR Algorithm, in which the Chebyshev-Gauss-Lobatto method is used for choosing the grid points. The numerical methods developed herein for computing natural frequencies are programmed in FORTRAN code, and all solutions obtained in this study are quite agreed with those in the open literature.

1. 서 론

최근 구조공학 분야에서 구조해석을 위한 새로운 해석기법이 개발되어 각종 구조의 효율적인 구조해석이 가능해지고 있다. 이러한 전형적인 예 중의 하나가 미분구적법(Differential Quadrature Method: DQM)이다. DQM은 Bellman 등에 의해 학문분야에 처음으로 소개되었으며⁽¹⁾, 유한차분법의 과정에서 발생하는 복잡한 적분항의 계산과 이에 수반되는 많은 계산 시간을 줄일 수 있는 새로운 기법이다.

Kashef 등은 미분방정식의 초기치 경계조건 문제를 DQM을 이용하여 해석하였다.⁽²⁾ Naadiuthu 등은 화학원자의 구조해석에서 DQM을 이용하여 편미분방정식을 해석하였고⁽³⁾, 그 결과 9개의 격자점에 의한 DQM의 해석결과가 480개의 격자점에 의한 유한차분법의 결과와 동일한 수준임을 보였다. Civan 등은 푸이송 방정식, 다차원 문제, Thomas-Fermi 방정식까지 DQM을 일반화시키고 그 적용범위를 확장시켰다.⁽⁴⁾ Jang 등은 처음으로 구조공학 문제에 DQM을 적용하고⁽⁵⁾, DQM이 해의 정확성은 물론이며 계산

의 효율성에서도 다른 수치해석법과 비교하여 매우 우수한 방법임을 입증하였다. Laura 등은 Timoshenko 보의 해석⁽⁶⁾에서, Striz 등은 뼈대구조와 트러스 해석⁽⁷⁾에서 DQM을 이용하였다.

지반 위에 놓인 구조물의 거동 특성은 구조공학 및 기초공학 분야에서 중요한 연구 대상으로 이와 관련된 많은 연구들이 수행되고 있다. 지반-구조물의 상호작용과 관련된 문제는 지반 위에 놓인 구조로 모형화 할 수 있으며, 실제적인 예로서는 띠기초, 파이프라인 및 철도 궤도 등을 들 수 있다.

본 연구에서 지반모형은 지반의 연속성을 표현할 수 있는 Pasternak지반 모형을 채택하였다. Pasternak지반 모형은 탄성지반 위에 전단변형만을 일으키는 비압축성의 연직요소 즉, 전단층(shear layer)이 연결된 것으로 가정한 지반 모형으로서 지반연속성을 표현할 수 있는 개선된 모형이다.

이상과 같은 연구배경으로 본 연구에서는 Pasternak지반 위에 놓인 보-기둥의 자유진동 문제를 DQM을 이용하여 해석하고자 한다. 이를 위하여 단면이 부재축을 따라 직선적으로 변화하는 선형 변단면보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식에 DQM을 적용하여 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하고 이를 컴퓨터 프로그램화하였다. 수치해석 예에서는 변화높이, 변화폭 및 정방형 변단면 보-기둥의 다양한 제변수 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

[†] 정회원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과
E-mail : telee@wonkwang.ac.kr
Tel : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204

* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과

** 정회원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과

2. 변단면의 정의

DQM을 적용하여 Pasternak지반 위에 놓인 변단면 보-기둥의 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하기 위하여 먼저 연구대상 부재의 변단면을 정의한다. 이 연구에서는 도심축을 따라서 단면 제원이 직선으로 변화하는 선형 변단면을 대상구조로 채택하였다. 좌측단의 단면을 기준으로 부재축상 임의점에서의 단면적, 단면2차모멘트 및 단면폭을 다음 식 (1)-(3)과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁸⁾

$$I = I_a [1 + (r^{1/n} - 1)x/l]^n \quad (1)$$

$$A = A_a [1 + (r^{1/n} - 1)x/l]^m \quad (2)$$

$$d = d_a [1 + (r^e - 1)x/l] \quad (3)$$

위의 식에서 r 은 다음 식 (4)와 같은 단면비이다.

$$r = I_b / I_a \quad (4)$$

식 (1)-(3)에서 지수 e , m , n 은 단면형상에 따라 결정되는 단면형상계수이며, 본 연구에서 택한 높이 변단면(depth taper), 폭 변단면(breadth taper) 및 정방형 변단면(square taper)에 대한 e , m , n 값은 다음의 식들과 같다.⁽⁸⁾

$$\text{breadth taper } e=1, m=1, n=1 \quad (5a)$$

$$\text{depth taper } e=0, m=1, n=3 \quad (5b)$$

$$\text{square taper } e=1/4, m=2, n=4 \quad (5c)$$

3. 지배 미분방정식

그림 1은 압축하중 P 가 작용하고, 지간 길이가 l 이며, 양단부는 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있는 Pasternak 지반 위에 놓인 보-기둥의 진동형과 제변수를 나타낸 것이다. 부재축상 임의 좌표 x 에서 단면폭은 d , 단면적은 A , 단면 이차모멘트는 I 로 표시되어 있다. 이 그림에서 k 는 지반계수, G 는 전단지반계수이며, $v(x, t)$ 는 변형전 보-기둥의 축을 기준으로 측정된 진동변위로서 이를 조화진동식으로 표현하면 다음 식과 같다.

$$v(x, t) = v_i \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3, 4 \dots \quad (6)$$

식 (6)에서 v_i 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이고, ω_i 는 rad/s의 단위를 갖는 고유각진동수, t 는 시간, 첨자 i 는 모드번호이다.

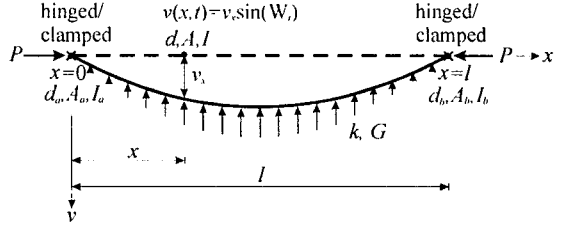


그림 1. Pasternak지반 위에 놓인 변단면 보-기둥의 변수

본 연구에서는 효율적인 수치해석을 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = v_i/l, \quad p = Pl^2/(\pi^2 EI_a) \quad (7-9)$$

$$\lambda = kd_a l^4/(\pi^4 EI_a), \quad g = Gl^2/\pi^4 EI_a \quad (10,11)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A_a / (EI_a)} \quad (12)$$

위에서 ξ , η 는 축방향 좌표와 진폭을 지간길이 l 로 정규화한 것이며, p 는 무차원 축하중, λ 는 무차원 지반계수, g 는 무차원 전단지반계수, c_i 는 무차원 고유진동수이며, 식 (12)에서 ρ 는 부재 재료의 질량밀도이다.

그림 1에 식 (6)과 동적 평형방정식을 적용하고 무차원 변수식 (7)-(12)를 이용하면 Pasternak지반 위에 놓인 변단면 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식 (13)과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = & -\frac{2n\alpha}{1+\alpha\xi} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + \left\{ -\frac{n(n-1)\alpha^2}{(1+\alpha\xi)^2} \right. \\ & \left. - \frac{\pi^2 p}{(1+\alpha\xi)^n} + \frac{\pi^4 g}{(1+\alpha\xi)^n} \right\} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \quad (13) \\ & + \left\{ c_i^2 \frac{(1+\alpha\xi)^m}{(1+\alpha\xi)^n} - \pi^4 \lambda \frac{1+\beta\xi}{(1+\alpha\xi)^n} \right\} \eta \end{aligned}$$

여기서,

$$\alpha = r^{1/n} - 1 \quad (14a)$$

$$\beta = r^e - 1 \quad (14b)$$

상미분방정식 (13)의 경계조건은 다음과 같다. 먼저 회전 지점에서 진동변위 v 와 휨 모멘트 $EI d^2 v/dx^2$ 가 "0"이므로 식 (7), (8)의 무차원 변수를 이용하면 다음과 같은 무차원 경계조건식을 얻는다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1 \text{에서} \quad (15a)$$

$$d^2 \eta / d\xi^2 = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1 \text{에서} \quad (15b)$$

고정지점에서 진폭 v 와 단면 회전각 dv/dx 가 “0”이므로 다음의 무차원 경계조건식을 얻는다.

$$\eta=0, \quad \xi=0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (16a)$$

$$d\eta/d\xi=0, \quad \xi=0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (16b)$$

4. 수치해석 방법

4.1 미분구적법

구조공학에서 자주 접하는 문제 중의 하나는 그림 2와 같은 적분문제이다. 함수 F 를 $dF/dx = f$ 와 같이 나타낼 때, 앞의 적분 값은 $F(b) - F(a)$ 이다. 실제의 공학문제에서 F 의 정확해를 얻는 것은 불가능한 경우가 많다. 또한 f 값은 이산된 점의 집합으로 이루어져 있는 경우가 대부분이며 이 때 수치적 적분은 필수적이다.

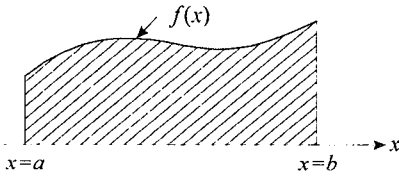


그림 2. 전형적인 적분문제

그림 2에서 $\int_a^b f(x)dx$ 는 $f(x)$ 의 곡선과 x 축 사이의 면적이며, 미분구적법에 의해 적분구적을 실행하기 위하여 격자점 x_i 에서 x 에 대한 $f(x)$ 의 1계도함수를 다음 식 (17)과 같이 미분구적으로 나타낸다.⁽¹⁾

$$f_x(x_i) = \frac{df}{dx} \Big|_{x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} f(x_j), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (17)$$

여기서, a_{ij} 는 가중계수이고, N 은 격자점 수이다.

이러한 미분구적의 정확도를 지배하는 가장 중요한 요인은 격자점의 선택과 가중계수의 정확성이다. 격자점을 미분구적법에서 이용하기 위해서는 $0 \leq X \leq 1$ 의 영역에서 $(N-1)$ 의 간격을 갖는 견본점 X_1, X_2, \dots, X_N 을 생성한다. 격자점의 견본점을 단순히 등간격으로 택할 수도 있지만, 정확한 결과를 얻으려면 부등간격의 견본점을 택하여 미분구적을 실행하는 것이 바람직하다. 즉, 구조물에 대한 적합한 격자점의 결정이 DQM에 의한 구조해석에서 가장 중요한 문제이다. 본 논문에서는 격자점의 선택방법으로 Shu 등이 제시한 Chebyshev-Gauss-Lobatto 방법⁽⁹⁾을 채택하였다.

다음으로 적절한 가중계수를 산출하기 위하여 1계도 함수의 가중계수는 Lagrange 보간다항식으로 2계도와 고계도 함수의 가중계수는 Mingle⁽¹⁰⁾이 제시한 방법을 채택하였다.

4.2 QR 알고리즘

QR 알고리즘은 행렬의 고유치를 계산하기 위한 방법이다. 이 방법을 간략하게 설명하기 위하여 행렬 A_1 과 A_2 를 다음과 같이 정의한다.

$$A_1 = Q_1 R_1, \quad A_2 = R_1 Q_1 \quad (18,19)$$

여기서, Q_1 은 직교행렬이고 R_1 은 상삼각행렬이다. A_1 이 대칭행렬이면, A_2 와 A_1 은 유사행렬이고, 결과적으로 A_2 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_2 = Q_2 R_2 \quad (20)$$

이러한 방법으로 A 가 대칭행렬이고 대각행렬이면 행렬 A_1, A_2, A_3, \dots 를 연속해서 구할 수 있다. 이를 이용하여 대칭행렬의 고유값을 계산할 수 있으며, 이를 위하여 먼저 대칭행렬을 Householder 변환방법을 이용하여 대각행렬의 형태로 만들고, 연속되는 유사행렬 A_i 를 구한다.

4.3 수치해석 과정

이상에서 설명한 DQM과 QR 알고리즘을 이용하여 Pasternak지반 위에 놓인 보-기둥의 무차원 고유진동수를 산출하는 수치해석 과정을 설명하면 다음과 같다.

1) 격자점의 선택

앞에서 언급한 Chebyshev-Gauss-Lobatto 방법을 이용하여 격자점을 선택하면 다음 식 (21)과 같다.⁽⁹⁾

$$x_i = \frac{1 - \cos[(i-1)\pi/(N_x-1)]}{2}, \quad i=1, 2, \dots, N_x \quad (21)$$

2) 1계도함수 가중계수

1계도함수 가중계수를 구하는 방법에는 Bellman 등⁽¹¹⁾, Quan 등⁽¹¹⁾ 및 Shu 등⁽⁹⁾이 제안한 방법 등이 있으며, 본 논문에서는 Shu 등이 제시한 방법을 사용하였다.

Shu 등이 제시한 방법에 의하여 1계도함수의 가중계수를 구하면 다음 식 (22a), (22b)와 같다.⁽⁹⁾

$$a_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_j)}{(x_i - x_j) M^{(1)}(x_j)}, \quad \text{for } i \neq j \quad (22a)$$

$$a_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_j)}{2M^{(1)}(x_j)} \quad (22b)$$

3) 2계 및 고계도함수 가중계수

2계도함수는 정의에 의하여 다음 식 (23)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_x^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N b_{ij} f(x_j), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (23)$$

식 (23)을 DQM으로 이산화하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} f_x^{(2)}(x_i) &= \sum_{k=1}^N a_{ik} f_x^{(1)}(x_k) = \sum_{k=1}^N a_{ik} \sum_{j=1}^N a_{kj} f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=1}^N a_{ik} a_{kj} \right] f(x_j) \end{aligned} \quad (24)$$

위의 식을 이용하여 다음 식 (25)를 구한다.

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} a_{kj} \quad (25)$$

$[A^{(1)}]$ 과 $[A^{(2)}]$ 를 다음 식 (26a), (26b)와 같이 정의하고, 식 (25)를 이용하여 식 (26c)를 구한다.

$$[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdot & \cdot & a_{MN} \end{bmatrix} \quad (26a)$$

$$[A^{(2)}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & \cdot & b_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{M1} & b_{M2} & \cdot & \cdot & b_{MN} \end{bmatrix} \quad (26b)$$

$$[A^{(2)}] = [A^{(1)}][A^{(1)}] \quad (26c)$$

위의 식 (26)은 2계도함수의 가중계수를 행렬의 곱으로 나타낸 것이다.

같은 방법으로 m 계도함수는 다음 식 (27)과 같이 나타낼 수 있으며, m 계도함수와 $(m-1)$ 계도함수의 가중계수 행렬은 $[A^{(m)}]$ 과 $[A^{(m-1)}]$ 를 이용하여 식 (28)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^{(m)} f}{\partial x^{(m)}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{(m-1)} f}{\partial x^{(m-1)}} = \frac{\partial^{(m-1)}}{\partial x^{(m-1)}} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (27)$$

$$[A^{(m)}] = [A^{(1)}][A^{(m-1)}] = [A^{(m-1)}][A^{(1)}] \quad (28)$$

$$m=2, 3, \dots, N-1$$

4) 경계조건 적용

본 연구대상 부재의 경계조건식 식 (15), (16)을 DQM에 적용하면 다음과 같다.

$$W_1 = 0 \quad (29)$$

$$\sum_{k=1}^N c_{1,k}^{(m0)} W_k = 0 \quad (30)$$

$$W_N = 0 \quad (31)$$

$$\sum_{k=1}^N c_{1,k}^{(n1)} W_k = 0 \quad (32)$$

$$W_2 = \frac{1}{AXN} \sum_{k=3}^{N-2} AXK1 W_k \quad (33)$$

$$W_{N-1} = \frac{1}{AXN} \sum_{k=3}^{N-2} AXKN W_k \quad (34)$$

여기서, $AXK1 = c_{1,k}^{(n0)} c_{N,N-1}^{(n1)} - c_{1,N-1}^{(n0)} c_{N,k}^{(n1)}$, $AXKN = c_{1,2}^{(n0)} c_{N,k}^{(n1)} - c_{1,k}^{(n0)} c_{N,2}^{(n1)}$, $AXN = c_{N,2}^{(n1)} c_{1,N-1}^{(n0)} - c_{1,2}^{(n0)} c_{N,N-1}^{(n1)}$ 이고, 경계조건에 따라서 고정지점이면 $n0 = n1 = 1$, 회전지점이면 $n0 = n1 = 2$ 이다.

이상의 식들을 이용하여 DQM에서 필요한 격자점 및 가중계수를 계산하고 상미분방정식 (13)을 DQM에 적용하면 다음 식 (35)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=3}^{N-2} C_3 W_k + \frac{2n\alpha}{1+\alpha\xi} \sum_{k=3}^{N-2} C_2 W_k + \left\{ \frac{n(n-1)\alpha^2}{(1+\alpha\xi)^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\pi^2 b}{(1+\alpha\xi)^n} - \frac{\pi^4 g}{(1+\alpha\xi)^n} \right\} \sum_{k=3}^{N-2} C_1 W_k \\ &= \left\{ c_i^2 \frac{(1+\alpha\xi)^m}{(1+\alpha\xi)^n} - \pi^4 \lambda \frac{1+\beta\xi}{(1+\alpha\xi)^n} \right\} W_i \end{aligned} \quad (35)$$

여기서,

$$C_1 = c_{i,k}^{(2)} - \frac{c_{i,2}^{(2)} AXK1 + c_{i,N-1}^{(2)} AXKN}{AXN} \quad (36a)$$

$$C_2 = c_{i,k}^{(3)} - \frac{c_{i,2}^{(3)} AXK1 + c_{i,N-1}^{(3)} AXKN}{AXN} \quad (36b)$$

$$C_3 = c_{i,k}^{(4)} - \frac{c_{i,2}^{(4)} AXK1 + c_{i,N-1}^{(4)} AXKN}{AXN} \quad (36c)$$

W_i , $i=1, 2, 3, \dots, N$ 은 표본점 X_i 에서 함수 값이며, $c_{i,k}^{(n)}$, $n=2, 3, 4$ 는 n 계도함수에서 미분구적법의 가중계수이다. 앞에서 언급한 경계조건을 적용시키면 식 (35)는 다음과 같은 행렬식으로 표시된다.

$$[A_n][W] = \Omega^2 \{W\} \quad (37)$$

위와 같은 형태의 고유치 문제를 푸는 데는 여러 가지 방법이 있으나, 여기서는 앞에서 설명한 QR 알고리즘을 이용하여 행렬의 고유치 Ω^2 을 구하고 이로부터 고유진동수 c_i 를 산출한다.

이상에서 설명한 방법들을 이용하여 Pasternak지반 위에 놓인 보-기둥의 자유진동을 해석할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 개발하였다.

5. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서 적용한 미분구적법의 수치해석 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 타 문헌⁽¹²⁾의 결과를 표 1에서 비교하였다. 이 표에서 보는 바와 같이 본 연구와 문헌의 결과는 오차가 0.2% 이내로 매우 우수하게 근접하고 있어 지반 위에 놓인 보-기둥의 고유진동수 산정에 DQM을 이용하는 것이 매우 효율적인 방법 중에 하나라고 사료된다.

격자점 수 N 과 무차원 고유진동수 c_i 와의 관계를 분석하기 위해 Chebyshev-Gauss-Lobatto 방법에 의하여 부등간격으로 격자점을 선택한 경우와 등간격으로 격자점을 선택한 경우에 대하여 $p=0.6, r=1.5, \lambda=50, g=1$ 인 부재의 무차원 고유진동수 c_i 와 N 의 관계를 표 2에 나타내었다. 부등간격의 경우에 $N=12$ 이상에서 c_i 는 유효숫자 4 자리에 수렴하였고 N 가 12 이상으로 증가하여도 c_i 는 더욱 정확한 값으로 수렴됨을 알 수 있다. 한편, 등간격으로 격자점을 선택한 경우에는 $N=12$ 이상에서는 c_i 를 구할 수 없었다. 이는 등간격으로 격자점을 선택하는 경우에는 $N=12$ 이상에서 DQM의 행렬값 계산이 계산불능상태(ill conditioned status)에 들어가므로 더 이상 DQM의 계산을 진행할 수 없기 때문이다. 따라서 Pasternak지반 위에 놓인 보-기둥의 자유진동해석에서 등간격보다는 부등간격으로 격자점을 선택하는 것이 바람직함을 알 수 있다. 두 방법으로 계산한 c_i 값들은 매우 근사하게 일치하지만 부등간격으로 산출한 c_i 값이 더 정확한 값이다.

Pasternak지반 위에 놓인 변단면 보-기둥의 자유진동특성을 고찰하기 위하여 부재의 각종 변수값을 변화시키면서 무차원 고유진동수 c_i 를 산출하고 이들을 그림에 나타내었다. 그림 3은 축하중 p 가 무차원 고유진동수 c_i 에 미치는 영향을 분석하기 위하여 고정-고정의 단부조건을 갖고, $r=$

표 1. 본 연구와 타 문헌의 무차원 고유진동수 비교
($p=0.6, r=1^*, \lambda=0.6, g=1$)

조건	비교	무차원 고유진동수		
		c_1	c_2	c_3
회전-회전	문헌[12]	13.96	42.11	91.21
	본 연구	13.96	42.11	91.10
	오차(%)**	0	0	0.12
회전-고정	문헌[12]	18.48	52.21	106.47
	본 연구	18.48	52.19	106.29
	오차(%)**	0	0.04	0.17

* $r=1$ 이면 단면형상계수 (e, m, n)는 고유진동수에 영향을 미치지 못함

** 오차(%) = |1 - 문헌 / 본 연구| × 100

표 2. 격자점 수 N 과 무차원 고유진동수 c_i 의 관계
($p=0.6, r=1.5, \lambda=50, g=1$)

단부 조건	N	무차원 고유진동수, c_i			
		Chebyshev-Gauss-Lobatto		등 간 격	
		c_1	c_2	c_1	c_2
고정 - 고정	6	72.71	83.82	72.75	83.43
	8	72.95	93.34	73.37	83.37
	10	72.93	92.03	73.26	92.54
	12	72.93	92.09	-	-
	14	72.93	92.08	-	-
	16	72.93	92.08	-	-
	18	72.93	92.08	-	-
회전 - 회전	6	70.14	75.39	70.38	75.83
	8	70.20	79.92	70.49	82.95
	10	70.20	79.17	70.48	80.03
	12	70.20	79.20	-	-
	14	70.20	79.20	-	-
	16	70.20	79.20	-	-
	18	70.20	79.20	-	-
	20	70.20	79.20	-	-

1.5, $\lambda=1, g=0.75$ 인 깊이 변단면 ($e=0, m=1, n=3$) 보-기둥에 대하여 p 를 변화시키면서 수치해석한 결과를 나타낸 것이다. 이 그림에서 인장력이 증가하면 부재가 긴장되어 진동에 대한 강성이 증가하게 되므로 c_i 는 증가하고, 압축력이 증가하면 c_i 는 감소한다. 압축력이 증가하여 그림에 □ 로 표시한 p 값에 도달하면 제 1 고유진동수가 "0"이 되는 것을 알 수 있다. 여기서 고유진동수 곡선과 하중축이 만나는 p 값이 주어진 보-기둥의 무차원 좌굴하중이 된다. 좌굴 이후의 하중에 대해서는 부재가 후좌굴 거동을 하게되어 좌굴하중 이후의 제 2, 제 3, 제 4 고유진동수 곡선은 무의미하므로 이 그림에는 나타내지 않았다.

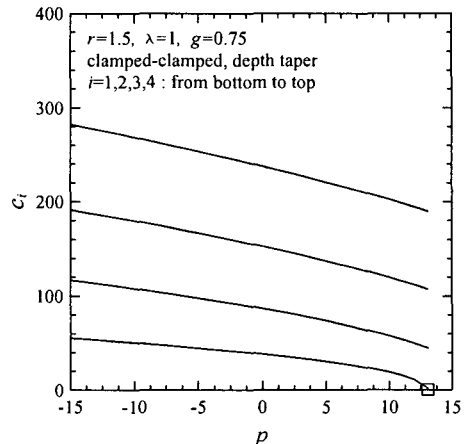


그림 3. c_i 와 p 의 관계곡선

그림 4는 무차원 지반계수 λ 가 무차원 고유진동수 c_i 에 미치는 영향을 분석하기 위하여 회전-회전의 단부조건을 갖고, $p=0.6$, $r=1.5$, $g=0$ 인 정방형 변단면($e=1/4$, $m=2$, $n=4$) 보-기둥에 대하여 λ 를 변화시키면서 수치해석한 결과를 나타낸 것이다. 이 그림에서 무차원 지반계수 λ 가 증가하면 지반의 강성이 증가하므로 무차원 고유진동수 c_i 가 증가하며, 작은 지반계수에서 증가율이 큰 것을 알 수 있다.

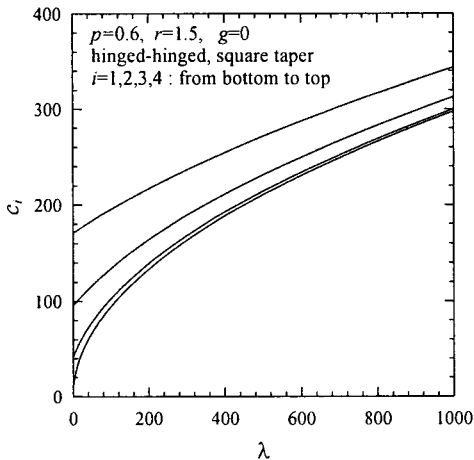


그림 4. c_i 와 λ 의 관계곡선

이상과 같은 Pasternak지반 위에 놓인 보-기둥에 대한 DQM의 적용성 검토에서 부재의 각종 변수값 변화에 대하여 안정적으로 수치해석해를 산출할 수 있음을 확인할 수 있었다.

6. 결 론

이 논문은 미분구적법(DQM)을 이용한 Pasternak지반 위에 놓인 보-기둥의 자유진동 해석에 관한 연구이다. 본 연구에서는 폭 변단면, 깊이 변단면 및 정방형 변단면의 3가지 선형 변단면에 대하여 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전의 3가지 단부조건을 고려하였다. 대상부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 DQM에 적용하여 고유진동수를 효율적으로 산출할 수 있는 프로그램을 작성하였다. 본 연구결과를 타 문헌의 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다. 분할방법 및 격자점 수와 무차원 고유진동수 사이의 관계를 표에 나타내었으며, 각종 변수변화에 따른 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하여 그림에 제시하였다. 본 연구의 결과로 실용적인 범위 내에서 다양한 제원을 갖는 지반 위에 놓인 변단면 보-기둥의 고유진동수를 산출하는데 DQM이 매우 효율적이고 적용성이 큰 방법임을 확인할 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 지역대학우수과학자 지원연구(과제번호: R05-2003-000-10568-0)의 연구비 지원으로 수행되었으며, 재단 당국의 지원에 감사 드립니다.

참 고 문 헌

1. Bellman, R. and Casti, J., "Differential Quadrature and Long-Term Integration," Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 34, 1971, pp. 235-238.
2. Kashef, B. and Bellman, R., "Solution of the Partial Differential Equation of the Hodgkin-Huxley Model Using Differential Quadrature," Mathematical Biosciences, Vol. 19, 1974, pp. 1-8.
3. Naadimuthu, G., Bellman, R. E., Wang, K. M., and Lee, E. S., "Differential Quadrature and Partial Differential Equations: Some Numerical Results," Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 98, 1984, pp. 220-235.
4. Civan, F. and Slipevich, C.M., "On the Solution of the Thomas-Fermi Equation by Differential Quadrature," Journal of Computational Physics, Vol. 56, 1984, pp. 343-348.
5. Jang, S. K., Bert, C. W., and Striz, A. G., "Application of Differential Quadrature to Static Analysis of Structural Components," International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 28, 1989, pp. 561-577.
6. Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H., "Analysis of Vibrating Timoshenko Beams Using Method of Differential Quadrature," Shock and Vibration, Vol. 1, 1993, pp. 88-93.
7. Striz, A. G., W., and Bert, C. W., "Static Analysis of Structures by the Quadrature Element Method," International Journal of Solids and Structures, Vol. 31, 1994, pp. 2807-2818.
8. Gupta, A.K., "Vibration of Tapered Beams," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 111, No. 1, 1985, pp. 19-36.
9. Shu, C. and Richards, BE, "High resolution of natural convection in a square cavity by generalized differential quadrature," Proceedings of Third Conference on Advanced Numerical Methods in Engineering: Theory and Application, Swansea, UK, Vol. 2, 1990, pp. 549-555.
10. Mingle, J. O., Computational considerations in nonlinear diffusion, Journal of Mathematical Analysis and Applications 60, 1977, pp.103-116.
11. Quan, J. R. and Chang, C. T., "New Insights in solving Distributed System Equations by the Quadrature Method - I. Analysis," Computers in Chemical Engineering, Vol. 13, 1989, pp. 779-788.
12. T. Yokoyama, "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," Computers & Structures, Vol. 61, 1996, pp. 995-1007.