한국소음진동공학회 2004년도 춘계학술대회논문집, pp. 320~325.

일정 가속 주행질량에 의한 외팔보의 동적응답

Dynamic Response of Cantilevered Beams Subjected to a Travelling Mass with a Constant Acceleration

류봉조* · 윤충섭* · 김희중** · 이규섭***

B. J. Ryu, C. S. Yoon, H. J. Kim and G. S. Lee

Key Words : Dynamic response(동적응답), Cantilevered beam(외팔보), Travelling mass(이동질량), Constant acceleration (일정 가속도)

ABSTRACT

The paper deals with the dynamic response of a cantilevered beam under a travelling mass with constant acceleration. Governing equations of motion taking into account all inertia effects of the travelling mass are derived by Galerkin's mode summation method, and Runge-Kutta integration method is applied to solve the differential equations. The effects of the speed, acceleration and the magnitude of the travelling mass on the response of the beam are fully investigated. A variety of numerical results allows us to draw important conclusions for structural design purposes.

Ⅰ. 서 론

주행물체에 의한 구조물의 동적응답 및 진동에 관한 문제의 예들은 탄환의 발사에 의한 포신의 거동문제, 가공과정의 기계 구조물, 거더 위를 움직이는 천정크레인, 총신(gun barrels)의 거동 등을 들 수 있고, 이러한 주행물체에 의한 구조물의 진동과 동적응답에 관한 연구는 철도가 건설되기 시작한 이래 많은 연구자들의 관심이 되어 왔다[1~2]. 위의 연구들이 주로 주행하중의 크기만을 고려한 구조물의 동적응답이나 진동 문제 등에 대한 연구들인데 비해 주행질량의 관성력을 고려한 보의 응답 연구가 Stanisic 과 Hardin[3] 에 의해 이루어졌는데 이들은 임의의 개수의 주행 집중질량들에 의한 단순지지 보의 응답을 해석적으로 연구하였다.

이러한 주행하중이나 주행질량으로 인한 구조물의 동적응답과 진동에 관한 연구 속에서 Ting과 그의 공동연구자들[4] 은 구조물과 주행물체 사이의 상호 작용력에 주행질량의 속도 변화에 관계된 관성 항을 포함시킨 최초의 연구자로서, 이들은 주행 집중질량이 일정 속도로 이동할 때의 동적 처짐을 유한차분법과 실험을 병행하여 연구하였다.

한편, 구조물 위를 이동하는 주행물체의 동적 응답을 총신이나 이동 탄환 질량에 의한 구조응답문제로의 적용 연구들도 이루어졌는데 Simkins와 그의 공동연구자들[5] 은 발사체의 총탄과 그 총열의 탄도변화에 대하여 관심을 가져오던 중, 압력과 시간에 따라 변하는 변동 이동하중을 받는 비구속 M113 총열의 축대칭 탄도 변화에 대해 Nastran 상용 패키지를 이용하여 유한요소해석 하였고, Simkins[6] 는 이동하중을 받는 단순지지보 처짐과 이동질량을 받는 단순지지보 처짐을 유한요소법으로 연구하였다. 그 후 Suzuki[7] 는 가속도가 일정한 주행하중을 받으며 탄성 기초 위에 놓인 단순보의 동적거동을 연구하였고, 국내의 연구로서 류봉조[8] 는 일정 속도와 가속도를 갖는 이동질량에 의한 단순지지 보의 동적응답을 유연성 영향함수를 이용한 유한차분법으로 구하였다.

Olsson[9] 은 이전의 연구자들이 해 온 일정속도의 크기를 갖는 이동하중이 단순지지보 위를 지날 때에 대한 동적응답을 다시 구하였고, *Esmailzadeh*와 *Ghorashi*[10] 는 이동질량의 관성력 항을 추가하여 이동질량에 의한 보의 진동해석을 하였다. 또한, Ghorashi[11] 는 이동질량과 차량 등에 의해 야기되는 Euler-Bernoulli보의 동적해석과 진동해석을 하였고 Esmailzadeh와 Ghorashi[12~13] 는 이동질량을 점 질량(point mass)으로 간주하거나, 분포질량으로 간주할 경우의

* 정회원, 한밭대학교
E-mail : bjryu701@hanbat.ac.kr
Tel : (042)821-1159, Fax: (042)821-1587
* 한밭대학교
** 한밭대학교 대학원
*** (주)대한선행기술

Euler-Bernoulli 보의 동적응답을 유한차분법으로 구하였다.

Lin[14]은 이동질량의 관성력에 추가하여 코리올리력과 원심력항도 고려한 동적 처짐을 Euler-Bernoulli 보에 대해 구하였고, Lee[15]는 일정 속도의 주행질량이 보 구조물 위를 지날 때 보 구조물과 주행질량 사이의 순간적인 분리문제를 다루었는데, 특히 외팔보 구조물과 단순지지 보 구조물에 있어, 보 구조물과 주행질량이 분리되는 경우와 분리되지 않는 경우의 동적응답을 Runge-Kutta 5차 방법으로 구하였다.

구조물 위를 이동하는 주행물체가 주행하중 만에 의한 것이든 주행질량에 의한 것이든 간에 이제까지 주류를 이룬 연구들은 일정속도를 지닌 주행물체에 의한 연구들이 대부분이었고, 주행질량의 가속도를 고려한 연구에 있어서도 보의 경계조건이 단순지지인 경우였다. 따라서 본 연구의 목적은 일정 가속도를 갖는 주행질량에 의한 보 구조물의 동적응답을 외팔보 구조물의 동적응답을 얻는데 있다.

2. 이론해석

2.1 수학적 모델

일정가속도로 주행하는 주행질량에 의한 외팔보 운동의 동적응답 해석을 위한 수학적 모델은 Fig. 1과 같다.

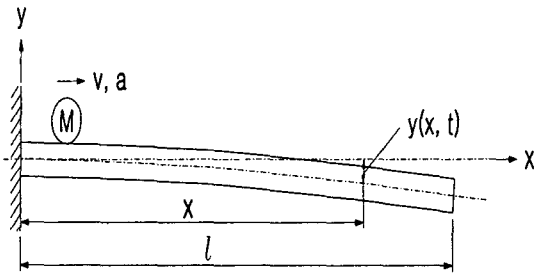

Fig. 1 A mathematical model of a cantilevered beam under a travelling mass with variable speed

2.2 운동 지배방정식

Fig. 1 모델의 속도변화를 가진 주행질량에 의해 운동하는 보의 운동 지배방정식은 다음과 같다.

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = mg+Mg\delta(x-vt)-M\left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}v^2+2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x\partial t}v + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}a+\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right]\delta(x-vt) \quad (1)$$

여기서, E는 보의 탄성계수, I는 보 단면의 2차모멘트, m은 보의 단위길이 당 질량, l은 보의 길이, M은 주행질량의 크기, g는 중력가속도, v와 a는 각각 주행질량의 속도와 가속도, $\delta(x-vt)$는 Dirac 델타함수(Dirac's delta function)를 의미한다. 또한, $\frac{\partial}{\partial t}$와 $\frac{\partial}{\partial x}$는 각각 시간과 축 방향 좌표에 대한 미분 연산자를 나타낸다.

한편, 보의 초기 정적 처짐 $y_s(x)$와 다음과 같다.

$$EI\frac{\partial^4 y_s(x)}{\partial x^4} = mg \quad (2)$$

식 (1)의 보 전체에 대한 처짐을 나타내는 $y(x,t)$는 초기 정적 처짐 $y_s(x)$와 이동질량에 의한 동적 처짐 $y_d(x,t)$의 합으로 다음과 같이 가정된다.

$$y(x,t) = y_s(x) + y_d(x,t) \quad (3)$$

계산상의 편의를 위해 다음과 같은 무차원 좌표와 변수들을 이용한다.

$$\xi=\frac{x}{l},\ v^*=\frac{v}{l},\ a^*=\frac{a}{l} \quad (4)$$

식 (3)의 해를 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 운동 지배방정식을 얻게 된다.

$$\frac{EI}{l^4}\frac{\partial^4 y(\xi,t)}{\partial \xi^4}+m\frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial t^2} = mg+\frac{M}{l}\left[g-\left\{v^{*2}\frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial \xi^2}+2v^{*2}\frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial \xi\partial t} + a^*\frac{\partial y(\xi,t)}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial t^2}\right\}\right]\delta(\xi-v^*t) \quad (5)$$

2.3 정적처짐과 경계조건

보의 자중에 의한 정적 처짐의 영향을 고려하기 위하여 보의 자중에 의한 정적 처짐 관계식 (2)와 다음과 같은 경계조건을 이용한다.

$$y_s(0)=0,\ y_s'(0)=0,\ y_s''(1)=0,\ y_s'''(1)=-\frac{ml^4g}{EI} \quad (6)$$

이제 $y_s(\xi)=\xi^2(A\xi+B)$라 놓고, 두 번 미분과 3번 미분한 후, A와 B 상수를 구하면 $A=-\frac{ml^4g}{6EI}$, $B=\frac{ml^4g}{2EI}$가 되고 따라서, $y_s(\xi)$는 다음과 같이 된다.

$$y_s(\xi)=\frac{ml^4g}{6EI}(3-\xi)\xi^2 \quad (7)$$

Galerkin의 모드 합 방법(mode summation method)을 이용하여, 무차원화된 해를 각각 다음과 같이 가정하자.

$$y_s(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_i(\xi) \tag{8}$$

$$y_d(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)\,\phi_i(\xi) \tag{9}$$

$$y(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_i + q_i(t)]\phi_i(\xi) \tag{10}$$

여기서, $\phi_i(\xi)$는 계의 형상함수로서 보의 형상 및 경계조건에 의하여 결정되며 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_i(\xi) = cos\beta_i - cosh\beta_i + \frac{sinh\beta_i - sin\beta_i}{cosh\beta_i + cos\beta_i}\,(sinh\beta_i - sin\beta_i) \tag{11}$$

한편, $y_s'''' = \frac{ml^4 g}{EI}$의 관계로부터 식 (10)을 적용하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_i''''(\xi) = \frac{ml^4 g}{EI} \tag{12}$$

그런데 $\phi_i''''(\xi) = \beta_i^4 \phi_i(\xi)$이므로 식 (12)는 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \beta_i^4 \phi_i(\xi) = \frac{ml^4 g}{EI} \tag{13}$$

이제 양변에 $\phi_j(\xi)$를 내적하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \beta_i^4 \int_0^1 \phi_i(\xi)\phi_j(\xi)\,d\xi = \frac{ml^4 g}{EI}\int_0^1 \phi_j(\xi)\,d\xi \tag{14}$$

이제, 식 (5)에 식 (10)을 대입하여 다시 쓰면

$$\frac{EI}{l^4}\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i''''(\xi)q_i(t) + m\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(\xi)\,\ddot{q}_i(t)$$

$$= \frac{M}{l}\Big[g - \Big\{ v^{*2}\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i''(\xi)[A_i + q_i(t)] + 2v^*\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i'(\xi)\,\dot{q}_i(t)$$

$$+ a^*\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i'(\xi)[A_i + q_i(t)] + \sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(\xi)\,\ddot{q}_i(t)\Big\}\Big]\,\delta(\xi - v^*t) \tag{15}$$

식 (15)에 $\phi_n(\xi)$를 내적하면 다음과 같이 정리된다.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\int_0^1 \phi_{i,k}(\xi_k)\phi_{n,k}(\xi_k)d\xi_k + \frac{M}{m_k l}\,\phi_{i,k}(v^*t)\phi_{n,k}(v^*t)\Big]\ddot{q}_i(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\frac{M}{m_k l}\,2v^*\,\phi_{i,k}'(v^*t)\phi_{n,k}(v^*t)\Big]\dot{q}_i(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\frac{EI}{ml^4}\beta_i^4\int_0^1\phi_{i,k}(\xi_k)\phi_{n,k}(\xi_k)d\xi_k + \frac{M}{ml}\,v^{*2}\phi_{i,k}''(v^*t)\phi_{n,k}(v^*t)$$

$$+ \frac{M}{ml}\,a^*\,\phi_{i,k}'(v^*t)\phi_{n,k}(v^*t)\Big]q_i(t)$$

$$= \frac{M}{ml}\Big[g - v^{*2}\sum_{i=1}^{\infty}A_i\phi_{i,k}''(v^*t) - a^*\sum_{i=1}^{\infty}A_i\phi_{i,k}'(v^*t)\Big]\phi_{n,k}(v^*t) \tag{16}$$

식 (16)을 다시 정리하면, 다음과 같은 행렬형태의 운동지배방정식을 얻게 된다.

$$[M(t)]\{\ddot{\varphi}(t)\} + [C(t)]\{\dot{\varphi}(t)\} + [K(t)]\{\varphi(t)\} = \{f(t)\} \tag{17}$$

여기서, 각 행렬들의 요소는 다음과 같다..

$$m_{ij}(t) = \int_0^{\xi_t}\phi_{i,1}(\xi_1)\phi_{j,1}(\xi_1)d\xi_1 + \int_0^{1-\xi_t}\phi_{i,1}(\xi_2)\phi_{j,2}(\xi_2)d\xi_2 + \mu\phi_{i,k}(v^*t)\phi_{j,k}(v^*t)$$

$$c_{ij}(t) = 2\mu v^*\phi_{i,k}'(v^*t)\phi_{j,k}(v^*t)$$

$$k_{ij}(t) = \omega_i^2\Big\{\int_0^{\xi_t}\phi_{i,1}(\xi_1)\phi_{j,1}(\xi_1)d\xi_1 + \int_0^{1-\xi_t}\phi_{i,2(\xi_t)}\phi_{j,2}(\xi_2)d\xi_2\Big\} + \mu v^{*2}\phi_{i,k}(v^*t)\phi_{j,k}''(v^*t) + \mu_k a^*\phi_{i,k}(v^*t)\phi_{j,k}'(v^*t)$$

$$f_i(t) = \mu\Big[g - v^{*2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\phi_{n,k}''(v^*t) - a^*\sum_{n=1}^{\infty}A_n\phi_{n,k}'(v^*t)\Big]\phi_{j,k}(v^*t) \tag{18}$$

식 (18)에서 $\mu = \frac{M}{ml}$은 이동질량과 보 질량의 질량비를 나타낸다.

3. 수치해석 결과 및 검토

일정 가속도를 갖고 주행하는 질량에 의한 외팔보의 동적 응답 수치해석 결과는 Runge-Kutta 적분방법을 이용하여 구하였다. 수치해석에 있어, 주행질량의 속도가 일정한 경우와 일정가속도를 갖는 경우로 나누어 해석하였으며, 임계속도를 v_{cr}을 $v_{cr} = \frac{w_1 l}{\pi}$라 할 때, 속도비 v_0는 $v_0 = \frac{v}{v_{cr}}$로

서 임계속도에 대한 주행질량의 속도비를 나타내고, 가속도비 $a_0 = \frac{\pi^2 a^*}{w_1^2}$를 의미한다.

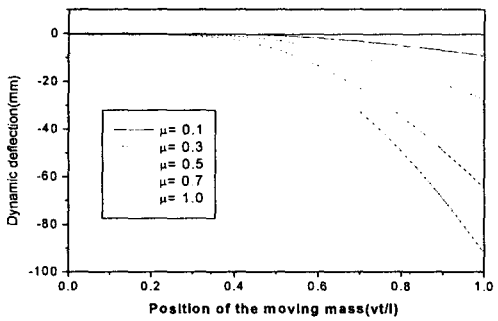

Fig. 2 Dynamic deflections at the moving mass position (v_0=0.1).

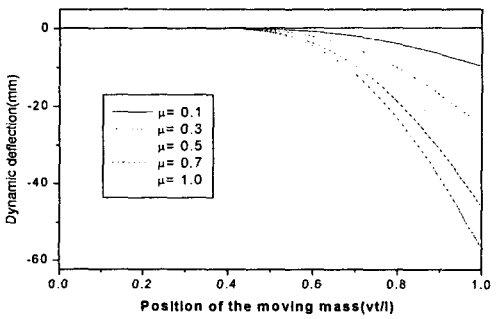

Fig. 3 Dynamic deflections at the moving mass position (v_0=0.5).

Fig. 2에서 Fig. 5는 주행질량의 속도비 v_0가 일정한 경우, v_0=0.1, 0.5, 0.7, 1.0에 있어 주행질량의 질량비 μ의 변화에 따른 동적응답을 나타낸 그림들이다. 이 그림들에서 세로축의 음부호(negative-sign)의 의미는 보가 아래로 처짐을 나타낸다. 먼저 주행질량의 속도비 v_0가 $v_0 \leq 0.5$ (Fig. 2와 Fig. 3)에서는 질량비의 증가에 따라 주행질량 위치에서의 동적 처짐은 증가함을 알 수 있고 전부 음의 값을 나타냄을 알 수 있다. 그러나 주행질량의 속도비가 증가하여 v_0=0.7과 v_0=1.0에 있어서는 양의 동적처짐이 유발되는 주행질량의 구간이 존재하는데 이는 주행질량의 속도가 증가함으로 인해 관성력의 영향이 더 큰 것으로 사료된다. 한편, 임계속도가 아닌 속도비에 있어서는 최대 동적 처짐은 주행질량이 보의 자유단에 있을 때 일어나지만, 임계속도(v_0=1.0)에 있어서는 최대 동적 처짐이 주행질량이 보의 고정 단으로부터 약 0.8되는 위치에서 일어남을 알 수 있다.

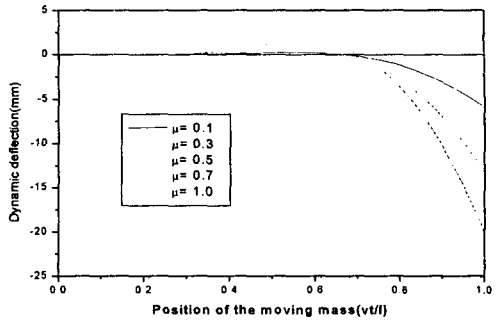

Fig. 4 Dynamic deflections at the moving mass position (v_0=0.7).

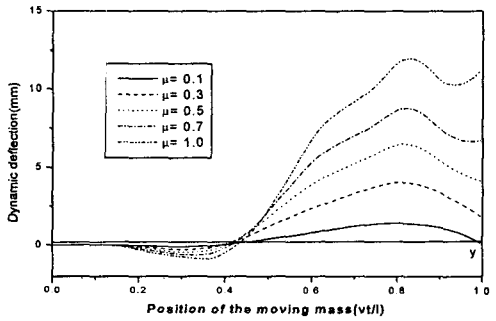

Fig. 5 Dynamic deflections at the moving mass position (v_0=1.0).

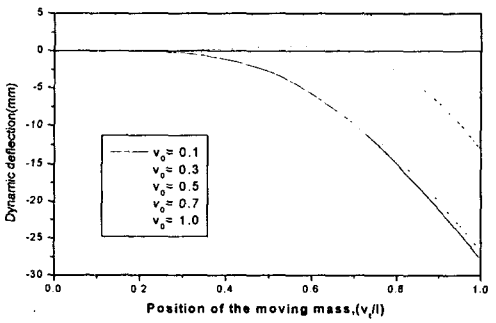

Fig. 6 Dynamic deflections at the moving mass position (μ=0.1).

Fig. 6에서 Fig. 8은 주행질량의 속도가 일정한 경우, 고정된 주행질량의 질량비 μ=0.1, 0.5, 1.0에서 주행질량의 속도비 v_0의 증가에 따른 보의 동적 처짐을 나타낸 그림들로

서, 이 그림들에서 알 수 있는 것은 고정된 질량비 μ에 대해 주행질량의 속도비가 증가할수록 최대 동적 처짐 값은 감소된다는 것이다.

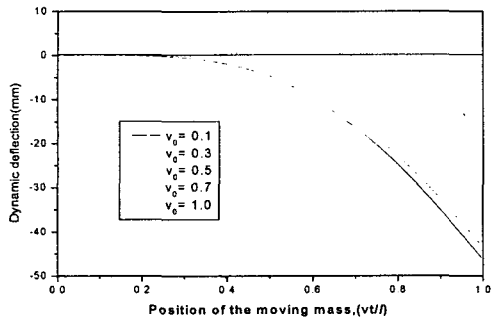

Fig. 7 Dynamic deflections at the moving mass position (μ=0.5).

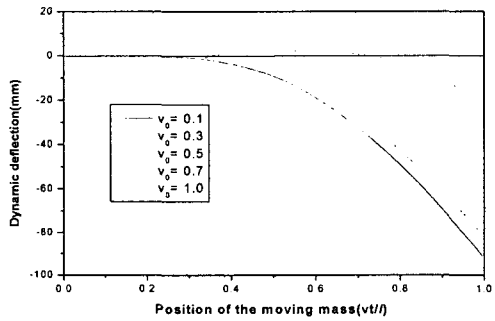

Fig. 8 Dynamic deflections at the moving mass position (μ=1.0).

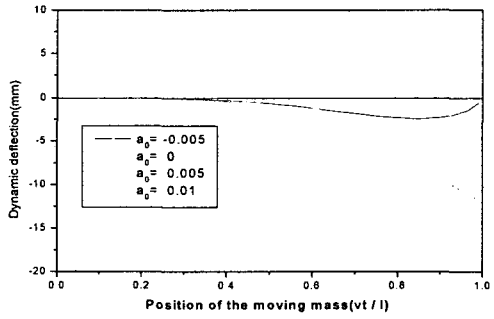

Fig. 9 Dynamic deflections at the moving mass position (μ=0.1, v_0=0.1).

Fig. 9에서 Fig. 12는 주행질량이 감속과 가속이 있는 경우, 주행질량의 질량비 μ와 속도비 v_0의 변화에 따른 주행질량 위치에서의 동적 처짐 값을 나타낸 그림들이다.

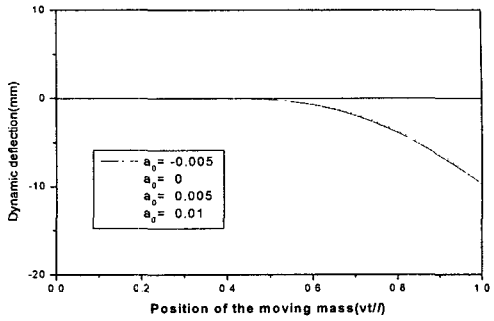

Fig. 10 Dynamic deflections at the moving mass position (μ=0.1, v_0=0.5).

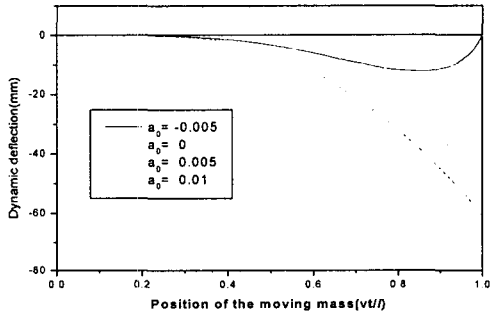

Fig. 11 Dynamic deflections at the moving mass position (μ=0.5, v_0=0.1).

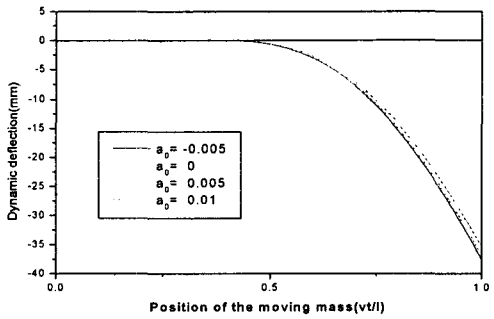

Fig. 12 Dynamic deflections at the moving mass position (μ=0.5, v_0=0.5).

이 그림들에서 알 수 있는 것은 고정된 질량비 μ에 대해

주행질량의 초기속도가 비교적 작은(v_0=0.1) 경우에는 주행질량의 가속도 비 a_0의 증가에 따라 주행질량의 위치에서의 동적 처짐 값은 증가되지만, 초기속도 비 v_0가 v_0=0.5의 경우는 주행질량의 위치에서의 최대동적 처짐 값은 가속도 비의 증가에 따라 오히려 감소되는 경향이 있다. 하지만 그 영향은 그리 크지 않다.

4. 결 론

일정 속도 및 일정 가속도를 가지고 주행하는 주행물체에 의한 외팔보의 동적응답 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 주행질량의 속도비 v_0가 일정한 경우, 고정된 속도비에 대해 주행질량의 질량비 μ 값이 증가될수록 주행질량 위치에서의 최대 동적 처짐 값은 증가됨을 알 수 있고, 임계속도비(v_0=1.0)를 제외한 속도비에서는 최대 동적 처짐을 유발하는 주행질량의 위치는 보의 자유단이며, 임계속도비에서는 보의 고정 단으로부터 약 0.8되는 위치이다.

둘째, 일정속도의 주행질량의 경우, 고정된 주행질량 비 μ에 대해 주행질량의 속도가 증가될수록 최대 동적 처짐 값은 감소된다.

셋째, 가속도가 일정한 주행질량의 경우, 고정된 주행질량의 질량비 μ에 대해 초기속도가 비교적 작은(v_0=0.1) 경우에는 주행질량의 가속도비 a_0의 증가에 따라 주행질량의 위치에서의 동적 처짐 값은 증가되지만, 초기속도 비 v_0가 v_0=0.5의 경우는 주행질량의 위치에서의 최대동적 처짐 값은 가속도 비의 증가에 따라 감소되는 경향이 있다.

참 고 문 헌

(1) Stokes, G. G., 1849, "Discussion of Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges", Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 8, pp. 707-735.

(2) Arye, R. S., Ford, G. and Jacobsen, L. S., "Transverse Vibration of a Two-Span Beam under Action of a Moving Constant Force", Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 17, pp.1-12, 1950.

(3) Stanisic, M. M. and Hardin, J. C., "On the Response of Beams to an Arbitrary Number of Concentrated Moving Masses", Journal of the Franklin Institute, Vol. 287, No. 2, pp. 115-123,1969.

(4) Ting, E. C., Genin, J. and Ginsberg, J. H., "A General Algorithm for Moving Mass Problem", Journal of Sound and Vibration, Vol. 33, pp. 49-58, 1974.

(5) Simkins, T. E., Pflegl, G. and Scanlon, R. S., "Dynamic Response of the M113 Gun Tube to Travelling Ballistic Pressure and Data Smoothing as Applied to XM150 Acceleration Data", Watervliet Arsenal Technical Report, WVT-TR-75015, 1975.

(6) Simkins, T. E. , "Structural Response to Moving Projectile Mass by the Finite Element Method", Watervliet Arsenal Technical Report, WVT-TR-75044, 1975.

(7) Suzuki, S. I., "Dynamic Behavior of a Finite Beam Subjected to Travelling Loads with Acceleration, Journal of Sound and Vibration, Vol. 55, No. 1, pp. 65-70, 1977.

(8) 류봉조, "이동 집중질량에 의한 보의 동적해석", 연세대학교 대학원 석사학위 논문, 1983. 2.

(9) Olsson, M., "On the Fundamental Moving Load Problem" , Journal of Sound and Vibration, Vol.145, No. 2, pp. 299-307, 1991.

(10) Esmailzadeh, E. and Ghorashi, M., "Vibration Analysis of Beams Traversed by Moving Masses", Proceeding of the International Conference on Engineering Application of Mechanics", Tehran, Iran, Vol.2, pp.232-238, 1992.

(11) Ghorashi, M., "Dynamic and Vibratory Analysis of Beams under Dynamic Loads Induced by Travelling Masses and Vehicles", Ph. D. Dissertation, Sharif University of Technology, Tehran, 1994.

(12) Esmaizadeh, E. and Ghorashi, M., "Vibration Analysis of Beams Traversed by a Moving Mass", Journal of Engineering, Vol.8, pp.213-220, 1995.

(13) Esmaizadeh, E. and Ghorashi, M., "Vibration Analysis of Beams Traversed by Uniform Partially Distributed Moving Masses", Journal of Sound and Vibration, Vol. 184, pp.9-17, 1995.

(14) Lin, Y. H., "Comments on Vibration Analysis of Beams Traversed by Uniform Partially Distributed Moving Masses", Journal of Sound and Vibration, Vol.199, No. 4, pp.697-700, 1997.

(15) U. Lee, "Separation Between the Flexible Structure and the Moving Mass Sliding on It", Journal of Sound and Vibration, Vol.209, No.5, pp.867-877, 1998.