

# 능동구속층 감쇠를 이용한 판의 동역학적 해석 Dynamic Analysis of Plates with Active Constrained Layer Damping

박철휴\*  
Chulhue Park

**Key Words** : Piezoelectric material (압전체), Vibration control (진동제어), Active constrained layer damping (능동구속층감쇠), Viscoelastic material (점탄성체)

## ABSTRACT

This paper presents Newtonian formulation of the dynamics of plates treated fully with Active Constrained Layer Damping (ACL D). The developed equations of the plate/ACL D system provide analytical models for predicting the dynamic of laminated plates subjected to passive and active vibration damping controls. Numerical solutions of the analytical models are presented for simply-supported plates in order to study the performance of the plate/ACL D system for different control strategies. The developed models present invaluable means for designing and predicting the performance of the smart laminated plates that can be used in many critical engineering applications.

## 1. 서론

본 논문에서는 고전적인 감쇠 방법인 수동구속층감쇠 (PCLD) 방법을 보완한 능동구속층감쇠 (ACL D) 방법의 진동감쇠효과에 관해 논의해보자 한다. 능동 구속층감쇠는 각각 감지기와 가진기 역할을 하는 두개의 압전체와 그 사이에 점탄성체가 삽입된 형태로 이루어져 있다. 그러므로 본 구조물은 외부의 힘에 의한 시스템의 진동을 직접 압전효과에 의해 모니터를 할 수 있으며, 그 반대의 효과로 인해 진동을 제어 할 수 있는 가진기의 역할도 동시에 수행 가능하다. 이러한 원리로 인해 본 스마트 구조물은 종래의 수동구속층 감쇠에 의해 발생되어지는 전단효과를 감지기를 걸쳐 피드백 되어지는 압전전압에 의해 더욱 더 증가시켜 진동감쇠효과를 배가시킨다.

이러한 원리로 작동되어지는 스마트구조물의 수학적인 모델링을 위해 Rao 와 Nakra<sup>(1)</sup>의 수동 전단 모델과 Lee<sup>(2)</sup>의 압전 가진기와 감지기 방정식을 본 능동구속층 감쇠 판 구조물의 동역학적 해석 이론의 기초로 하였다. 본 논문에서는 능동 구속층 감쇠 판 시스템의 지배방정식을 뉴턴방법 (Newtonian formulation) 을 이용하여 유도하였고 수치해석을 통하여 양단으로 지지된 (simply - supported) 판의 진동효과를 입증하기 위하여 수치 모사를 수행하였다.

## 2. 판/ACL D의 구성방정식

### 2.1 변위-변형률 관계

두개의 압전체와 점탄성체로 이루어진 능동구속층감쇠층을 그림 1 에 나타내었다. 그림 1 에서 처럼 네층으로 이루어진 판/ACL D 구조물은 감지기층과 판층을 합하여 하나의 등가층을 이루어 합 삼층 구조물로 이루어져 있다. 판의 길이는  $a$ , 폭은  $b$ , 두께는  $h_p$ , 탄성계수는  $E_p$ , 밀도는  $\rho_p$ 로 나타내고, 점탄성체의 두께는  $h_s$ , 밀도는  $\rho_s$ , 복소전단계수는  $G_2 = G'(1+i\eta_2)$ 로 나타낸다. 여기서  $G'$  전단저장계수 (shear storage modulus) 이고  $\eta_2$  는 주파수와 온도에 종속하는 손실계수이다. 압전가진기의 두께는  $h_3$ , 탄성계수는  $E_3$  그리고  $x$  와  $y$  방향에 대한 압전상수는  $d_{31}$  와  $d_{32}$  이다.

Kirchhoff 판 이론에 따라 각 층의  $x$  와  $y$  방향의 종변위는 다음과 같다.

$$u_e = u_1 - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_e = v_1 - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1)$$

$$u_a = u_3 - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_a = v_3 - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2)$$

그리고

$$u_2 = \left( \frac{u_3 + u_1}{2} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{h_1 - h_3}{4} \right)$$
$$v_2 = \left( \frac{v_3 + v_1}{2} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \frac{h_1 - h_3}{4} \right). \quad (3)$$

아래첨자  $e, a, 2$  는 감지기층과 판의 등가층, 압전 가진기층, 그리고 점탄성체를 각각 표시한다. 그리고  $z$  는 각층의 중립면에서부터 측정된 좌표이다. 각층에 대한 변형률은 막변형률(membrane strains)과 굽힘 변형률 (bending strains)로 나타내면

\* 포항공과대학교, 기계공학과  
E-mail : drparkch@postech.ac.kr  
Tel : (054) 279-3928, Fax : (054) 279-5899

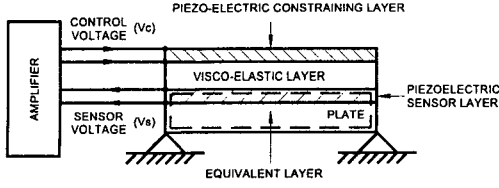


Fig.1 Schematic drawing of plate/ACLD system.

등가층인 경우

$$[\varepsilon_1]_e = \frac{\partial u_1}{\partial x} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad [\varepsilon_2]_e = \frac{\partial v_1}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$[\varepsilon_6]_e = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - 2z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (4)$$

가진기층인 경우

$$[\varepsilon_1]_a = \frac{\partial u_3}{\partial x} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - d_{31} E_a \Lambda(x, y),$$

$$[\varepsilon_2]_a = \frac{\partial v_3}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - d_{32} E_a \Lambda(x, y),$$

$$[\varepsilon_6]_a = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - 2z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (5)$$

이때,  $\Lambda(x, y)$  는 압전체의 분포 형상 함수이다. 즉, 균일 분포인 경우  $\Lambda(x, y)=1$  이된다. 그리고 점탄성체의 전단 변형률은 등가층과 가진기층의 기하학적 변위로부터 구할 수 있다.

$$[\gamma_{xz}]_v = \left( \frac{d}{h_2} \right) \left[ \left( \frac{u_3 - u_1}{d} \right) - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right],$$

$$[\gamma_{yz}]_v = \left( \frac{d}{h_2} \right) \left[ \left( \frac{v_3 - v_1}{d} \right) - \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \quad (6)$$

여기서  $d=(h_2 + h_1/2 + h_3/2)$  이고  $h_1, h_2, h_3$  는 각각 등가층, 점탄성체층, 가진기층의 두께를 나타낸다.

## 2.2 변위-응력 관계

등가층, 가진기층 그리고 점탄성체층의 변형률에 상응하는 응력은 등가층인 경우

$$[\sigma_1]_e = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right],$$

$$[\sigma_2]_e = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right],$$

$$[\sigma_6]_e = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - 2z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]. \quad (7)$$

압전기층인 경우

$$[\sigma_1]_a = \frac{E_3}{1-\nu_3^2} \left[ \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \nu_3 \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$- \left( \frac{E_3}{1-\nu_3^2} \right) \left( \frac{V_a \Lambda(x, y)}{h_3} \right) (d_{31} + \nu_3 d_{32}),$$

$$[\sigma_2]_a = \frac{E_3}{1-\nu_3^2} \left[ \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} + \nu_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$- \left( \frac{E_3}{1-\nu_3^2} \right) \left( \frac{V_a \Lambda(x, y)}{h_3} \right) (d_{32} + \nu_3 d_{31}),$$

$$[\sigma_6]_a = \frac{E_3}{2(1+\nu_3)} \left[ \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) - 2z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right], \quad (8)$$

이때  $V_a$  는 압전체에 가해지는 가진 전압이다. 점탄성체층의 전단 응력은 다음과 같다.

$$[\tau_{xz}]_v = G_2 [\gamma_{xz}]_v, \quad [\tau_{yz}]_v = G_2 [\gamma_{yz}]_v \quad (9)$$

## 2.3 합성힘과 합성모멘트

각층에 작용하는 합성힘은 앞에서 구한 응력식 (7)-(9) 을 적분함으로써 구할 수 있다. 감지기층과 판층으로 이루어진 등가층의 경우 합성힘은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{bmatrix}_e = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}_e dz = \begin{bmatrix} (A_{11})_e & (A_{12})_e & 0 \\ (A_{21})_e & (A_{22})_e & 0 \\ 0 & 0 & (A_{66})_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서  $N_1$  과  $N_2$  는 수직 합성힘이고,  $N_6$  는 전단 합성힘이다. 등가층의 연장강성(Extensional stiffness)  $(A_{ij})_e$  은 그림 2 에서처럼 병렬로 연결된 두개의 스프링 시스템으로 모델링할 수 있다. 그러므로 등가 연장계수 행렬  $[A_{ij}]_e$  은 다음처럼 구할 수 있다.

$$= \begin{bmatrix} A_p + A_s & \nu_p A_p + \nu_s A_s & 0 \\ \nu_p A_p + \nu_s A_s & A_p + A_s & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{1-\nu_p}{2} \right) A_p + \left( \frac{1-\nu_s}{2} \right) A_s \end{bmatrix} \quad (11)$$

이때  $A_p = \frac{E_p h_p}{1-\nu_p^2}$  이고  $A_s = \frac{E_s h_s}{1-\nu_s^2}$ .

각층에 작용하는 합성모멘트는 앞에서 구한 응력식 (7)-(9)에다  $z$  를 곱한 후에 적분함으로써 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix}_e = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}_e z dz = \begin{bmatrix} (D_{11})_e & (D_{12})_e & 0 \\ (D_{21})_e & (D_{22})_e & 0 \\ 0 & 0 & (D_{66})_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x^1 \\ k_y^1 \\ k_{xy}^1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

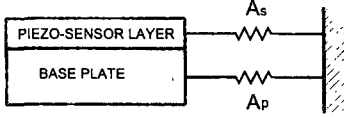


Fig. 2 A model of extensional stiffness for the plate/sensor layer

$M_1$ 과  $M_2$  는 수직 합성 모멘트이고,  $M_6$  는 비틀림 합성 모멘트이다. 등가층의 굽힘강성  $[D_{ij}]_e$  은 다음과 같다.

$$= \begin{bmatrix} D_p + D_s & \nu_p D_p + \nu_s D_s & 0 \\ \nu_p D_p + \nu_s D_s & D_p + D_s & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\nu_p}{2}\right)D_p + \left(\frac{1-\nu_s}{2}\right)D_s \end{bmatrix} \quad (13)$$

즉,  $[D_{ij}]_e = [D_p] + [D_s]$ 이고 이때  $[D_p]$ 와  $[D_s]$ 는 각각 판층과 감지기층의 굽힘 강성이다.

$$[D]_p = \frac{E_p (t_3^3 - t_1^3)}{3(1-\nu_p^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_p}{2} \end{bmatrix},$$

$$[D]_s = \frac{E_s (t_3^3 - t_2^3)}{3(1-\nu_s^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_s & 0 \\ \nu_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_s}{2} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

여기서,  $t_1, t_2, t_3$  는 그림 3 에서처럼 중립면에서의 각층의 가장자리까지의 거리이며 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$t_1 = \frac{E_p h_p^2 + 2E_s h_p h_s + E_p h_s^2}{2(E_p h_p + E_s h_s)},$$

$$t_2 = t_1 + h_p, \quad t_3 = t_1 + h_p + h_s. \quad (15)$$

압전기층인 경우에는 연장강성과 굽힘강성은 단순히 다음과 같이 주어진다.

$$[A_{ij}]_a = \frac{E_3 h_3}{(1-\nu_3^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_3 & 0 \\ \nu_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D_{ij}]_a = \frac{E_3 h_3^3}{12(1-\nu_3^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_3 & 0 \\ \nu_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_3}{2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

마지막으로 점탄성체의 전단력은 다음과 같다.

$$[Q_x]_v = h_2 [\tau_{xx}]_v, \quad [Q_y]_v = h_2 [\tau_{yy}]_v. \quad (17)$$

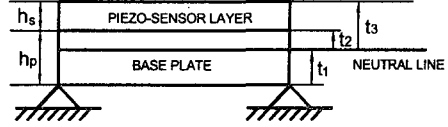


Fig. 3 Theoretical parameters of an equivalent single layer

### 3. 판/ACLD 시스템의 운동방정식

Newton의 제 2 법칙을 이용하여 판/ACLD 시스템의 운동방정식을 유도하였다. 그림 4 에서는 각층의 미소 체적요소를 자유물체도에 나타내었다. 힘의 균형에 의한 시스템의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)_j + \left(\frac{\partial N_6}{\partial y}\right)_j + T_{1j} = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

$$\left(\frac{\partial N_2}{\partial y}\right)_j + \left(\frac{\partial N_6}{\partial x}\right)_j + T_{2j} = \rho_i h_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}\right)_j + 2\left(\frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y}\right)_j + \left(\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}\right)_j + T_{3j},$$

$$= \rho_i h_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_i(x, y, t) \quad (18)$$

이때  $j=e, a$  이고  $i=1, 3$ . 또한  $T_1, T_2, T_3$  는 다음과 같이 정의되어 진다.

$$T_{1e} = (\tau_{xx})_e, \quad T_{2e} = (\tau_{yz})_e, \quad T_{3e} = \frac{h_1}{2} \left( \frac{\partial T_{1e}}{\partial x} + \frac{\partial T_{2e}}{\partial y} \right),$$

$$T_{1a} = -(\tau_{xx})_a, \quad T_{2a} = -(\tau_{yz})_a, \quad T_{3a} = -\frac{h_3}{2} \left( \frac{\partial T_{1a}}{\partial x} + \frac{\partial T_{2a}}{\partial y} \right) \quad (19)$$

여기서  $q_i(x, y, t)$  는 구조물에 작용하는 외부힘이다. Newton의 제 2 법칙을 점탄성체에 적용하면,

$$h_2 \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + q_v = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (20)$$

앞에서 유도한 합성힘과 합성모멘트를 운동방정식 (18)에 대입하면 다음의 판/ACLD 시스템의 미분방정식을 구할 수 있다.

$$\left[ \left( \frac{E_p h_p}{(1-\nu_p^2)} + \frac{E_s h_s}{(1-\nu_s^2)} \right) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{E_p h_p}{2(1-\nu_p)} + \frac{E_s h_s}{2(1-\nu_s)} \right) \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} \right) \right]$$

$$+ \left[ \left( \frac{E_p h_p}{2(1+\nu_p)} + \frac{E_s h_s}{2(1+\nu_s)} \right) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \right] + G_2 \left[ \frac{u_3 - u_1}{h_2} - \frac{d}{h_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$= (\rho_p h_p + \rho_s h_s) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right),$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{E_p h_p}{1-\nu_p^2} + \frac{E_s h_s}{1-\nu_s^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{E_p h_p}{2(1-\nu_p)} + \frac{E_s h_s}{2(1-\nu_s)} \right) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{E_p h_p}{2(1+\nu_p)} + \frac{E_s h_s}{2(1+\nu_s)} \right) \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) \right] + G_2 \left[ \frac{\nu_3 - \nu_1}{h_2} - \frac{d}{h_2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\ & = (\rho_p h_p + \rho_s h_s) \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right), \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{E_3 h_3}{(1-\nu_3^2)} \left[ \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right) + \frac{(1+\nu_3)}{2} \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{1-\nu_3}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) \right] \right. \\ & - G_2 \left[ \frac{u_3 - u_1}{h_2} - \frac{d}{h_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \rho_3 h_3 \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right) \\ & + \frac{\partial \Lambda}{\partial x} (C_{11} d_{31} + C_{12} d_{32}) + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} (C_{61} d_{31} + C_{62} d_{32}), \\ & \left[ \frac{E_3 h_3}{(1-\nu_3^2)} \left[ \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} \right) + \frac{(1+\nu_3)}{2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{1-\nu_3}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} \right) \right] \right. \\ & - G_2 \left[ \frac{\nu_3 - \nu_1}{h_2} - \frac{d}{h_2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = \rho_3 h_3 \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} \right) \\ & + \frac{\partial \Lambda}{\partial x} (C_{61} d_{31} + C_{62} d_{32}) + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} (C_{21} d_{31} + C_{22} d_{32}), \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{E_p (t_2^3 - t_1^3)}{3(1-\nu_p^2)} + \frac{E_s (t_3^3 - t_2^3)}{3(1-\nu_s^2)} \right] \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \\ & + \frac{E_3 h_3^3}{12(1-\nu_3^2)} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + G_2 \frac{d}{h_2} \left[ \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - d \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t) \\ & - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} (H_{11} d_{31} + H_{12} d_{32}) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (H_{61} d_{31} + H_{62} d_{32}) \\ & - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} (H_{21} d_{31} + H_{22} d_{32}). \quad (23) \end{aligned}$$

이때  $\rho \equiv \rho_p h_p + \rho_s h_s + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$ .  $C_{ij}$  와  $H_{ij}$  다음식으로 정의되어진다.

$$C_{ij} = [Q_{ij}] V_o, \quad H_{ij} = z_o [Q_{ij}] V_o \quad (24)$$

여기서 평면응력강성  $[Q_{ij}]$ 는 다음과 같다.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_3}{1-\nu_3^2} & \frac{\nu_3 E_3}{1-\nu_3^2} & 0 \\ \frac{\nu_3 E_3}{1-\nu_3^2} & \frac{E_3}{1-\nu_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_3}{2(1+\nu_3)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$z_o$  는 중립면에서 압전 가진기까지의 모멘트암이다. 위의 지배 방정식은 압전전압이 가해졌을 때의 판/ACLD 시스템의 동력학적 특성을 나타낸다.

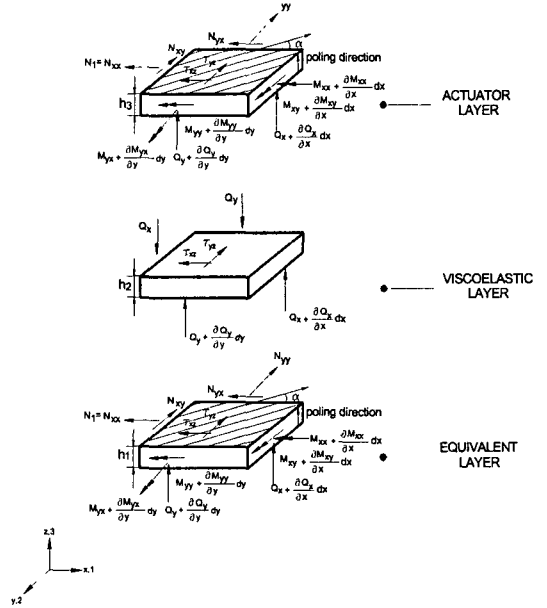


Fig. 4 Free body diagram of plate/ACLD system

## 4. 압전 감지기와 가진기 방정식

### 4.1 압전가진기 방정식

양단지지 판/ACLD 구조물은 다음의 double Fourier series 를 사용하여 수치적으로 풀 수가 있다.

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{imn}(t) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ v_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{imn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ v_a &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{amn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (26) \end{aligned}$$

여기서  $i=1,3$  이고  $U_{imn}, V_{imn}, W_{mn}, V_{amn}$  은 시간에 종속되는  $x, y$  축에 대한 중변위,  $z$  축에 대한 횡변위, 그리고 압전전압 모달계수이다. 식 (26)를 미분 방정식 (21)-(23)에 대입하면,

$$[M_{ij}] \ddot{x}(t) + [K_{ij}] x(t) = \{F_c\} \quad (27)$$

여기서  $x(t) = \{U_{1mn}(t), V_{1mn}(t), U_{3mn}(t), V_{3mn}(t), W_{mn}(t)\}$ ,  $[M_{ij}]$  과  $[K_{ij}]$ 는 판/ACLD 구조물의 질량과 강성 행렬이다. 압전 가진기에서 피드백되는 제어힘 벡터인  $\{F_c\}$  다음과 같다.

$$\{F_i\} = \{0, 0, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}^T \quad (28)$$

여기서

$$\phi_3 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)(d_{31} + \nu_3 d_{32}) \left(\frac{E_3}{1-\nu_3^2}\right) V_{amn},$$

$$\phi_4 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)(d_{31}\nu_3 + d_{32}) \left(\frac{E_3}{1-\nu_3^2}\right) V_{amn},$$

$$\phi_5 = z_a \left(\frac{E_3}{1-\nu_3^2}\right) \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 (d_{31} + \nu_3 d_{32}) + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 (d_{31}\nu_3 + d_{32}) \right] V_{amn} \quad (29)$$

#### 4.2 압전감지기 방정식

진동하는 구조물에 부착된 압전감지기에 축적되는 전하 (charge) 는 전기필드변위 (electric field displacement) 를 이용하여 구할 수 있다<sup>(3)</sup>.

$$q(t) = \iint_s D dx dy, \\ \{D\} = [d]^T \{T\} + [\epsilon]^T \{E\}. \quad (30)$$

여기서  $q(t)$ ,  $[d]$ ,  $\{T\}$ ,  $[\epsilon]$  와  $\{E\}$  각각 전하, 압전상수, 응력, 유전투과율, 전기필드를 나타낸다. 식 (30) 으로부터 감지기의 전하는 다음과 같다.

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} x(t) \quad (31)$$

이때  $A_{mn} = [A_1, A_2, 0, 0, A_5]$ .

$$A_1 = -\left(\frac{b}{n\pi}\right)(\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1)(d_{31} + \nu_3 d_{32}) \left(\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\right),$$

$$A_2 = -\left(\frac{a}{m\pi}\right)(\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1)(d_{31}\nu_3 + d_{32}) \left(\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\right),$$

$$\text{그리고 } A_5 = z_s (\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1) \left(\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\right) \left[ \left(\frac{mb}{na}\right) (d_{31} + \nu_3 d_{32}) + \left(\frac{mb}{na}\right) (d_{31}\nu_3 + d_{32}) \right]$$

압전감지기 전압은 전체 감지기 전하에서 압전 캐패시턴스 (capacitance) 를 나눔으로써 구할 수 있다.

$$V_s(t) = \frac{1}{C} q(t), \quad (32)$$

이때  $C = 8.854 \left(10^{-12}\right) A k_{31} / h_s$ .  $A$  는 압전감지기의 표면적,  $K_{31}$  압전체의 유전상수이다. 압전 감지기로부터 피드백되어 비례와 미분이득에 의해 증폭된 가진기전압식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{amn} = -k_p V_s - k_d (dV_s / dt) \quad (33)$$

여기서  $k_p$  와  $k_d$  는 각각 비례와 미분이득이다.

## 5. 수치모사

앞에서 유도한 판/ACLD 시스템의 지배방정식의 정확성을 검증하기 위하여 Johnson 과 Kienholz<sup>(4)</sup> 의 3 층 복합판에 대한 연구결과와 비교 하였다. 본 비교를 위하여 사용된 알루미늄판의 사이즈는 0.3048x 0.3480m 이고 두께는 0.762mm, 탄성계수는 68.9GPa, 포아송비 0.3 그리고 밀도 2.74E3kg/m<sup>3</sup> 이다. 샌드위치된 점탄성체는 두께 0.254mm, 전단탄성계수 0.896 Mpa, 손실계수 0.5 그리고 질량밀도는 0.999E3kg/m<sup>3</sup> 이다. 본 논문과의 비교는 모달 주파수와 손실계수를 비교함으로써 수행되어졌는데 그 결과는 표 1 에 나타나 있듯이 2%내외의 정확성을 보여준다.

**Table 1** Comparison of modal frequencies and associated loss factors of present analysis with the results

modal number	Johnson and Kienholz		Present analysis	
	Freq. (Hz)	L. F.*	Freq. (Hz)	L.F.
(1,1)	60.3	0.190	60.5	0.1901
(1,2)	115.4	0.203	115.8	0.2034
(2,1)	130.6	0.199	131.0	0.1992
(2,2)	178.7	0.181	179.2	0.1806
(1,3)	195.7	0.174	196.2	0.1736

\* L.F. stands for Loss Factor.

주어진 모드에 대한 주파수와 손실계수는 다음의 식을 사용하여 구하였다<sup>(5)</sup>.

$$\omega = \sqrt{\text{Re}(\omega^*)^2}, \quad \eta = \text{Im}(\omega^*)^2 / \text{Re}(\omega^*)^2 \quad (34)$$

이때  $\omega^*$  는 복소 주파수이다.

본 연구에서 사용되어진 판/ACLD 구조물에서의 알루미늄은 크기는 0.508x0.254m 이고 점탄성체는 soundcoat 사의 DYAD 606 (25°C 데이터)를 사용하였다. 압전체는 압전상  $d_{31}=23\text{E}-12$  (m/V),  $d_{32}=3\text{E}-12$  (m/V)를 가지고 상대투과율이  $k_{31}=12$  인 PVDF 를 사용하였다. 표 2 에서 기본적인 파라미터를 나타내었다.

**Table 2.** Physical and geometrical properties of the plate, viscoelastic and PVDF layer

Layer	Thickness (m)	Young's Modulus	Density (kg/m <sup>3</sup> )	Poisson's ratio ( $\nu$ )
AL	4.064E-4	7.1E10	2700	0.33
DYAD	5.08E-5	*	1105	0.49
PVDF	2.8E-5	2.5E9	1780	0.3

\* Depending on temperature and frequency (Soundcoat product data sheet-DYAD-606)

그림 5-7 은 판/ACLD 구조물의 세 개의 모드에 대한 댐핑이 없을 때, 수동감쇠층 (점탄성체만 있을 때), 그리고 능동구속층감쇠 (점탄성체와 압전체를 동시에 작동시켰을 때)에 대한 시간 응답을 나타내었다. 그림 5-7로부터 수동감쇠층 방법은 첫모드(16

Hz)에서는 그렇게 효과적이지 못하나 고주파수대 모드 (144 Hz 와 403 Hz)일수록 진동 감쇠효과가 증가함을 알 수 있다. 비례이득  $k_p=5000$  와 미분이득  $k_f=500$  을 사용했을 때의 능동구속층 감쇠방법을 수동구속층 감쇠방법, 그리고 비감쇠일 때와 비교 하였을 때 능동구속층 감쇠방법이 판/ACLD 구조물의 진동감쇠에 있어 가장 효과적임을 알 수가 있다. 특히, 주파수에 비례하여 이득의 증가하는 미분이득에 의하여 구조물의 세틀링시간(settling time)이 고차모드로 갈수록 급격히 감소됨을 알 수가 있다. 그러므로 능동구속층 감쇠방법은 수동구속층 감쇠방법보다 뛰어난 것을 알 수가 있으며, 만일에 제어기가 작동되지 않을 경우에도 수동구속 감쇠층의 존재로 인한 안전장치(fail-safe)를 구비한 감쇠 방법이다.

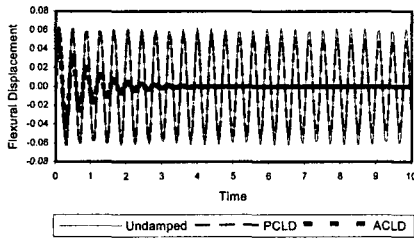


Fig.5 Time response of flexural disp. for m and n=1

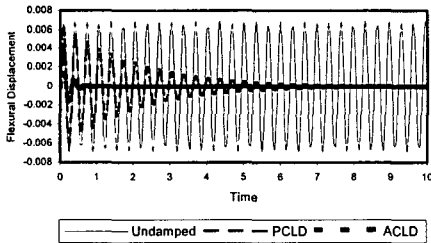


Fig. 6 Time response of flexural disp. for m and n=3

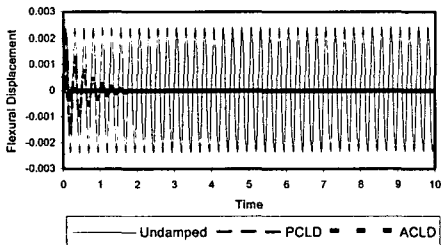


Fig.7 Time response of flexural disp. for m and n=5

## 6. 결론

본 논문에서는 기본 구조물에 감지기와 가진기 역할을 하는 두개의 압전체와 그 압전체에 샌드위치된 점탄성체로 이루어진 지능구조물에 대한 지배 방정식을 뉴턴의 법칙을 이용하여 유도하여 단순지진된 판/ACLD 구조물에 대한 수치모사를 수행하였다. 판/ACLD 구조물의 세 개의 모드에 대한 능동구속층 감쇠방법의 효과를 알아보기 위하여 댐핑이 없을 때 경우와 수동구속층 감쇠 방법인 경우에 대한 시간 응답을 측정하여 보았다. 그 결과 능동구속층 감쇠방법은 수동구속층 감쇠방법보다 뛰어난 것을 알 수가 있었으며, 만일에 제어기가 작동되지 않을 경우에도 수동구속 감쇠층의 존재로 구조물의 진동을 감쇠할수 있는 안전장치(fail-safe)를 구비한 감쇠 방법으로 평가 되었다.

## 참고문헌

- (1) Rao, Y.V.K.S. and Nakra, B.C., 1974, "Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 34(3), pp.309-326.
- (2) Lee, C. K., 1987, *Piezoelectric Laminates for Torsional and Bending Modal Control: Theory and Experiment*. Ph.D Thesis, Cornell University, Ithaca, NY.
- (3) IEEE Std. 176-1987, *IEEE Standard on Piezoelectricity*, The Institute of Electrical and Electronic Engineers, see pp. 9-15.
- (4) Johnson, C.D. and Kienholz, D.A., 1982, "Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers", *AIAA Journal*, Vol. 20, pp.1284-1290.
- (5) Cupial, P. and Nizioł, J., 1995, "Vibration and Damping Analysis of A Three-Layered Composite Plate With A Viscoelastic Mid-Layer", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 183(1), pp. 99-114.