

유공 보강 후판의 진동해석

Vibration Analysis of Stiffened Opening Thick Plate

○ 이효진* · 이용수† · 김일중** · 오숙경*** · 정진택****

Lee, Hoy Jin, Lee, Yong Soo, Kim, Il Jung, Oh, Soog Kyoung and Cheong, Chen Taek

Key Words : Free Vibration, Thick Plate, Pasternak Foundation, Opening Plate, Natural Frequency, Stiffener

ABSTRACT

This paper is analysis of stiffened opening thick plate on foundation. This paper has the object of investigating natural frequencies of opening thick plates on Pasternak foundation by means of finite element method and providing Kinematic design data for mat of building structures. In this paper, vibration analysis of rectangular opening thick plate is done by use of Serendipity finite element with 8 nodes by considering shearing strain of plate. And vibration analysis of stiffener is done by used of Timoshenko beam-column element with 3 nodes. It is shown that natural frequencies depend on not only Winkler foundation parameter but also shear foundation parameter, opening position, opening size, stiffener size.

기 호 설 명

$2\bar{a} \times 2\bar{b}$: 전체판의 크기

D : 판의 휨강성

E : 탄성계수

G : 전단탄성계수

h : 판 두께

k_w : Winkler 지반강성

k_s : 전단지반강성

$SFP = \frac{k_s \bar{a}^2}{D}$: 전단지반계수

$WFP = \frac{k_w \bar{a}^4}{D}$: Winkler 지반계수

ρ : 단위 체적당질량

ν : 푸아송비

w : 판의 수직처짐

θ_x : 판의 x 방향 회전각

θ_y : 판의 y 방향 회전각

ω : 판의 고유진동수

T : 판의 운동에너지

U : 판의 변형에너지

1. 서론

최근 건축물은 점점 고층화, 대형화 추세이며 이로 인해 건축물의 지하구조물의 중요성이 커지게 되었다. 건축물의 지하구조물은 주변의 인위적인 환경 자극과 지반상태에 따라 많은 영향을 받으며, 이에 대응할 수 있는 안전한 구조물의 설계가 요구된다.

건축물 바닥의 짐수정, 파이프 덕트 등 설비를 배관하기 위한 개구부나 상하 통로로 이용하기 위한 개구부가 있는 경우 구조적 안정을 위해 보강재를 이용하여 개구부를 보강할 수 있다.

지하층 바닥의 경우 지반위에 놓여진 후판으로 모형화 할 수 있다. 지반과 구조물은 상호간에 동적영향을 미치므로 지반위에 놓인 개구부에 보강재를 가진 후판의 진동해석을 함으로써 유공 보강 후판의 고유진동수를 구함으로써 구조물에 진동에 의한 영향을 최소화시킬 수 있으며, 구조체의 특히 판구조물의 동적설계의 근간이 된다.

1950년대 D. Young¹⁾, G. B. Warburton²⁾에 의해 장방형 판의 진동해석이 이루어진 후 A. W. Leissa³⁾에 의해 1973년 다양한 조건하에 장방형판의 자유진동이 해석되었고, 1976년 D. J. Gorman⁴⁾ 등은 지지조건이 다른 장방형판들에 대해 중첩법을 사용하여 자유진동 해석을 행하였다. 1997년 R. O. Grossi⁵⁾ 등은 원형 개구부를 갖는 장방형판의 자유진동해석

† 책임저자, 정회원, 원광대학교 건축학부 정교수
전화: 063-850-6709; Fax: 063-843-0782

E-mail: struct@wonkwang.ac.kr

* 정회원, 원광대학교 대학원 건축공학과 석사과정

** 정회원, 전북과학대학 건축·토목계열 조교수

*** 정회원, 공학박사

**** 정회원, 원광대학교 대학원 건축공학과 석사과정

을 하였고, 1998년 Mecit Celik⁶⁾ 등은 Two-Para meter 지반 상의 판을 해석하였다. 2003년 A. V. Singh⁷⁾ 등에 의해 개구 부를 갖는 박판의 유한 변위 정적해석이 이루어졌다.

국내에서는 1979년 권택진⁸⁾에 의해 유공후판의 탄성해석에 관한 연구가 이루어졌으며, 이용수 등은 1994년 탄성지 지 유공 보강판의 좌굴해석⁹⁾, 1999년 탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석¹⁰⁾을 하였고 이병구¹¹⁾ 등은 Pasternak 지반에 지지된 곡선보의 자유진동 해석에 대한 연구 결과를 발표하였다.

문헌고찰의 결과, pasternak 지반으로 지지된 유공 보강 판에 대한 연구는 찾아볼 수 없었다.

본 연구에서는 유한요소법을 적용하여 Pasternak 지반으로 지지된 유공보강 후판의 자유진동해석을 하였다.

후판의 유한요소는 판요소는 8절점 Serendipity 요소계를 보강재요소는 3절점 유한요소를 적용하였다. 판해석은 Mindlin 판 이론을, 보해석은 Timoshenko 보-기둥 이론을 적용하였다. 구조물을 지지하는 지반은 전단층을 추가하여 지반의 연속성을 고려한 Pasternak 지반으로 모델링 하였다.

2. 보강후판의 진동 해석

2.1 가상일의 원리

판요소와 보요소의 운동 에너지 T 와 변형 에너지 U 를 각각 구하여 각 요소의 운동에너지와 변형 에너지를 조합하고 이들의 변분을 0으로 놓아 고유치 방정식을 구한다. 이 고유치 방정식의 해가 판의 고유진동수가 되고 이 고유 진동수에 대응하는 고유 벡터가 진동모드가 된다.

가상 일의 원리에 의하여 다음 방정식이 얻어진다.

$$\delta (T - U) = 0 \quad (1)$$

여기서, T : 판 전체요소의 운동에너지

U : 판 전체요소의 변형에너지

(1) 후판요소

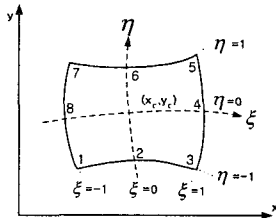


Fig. 1 8-nodes serendipity element system

Fig. 1과 같이 8절점 Serendipity 요소를 사용하는 경우 요소내의 임의의 위치에 대한 변위와 회전변위를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [M] \{ \delta_e \} \quad (2)$$

여기서

$$\{ \delta_e \} = [w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \dots, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}]^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

(2)식을 이용하여 변형에너지(U_e), 운동에너지(T_e)를 구하면 다음과 같다.

$$U_e = \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [K_e] \{ \delta_e \} + \frac{1}{2} \{ w_e \}^T [K_{ef}] \{ w_e \} \quad (3)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [M_e] \{ \delta_e \} \quad (4)$$

여기서

$[K_e]$: 후판요소의 휨강성행렬

$[K_{ef}]$: 탄성지반의 요소강성행렬

$[M_e]$: 후판요소의 질량 행렬

(2) 보요소

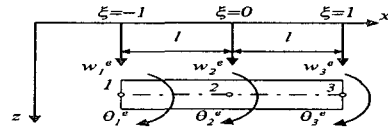


Fig.2 Timoshenko Beam-column element system

Fig.2와 같이 임의의 점의 변위와 회전각은 다음과 같은 변위함수로 정의 된다.

$$w(\xi) = N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2 + N_3(\xi)w_3$$

$$= \sum_{i=1}^3 N_i w_i = [N_w] \{ q \}^e \quad (5a)$$

$$\theta(\xi) = N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 + N_3(\xi)\theta_3$$

$$= [N_\theta] \{ q \}^e \quad (5b)$$

여기서

$\{q\}^e$: Timoshenko 보-기둥요소의 요소절점 변위벡터

(5)식을 이용하여 보요소의 변형에너지(U_{be}), 운동에너지(T_{be})를 구하면 다음과 같다.

$$U_{be} = \frac{1}{2} \{q\}^e \tau [K]_b^e \{q\}^e + \frac{1}{2} \{q\}^e \tau [K]_s^e \{q\}^e \quad (6)$$

$$T_{be} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^e \tau [M]_b^e \{\dot{q}\}^e \quad (7)$$

여기서

$[K]_b^e$: 보요소의 휨·전단강성행렬

$[K]_s^e$: 탄성·전단지반강성행렬

$[M]_b^e$: 보요소의 병진·회전관성 연속질량행렬

2.2 고유치 방정식

판 요소와 보요소의 운동에너지와 변형에너지를 전체 판에 대한 것으로 조합하고 (1)식에 대입하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_E] - \omega^2 [K_M] = 0 \quad (15)$$

여기서

$[K_E]$: $[K_e]$, $[K_{e_b}]$ 를 판요소 전체에 대해 조합한 전체 강성행렬

$[K_M]$: $[M_e]$ 를 판요소 전체에 대해 조합한 전체 질량행렬

ω : 판의 고유 원진동수

3. 검증 및 적용

3.1 검증

유공 보강판의 자유진동해석 프로그램의 정밀도를 검증하기 위해 본 연구해와 문헌해를 비교한다.

Table 1 Natural frequency of square plate on homogeneous foundation $\lambda^2 = \omega^2 a^2 \sqrt{\rho/D}$

WFP	SFP	This Paper Solutions	Reference[12]	Error
0	0	17.4342	17.4486	0.083
10		17.7067	17.7208	0.079
10^2		19.9915	20.0042	0.063
10^3		35.4956	35.5028	0.020
10^4		98.5611	98.5331	0.028
0	10	22.2006	22.2117	0.050
10		22.4150	22.4261	0.049
10^2		24.2596	24.2698	0.042
10^3		38.0572	38.0638	0.017
10^4		99.4756	99.4473	0.028

Table 1에서 무차원 Winkler지반 파라미터 (WFP) 와 무차원 전단지반 파라미터(SFP)를 각각 변화시키며 기존 참고문헌[12]와 비교하였다.

Winkler 지반과 전단지반의 변화에 해를 비교한 결과 최대 0.083%의 오차를 보였다.

3.2 유공판의 자유진동

앞 절에서 자유진동 대해 본 연구해와 문헌해를 비교하였다. 그 결과, 본 연구의 결과가 매우 높은 정도를 보임을 알 수 있었다. 따라서 본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 비균질 Pasternak 지반으로 지지된 유공 보강 후판의 자유진동해석을 시행하였다.

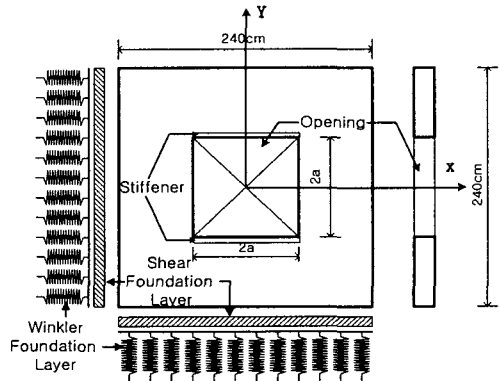


Fig. 3 Opening plate modelling on Pasternak foundation

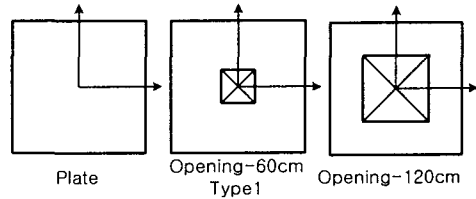


Fig. 4 Opening size and position of the plates

유공 보강 후판의 자유진동해석을 위해 Fig. 3과 같이 지반은 Pasternak 지반으로 모델링하여 Winkler지반 파라미터, 전단지반 파라미터를 변화시켰으며, Fig. 4와 같이 판의 개구부의 크기, 판의 두께, 보강재의 크기를 변화시키며 자유진동 해석을 하였다.

해석에 사용한 지반 및 보강판의 기계적, 기하적 제한은 다음과 같으며, 이 연구에서 보강판의 지지조건은 4변 단순지지에 국한하였다.

탄성계수 (E): $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

포와송 비 (ν): 0.167

지지조건: 4변 단순지지

판의 질량 밀도 (ρ_b): $2.448 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3$

판의 크기: $240\text{cm} \times 240\text{cm}$

판 두께: 12cm, 15cm

Winkler 지반 변수 (WFP): 0, 10, 100, 1000

전단 지반 변수 (SFP): 0, 5, 10, 15

개구부 크기: $60\text{cm} \times 60\text{cm}, 120\text{cm} \times 120\text{cm}$

보강재의 크기 : $\delta (= A_b/bh) : 0.1, 0.2$

$\gamma (= EI_b/bD) : 0.4, 0.5, 1.0, 2.0$

Fig. 5~Fig. 8은 유공판의 판두께, 개구부 크기, 보강재의 크기, 지반파라미터 변화에 따른 고유진동수를 나타낸 것이다.

Fig. 5는 WFP=100으로 일정하고 개구부의 크기가 12cm인 판의 보강재 크기에 따른 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 보강재가 없을 경우에 비해 보강재가 있을 경우 고유진동수의 크기가 증가함을 보이나 보강재가 있을 경우 보강재의 크기 변화에 따라 고유진동수 변화는 크지 않음을 볼 수 있다.

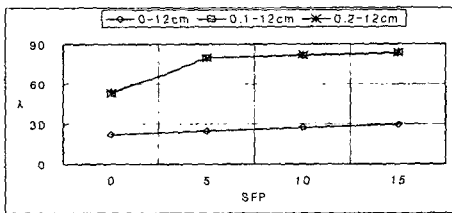


Fig. 5 variations natural frequency of plate versus variation of stiffener

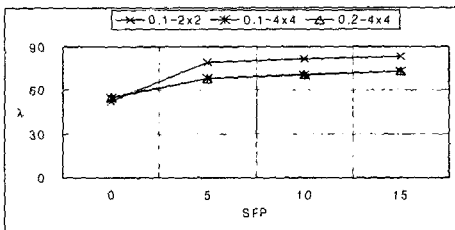


Fig. 6 variations natural frequency of plate versus variation of opening size

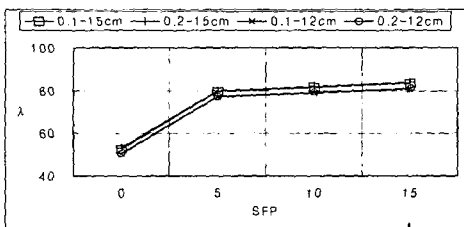


Fig. 7 Variations natural frequency of plate versus variation of plate thickness

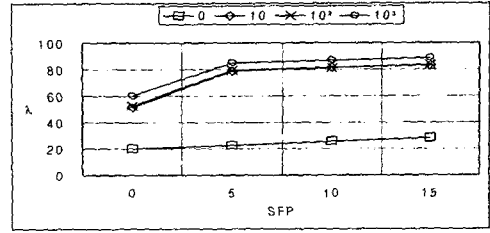


Fig. 8 Variations natural frequency versus foundation parameters

Fig. 6은 WFP=100이고 판의 두께가 12cm인 경우 판의 개구부 크기 변화에 따른 고유진동수의 변화를 나타낸 것으로 개구부의 크기가 커질수록 고유진동수는 감소함을 볼 수 있다.

Fig. 7은 WFP=100으로 일정하고 개구부의 크기가 60cm로 일정한 경우 판의 두께 변화에 따른 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 판의 두께가 증가함에 따라 고유진동수는 증가함을 볼 수 있다.

Fig. 8은 개구부 크기가 60cm이고 판의 두께가 12cm인 경우 지반 파라미터(SFP, WFP) 변화에 따른 판의 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 SFP와 WFP가 증가함에 따라 유공 보강 판의 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.

4. 결론

본 연구는 Pasternak 지반 위에 놓인 유공 보강 후판의 자유진동해석 관한 것이다. 유공판의 지반은 지반의 연속성을 고려한 Pasternak 지반으로 모형화하고, 판해석은 Mindlin 판 이론을 적용하였으며 보강재 해석을 위해 Timoshenko 보-기둥이론을 적용하였다.

본 연구의 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 연구에서 산출한 지반 위에 놓인 판의 고유진동수는 문헌 해와 매우 근사하였다.
- 2) 보강재가 없을 경우에 비해 보강재가 있을 경우 고유진동수의 크기가 증가함을 볼 수 있다.
- 3) 보강재가 있는 경우 개구부의 크기가 커짐에 따라 고유진동수는 감소하나, 판의 두께가 두꺼워질수록 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.
- 4) 지반강성들이 증가함에 따라 유공 보강 후판의 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.

참고 문헌

- (1) D. Young, "Vibration of rectangular plates by the riz method" J. appl. Mech.17, 448-453. 1950
- (2) G. B. Warburton, "The vibration of retangular plates",

- proc.Institute of Mechanical Engineers, pp.371-384. 1953
- (3) A. W. Leissa, "Vibration of plates". NASA SP-160 (1969)
- (4) D. J. Gorman. "Free Vibration Analysis of Rectangular Plates", Elsevier, New York 1982
- (5) R.O.Grossi, B.V.Arenas, P.A.A.Laura. "Free vibration of rectangular plates with circular openings", Ocean Engng. Vol.24, No.1, pp.19-24, 1997
- (6) M. Celik, A. Saygun, "A Method for the Analysis of Plates on a Two-Parameter Foundation", Journal of Computer and Structures, vol(36), pp 2891-2915, 1998
- (7) A. V. Singh, U. K. Paul, "Finite displacement static analysis of thin plate with an opening-a variational approach", Journal of Solids and Structures, pp.4135-4151, March 2003
- (8) 권택진, "유공후판의 탄성해석에 관한 연구", 대한건축학회, 제 23권 제 90호. pp.23-29, 1979. 10.
- (9) 이용수 외, "탄성지지 유공 보강판의 좌굴해석", 대한건축학회. 제 10권 제 73호. pp.307-314, 1994. 11.
- (10) 이용수 외, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표 논문집, 제 12권 통권 제23호, pp 35-42, 1999
- (11) 이병구 외, "탄성지반위에 놓인 곡선형 Timoshenko보의 자유진동". 전산구조공학. 제 11권 제 2 호. 1998. 6.
- (12) Hirayoki Matsunaga, "Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations", Journal of Engineering Mechanics, pp.27-34, January 2000