

# 비비례감쇠 시스템의 고유치해석에 필요한 누락고유치 검사기법 Checking Techniques for Missed Eigenvalues of Nonproportionally Damped System

정형조\*· 조지성\*\*· 김병완\*\*\*· 이인원\*\*  
Hyung-Jo Jung, Ji-Seong Jo, Byoung-Wan Kim and In-Won Lee

**Key Words** : Missed Eigenvalue(누락고유치), Argument Principle(편각의 원리), Modified Sturm sequence property(개선된 Sturm 수열 성질), 비비례감쇠(Nonproportional Damping).

## ABSTRACT

This paper introduces the two recently developed checking techniques for missed eigenvalues of nonproportionally damped system. The first technique is based on the argument principle. On the other hand, the second one is based on Rombouts' algorithm and Gleyse's theorem, which has been known as the effective and well-proven method. In the paper, the main features of the two techniques are explained and their effectiveness is also investigated by considering a numerical example.

## 1. 서론

구조물의 동적해석에 있어서, 해석과정을 간단하고 쉽게 만들어주는 비례감쇠 (proportional damping)라는 가정은, 구조물-지반 시스템, 에너지 소산장치 부착 구조물이나 기초격리 시스템과 같이, 전체구조물이 감쇠가 현저히 다른 여러 부분의 조합으로 구성되는 시스템에는 적절하지 않다. 그러한 경우에는, 동적해석을 위해 비비례감쇠 (nonproportional damping) 행렬을 고려해야만 한다. 모드중첩법으로 동적해석을 하는 경우에는 고유치문제가 먼저 계산되어야 한다. 또한, 계산 과정에서 몇몇의 중요한 고유치가 누락된다면 정확도가 불충분해질 수 있기 때문에, 고유치해석에서는 누락고유치가 있는지 여부를 검사하는 것이 필수적이다. 하지만, 비비례감쇠 시스템의 경우에는, 비감쇠나 비례감쇠시스템에서 널리 사용되는 Sturm 수열 성질을 이용할 수가 없기 때문에 최근까지 이러한 시스템에 대한 적절한 누락고유치 검사기법이 존재하지 않은 상황이었다.

최근 들어, 비비례감쇠 시스템에 대한 두 가지의 누락고유치 검사기법이 개발되었다.<sup>(1-3)</sup> 먼저, 정 등<sup>(1,2)</sup>은 편각의 변화량과 관심 있는 영역 내에 존재하는 고유치 개수와의 관계를 설명해 주는 편각의 원리 (argument principle)를 이용한 누락고유치 검사기법을 제안하였다. 그들의 방법은

수치적인 반복법의 형태를 띄고 있기 때문에 다수의 검사점에 대해 행렬분해를 해야만 한다. 이 과정에서 과도한 연산회수가 소요되는 단점이 있고 또한 때때로 편각의 과도한 변화를 인지하지 못할 수 있다는 한계를 가지고 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위해, 조 등<sup>(3)</sup>은 Rombouts 알고리즘<sup>(4)</sup>과 Gleyse 정리<sup>(5)</sup>를 기반으로 하는 좀 더 체계적이고 잘 증명된 방법을 개발하였다. 그들의 방법은 편각의 원리-기반 방법과는 달리 단 한 번의 Schur-Cohn 행렬 분해만을 필요로 하였고, 또한 최종 검사과정이 기존의 Sturm 수열 성질과 매우 비슷하기 때문에 개선된 Sturm 수열 성질-기반 검사기법으로 명명하였다.

본 논문에서는, 이와 같은 두 검사기법의 특징과 내용을 좀 더 자세히 살펴보고, 수치예제를 통해 각 방법의 효용성을 검토하고자 한다.

## 2. 편각의 원리-기반 방법

비비례감쇠 시스템의 고유값은 식(1)과 같이 감쇠를 고려한 고유치문제를 계산하므로써 구할 수 있다:

$$\lambda_i^2 M \phi_i + \lambda_i C \phi_i + K \phi_i = 0, \quad (1)$$

여기서  $M$ ,  $C$  와  $K$  는 각각  $(n \times n)$  차의 질량, 감쇠, 강성행렬을,  $\lambda_i$  는  $i$  번째 고유치를,  $\phi_i$  는  $i$  번째 고유벡터를 의미한다.

식(1)과 같은 2 차 고유치문제에 대한 누락고유치를 검사하기 위해 편각의 원리를 이용하였다. 먼저, 고유치문제의 고유치와 특성다항식의 근과의 관계를 생각해보자. 즉, 식(1)과 같은 2 차 고

\* 세종대학교 토목환경공학과  
E-mail : hjung@sejong.ac.kr  
Tel : (02) 3408-3290, Fax : (02) 3408-3332

\*\* 한국과학기술원 건설 및 환경공학과

\*\*\* 한국해양연구원 해양안전시스템연구소

유치문제의 고유치는 다음과 같은 특성다항식의 근과 같다:

$$f(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) \\ = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{2n-1} \lambda^{2n-1} + a_{2n} \lambda^{2n} \quad (2)$$

여기서  $\lambda$  는 복소수이고  $a_i$  ( $i=0,1,\dots,2n$ ) 는 실수 계수이다. 그리고, 편각의 원리는 다음과 같이 특성다항식에 적용될 수 있다: 만약 다항식  $f(\lambda)$  가 단순 폐곡선  $S$  의 내부와 경계에서 해석적이라면, 다음과 같은 방정식이 도입된다.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad (3)$$

여기서  $N$  는 다항식  $f(\lambda)$  의 근의 개수이고  $\Delta\theta$  는  $\lambda$  가 단순 폐곡선  $S$  를 한바퀴 회전할 때 다항식  $f(\lambda)$  의 편각  $\theta$  의 변화를 의미한다.

식(3)의 의미는 다음과 같다. 다항식  $f(\lambda)$  가  $\lambda$ -평면에서 폐곡선  $S$  내에  $N$  개의 근을 갖는다면,  $f(\lambda)$  는  $f(\lambda)$ -평면에서 원점을  $N$  번 회전한다. 그림 1 에서 보는 바와 같이, 다항식  $f(\lambda)$  가  $\lambda$ -평면에서 폐곡선  $S$  내에 4 개의 근을 갖기 때문에 이동점  $f(\lambda)$  는  $f(\lambda)$ -평면에서 원점을 네 바퀴 회전한다.

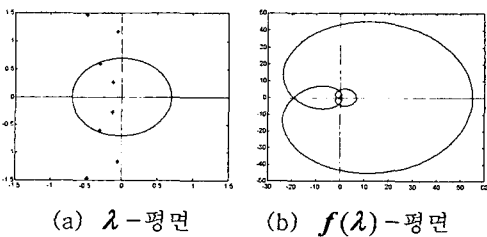


Fig. 1 편각의 원리

그러나, 대형 고유치문제의 특성 다항식을 대수 연산에 의해 직접 구하기는 어렵기 때문에, 수치적 또는 반복적인 접근 방법을 통해서 감쇠 행렬을 고려한 대형 고유치문제에 편각의 원리를 적용해야 한다. 반복적인 접근법을 수행하기 위하여 다음의 2 가지 절차를 이용하였다. 첫번째 절차는 단순 폐곡선  $S$  를 이산화하는 것이다. 두번째 절차는 특성다항식과  $LDL^T$  행렬분해에 의해 행렬 분해된 행렬 사이의 관계를 이용하는 것이다. 즉,

폐곡선  $S$  를 그림 2 에서 보는 바와 같이 검사점들의 집합으로 고려하고, 각 검사점에 대해  $LDL^T$  행렬분해를 수행한다. 그리고 나서 각 검사점의 편각을 다음과 같이 계산한다:

$$f(\lambda_j) = \det(\lambda_j^2 M + \lambda_j C + K) \\ = \det LDL^T = \prod_{i=1}^n d_{ii} = r_j \angle \theta_j \quad (4)$$

여기서  $d_{ii}$  대각행렬  $D$  의 대각요소이고,  $r_j$  와  $\theta_j$  는 각각 극좌표 형태의 값  $f(\lambda_j)$  의 크기와 편각을 의미한다. 폐곡선  $S$  내부에 존재하는 고유치의 개수는 각 검사점의 편각의 변화율 더함으로써 구할 수 있다.

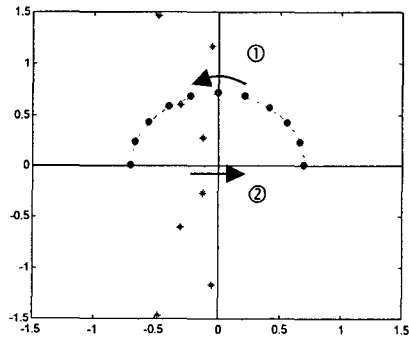


Fig. 2 편각의 원리 이용한 누락고유치 검사과정

그림 2 는 고유치 검사 과정을 간략하게 보여준다. 먼저, 반원을 따라가며 상반면에 검사점을 선정한다(①). 그리고 나서, 각 검사점에 대해서  $LDL^T$  행렬분해를 수행한다. 실수축에 대해서는 편각의 변화가 없기 때문에 검사 과정을 수행할 필요가 없다(②). 편각의 총 변화량은 각 검사점의 변화량을 더함으로써 얻어진다. 마지막으로, 총 회전 회수(식 (3)의  $N$ )와 고려한 고유치의 개수를 비교하여 누락된 고유치의 존재 여부를 검사한다.

### 3. 개선된 Sturm 수열 성질-기반 방법

편각의 원리-기반 방법의 문제점을 해결하기 위해 조 등<sup>(3)</sup>은 다른 검사기법을 개발하였다. 이를 위해, 도입된 주요 이론은 다음과 같다. 먼저, Rombouts 알고리즘을 이용하여 표준화된 고유치문제의 특성다항식의 계수를 구하였고, Gleyse 정리를 조금 수정하여, 임의의 open disk 에 존재하

는 고유치의 개수를 파악할 수 있었다. 이 방법의 보다 구체적인 절차는 표 1에 설명되어 있고, 보다 자세한 내용은 참고문헌 [3]에 있다.

Table 1 개선된 Summ 수열 성질-기반 방법의 알고리즘

- 1 단계: 표준 고유치문제로 변환 ( $A\phi = \lambda\phi$ )  
 - 주어진 고유치문제를 표준 형태로 변환한다.
- 2 단계: 특성다항식의 계수 계산  
 - Rombouts 알고리즘을 이용하여  $P(\lambda) = \sum_{h=0}^{2n} a_h \lambda^h = 0$ 의 계수  $a_h (h=0, \dots, 2n)$ 를 계산한다.
- 3 단계: open disk의 반경  $\rho$  결정  
 - 반경  $\rho (>0)$ 은 임의의 값이 가능하나, 고려되는 최대고유치의 크기보다 약간 크게 설정하는 것이 적절하다.
- 4 단계: 특성다항식 계수의 수정  
 - 2단계에서 구해진  $P(\lambda)$ 에  $\lambda = \rho\bar{\lambda}$ 를 대입한다.
- 5 단계: Schur-Cohn 행렬 구성  
 - Schur-Cohn 행렬  $T$ 를 특성다항식의 수정된 계수를 이용해 구성한다.
- 6 단계: Schur-Cohn 행렬의  $LDL^T$  행렬분해 수행  
 7 단계: 행렬  $D$ 의 양의 원소 개수 계산  
 - Open circle에서의 고유치의 개수는 행렬  $D$ 내의 양의 원소 개수와 같다.

#### 4. 수치예제

각 방법의 성능을 파악하기 위해 다음과 같은 수치예제를 고려하였다. 단순 스프링-질량-감쇠기 시스템<sup>(3)</sup>의 질량, 감쇠, 강성행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$M = mI \quad (5)$$

$$C = \alpha M + \beta K \quad (6)$$

$$K = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 Rayleigh 감쇠의 감쇠 계수를 의미한다. 이 시스템의 해석적인 해는 다음과 같은 관계식을 통해 구할 수 있다:

$$\lambda_{2i-1, 2i} = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad \text{for } i=1, \dots, n \quad (8)$$

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (9)$$

$$\omega_i = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \frac{2i-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

여기서  $\omega_i$ 와  $\xi_i$ 는 각각 비감쇠 고유진동수와 모드 감쇠비이다.

해석에 사용된 시스템의 차수는 10이다.  $k$ 와  $m$ 은 1이고, Rayleigh 감쇠의 계수  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 각각 0.05와 0.5이다. 모든 고유치와 복소평면에서의 반경은 표 2에 나타내었다.

Table 2 계산된 고유치

Mode Number	Eigenvalues( $\lambda$ )		Radius ( $\rho =  \lambda $ )
	Real	Imaginary	
1, 2	-0.0306	$\pm 0.1463$	0.1495
3, 4	-0.0745	$\pm 0.4388$	0.1495
5, 6	-0.1585	$\pm 0.7133$	0.4450
7, 8	-0.2750	$\pm 0.9614$	1.0000
9, 10	-0.4137	$\pm 1.1763$	1.2470
11, 12	-0.5624	$\pm 1.3540$	1.4661
13, 14	-0.7077	$\pm 1.4932$	1.6525
15, 16	-0.8368	$\pm 1.5959$	1.8019
17, 18	-0.9381	$\pm 1.6651$	1.9111
19, 20	-1.0028	$\pm 1.7046$	1.9777

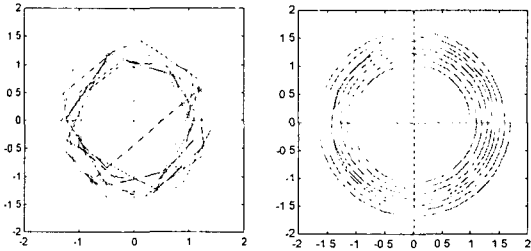
고려된 고유치의 개수는 16개이고 폐곡선 S 및 open disk의 반경은 16번째 고유치 크기의 1.005배로 하였다. 여기서는 정확한 고유치의 개수를 파악할 수 있기 때문에, 고려한 고유치의 개수를 정확히 계산할 수 있다는 것이 누락고유치를 제대로 검사할 수 있다는 의미가 된다.

먼저, 편각의 원리-기반 방법을 통해 누락고유치를 검사해 보겠다. 폐곡선 S의 상반원은 맨 처음에 48개의 검사점으로 등분되었다. 가장 큰 고유치 주변에서는 편각의 변화가 클 것으로 예상되므로 좀 더 세밀하게 검사점을 설정하였다. 그리하여 얻어진 총 편각의 변화량은 2880°이다. 따라서, 회전 회수는 다음과 같다.

$$N = \frac{\sum \Delta\theta_j}{2\pi} = \frac{2880^\circ}{360^\circ} = 8$$

즉, 복소평면에서 반경  $\rho$ 를 갖는 원 내에 존재하는 고유치의 개수는 16(=8×2)이고, 이는 표 2의 결과와 일치한다. 즉, 누락고유치는 존재하지 않는다.

이 방법에서 유의해야 할 것은 과도한 편각의 변화로 인해 원점을 중심으로 하는 회전 회수를 정확하게 파악하지 못 할 수 있다는 점이다. 그림 3a 에서 볼 수 있듯이, 검사점이 소수인 경우(검사점 개수=48 개)에는 순간적으로 편각이 변해버리기 때문에 (편각의 변화량이 180°이상일 땐), 그림 3b 와 같이 (검사점 개수=1000 개)보다 세분해서 계산해야만 한다. 하지만 이런 경우에는 행렬 분해과정이 그만큼 많이 반복해서 수행되어야 하므로 전체 연산회수가 과도하게 증가한다는 단점이 있다.



(a) 검사점이 소수인 경우 (b) 검사점이 많은 경우  
Fig. 3 검사점의 개수에 따른 편각의 변화량

Table 3 개선된 Sturm 수열 성질-기반 방법 결과

$i$	$\rho = 1.005,  \lambda_{16}  = 1.8109$			
	$\bar{a}_i$	$d_{ii}$	sign of $d_i$	$\nu$
0	1.0000e-2	-	+	-
1	1.4034e-1	2.0691e+6	+	-
2	2.6190e+0	2.0691e+6	+	-
3	2.0305e+1	2.0691e+6	+	-
4	1.3467e+2	2.0690e+6	+	-
5	6.3241e+2	2.0663e+6	+	-
6	2.4684e+3	2.0543e+6	+	-
7	7.7049e+3	1.9066e+6	+	-
8	2.0299e+4	1.7472e+6	+	-
9	4.4632e+4	9.1824e+5	+	-
10	8.3822e+4	7.8539e+5	+	-
11	1.3349e+5	7.7102e+4	+	-
12	1.8217e+5	7.1261e+4	+	-
13	2.1093e+5	-1.1134e+4	-	1
14	2.0769e+5	-6.6954e+3	+	2
15	1.7086e+5	2.1307e+2	+	-
16	1.1666e+5	1.7810e+2	+	-
17	6.3635e+4	-3.4793e+0	-	3
18	2.7036e+4	-2.6561e+0	+	4
19	7.9432e+3	4.5488e-3	+	-
20	1.4384e+3	3.6052e-3	+	-

개선된 Sturm 수열 성질-기반 방법으로 해석하는 경우의 결과는 표 3 에 나타내었다. 표의 마지막 열에서 볼 수 있듯이, 부호 변화 개수는 4 이다. 즉, 고유치의 개수는 20-4=16 이 된다. 이 값은 행렬 D 에서 양의 부호를 갖는 원소의 개수와 같음을 알 수 있다. 이상에서 볼 수 있듯이, 개선된 Sturm 수열 성질-기반 방법은 보다 간단하게 분명하게 누락고유치를 검사할 수 있다.

## 5. 결론

본 논문에서는 감쇠행렬을 고려한 고유치문제에서 고유치의 누락여부를 파악하기 위해 최근에 개발된 두 가지 검사기법을 검토하였다. 먼저, 편각의 원리를 이용한 검사기법은 대형 고유치문제에 적용하기 위해서 반복적인 접근법이 도입되었는데, 수치예제의 해석을 통해 방법이 정확하게 누락고유치를 검사함을 증명하였지만, 다수의 검사점에서 많은 행렬분해를 수행해야만 하는 문제점이 있음도 확인하였다. 반면에, 개선된 Sturm 수열 성질-기반 방법은 Rombouts 알고리즘과 Gleyse 정리를 이용하여 Schur-Cohn 행렬을 구성하고 이 행렬을 한 번만 행렬분해하여 대각행렬의 부호 변화를 통해 고유치개수를 확인할 수 있는 방법이기 때문에 이론적으로나 수치해석 결과를 통해서 보다 손쉽게 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 하지만, 이 방법을 대형 고유치문제에 적용하기 위해서는 추가적인 연구가 수행되어야만 한다.

## 참고 문헌

- (1) Jung, H.-J., Kim, D.-H., and Lee, I.-W., 2001, "Technique of Checking Missed Eigenvalues for Eigenproblem with Damping Matrix," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 55-66.
- (2) 정형조 등, 2002, "감쇠행렬을 고려한 고유치문제의 누락된 고유치 검사 기법", 한국지진공학회 논문집, 4(2), 47-56.
- (3) Jo, J.-S., Jung, H.-J., Ko, M.-G., and Lee, I.-W., 2003, "Eigenvalue-counting Methods for Non-proportionally Damped Systems," *International Journal of Solids and Structures*, 40, 6457-6472.
- (4) Rombouts, S., and Heyde, K., 1998, An Accurate and Efficient Algorithm for the Computation of the Characteristic Polynomial of a General Square Matrix," *Journal of the Computational Physics*, 140, 453-458.
- (5) Gleyse, B., and Moflih, M., 1999, "Exact Computation of the Number of Zeros of a Real Polynomial in the Open Unit Disk by a Determinant Representation," *Computers and Mathematics with Applications*, 38, 257-263.