

# 수격 현상에 의한 파이프의 과도진동응답 해석

## Analysis of a transient vibration response caused by Water Hammer in a pipe-line system

조성문\* 서영수\* 정의봉\*\* 정호경\*\*\*

Sung Moon Jo, Young Soo Seo, Weui Bong Jeong and Ho Kyeong Jeong

**Key Words :** Water Hammer(수격현상), transient vibration response of the pipe-line system(파이프의 과도진동응답)

### ABSTRACT

A water hammer mostly comes out when a valve fixed at the downstream end of the pipe-line system is rapidly closed or opened. A simple phenomenon of water hammer is often caused around us, and this phenomenon imperils the pipe systems occasionally. In this paper, we confirmed the phenomenon of water hammer by an experiment and forecasted a change of pressure in the pipe-line system by a numerical method. Also a vibration response, which is caused by water hammer, of the pipe-line system confirmed by an experiment and analyzed by a numerical method.

### 1. 서론

수격 현상(Water Hammer)이란 파이프내 유속의 급격한 변화에 의해서 발생하는 천이(transient)현상으로 진동과 충격을 발생시킨다. 이와 같은 현상은 유체가 가득 차서 흐르는 파이프 시스템의 하류 부분에 있는 밸브를 급격히 닫으면, 관 속을 흐르던 유체의 흐름이 급격히 감속되며 액체가 가지고 있던 에너지가 변환되어 관 내부에 탄성파가 발생, 파이프를 따라 왕복하게 된다. 또한 닫혀 있는 밸브를 급히 열 때에도 같은 현상이 일어난다.

가압장사고 중 많은 부분의 원인이 수격 현상에 의한 것으로 조사된 바 있고, 파이프 시스템이 대형화, 장거리화, 그리고 복잡해 짐에 따라 수격 현상에 의한 사고의 비율은 더욱 높아지고 있다. 이런 이유로 수격 현상에 대한 연구가 오래 전부터 있어 왔고 지금도 계속되고 있다.

본 논문에서는 수격 현상 자체에 대한 연구 및 수격 현상의 원인인 파이프내 수격압의 변동이 구조물에 어떻게 영향을 주는지에 대해서 실험을 통해 확인하였고, 수치적 방법(numerical procedure)을 통하여 이를 예측해 보고자 한다.

### 2. 이론

#### 2.1 수격 현상

수격 현상은 파이프의 끝에 설치된 밸브가 갑자기 닫힐 경우 reservoir로부터 파이프내부에 발생하는 압력파의 연속된 형태를 수격압이라 하고, 이러한 현상을 수격 현상 이라고 한다.

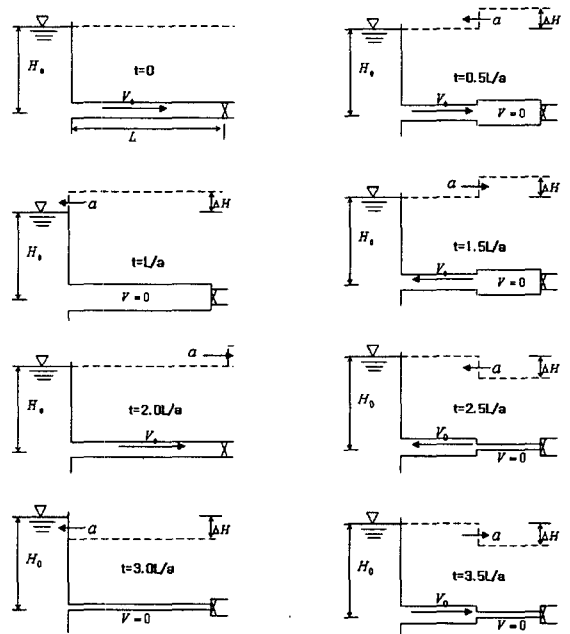


Fig. 1 Evolution of a transient pressure wave in the pipe

\* 부산대학교 기계설계공학과 대학원  
E-mail : french7508@hanmail.net  
Tel : (051) 510-3088, Fax : (051) 517-3805

\*\* 부산대학교 기계공학부

\*\*\* 한국 항공우주 연구원 구조그룹

밸브를 닫는 순간( $t=0$ ) 밸브쪽의 유체의 속도는 0 이 되고 압력이 증가하게 되어 파이프가 팽창된다. 유체의 속도는 감소하지 않으므로 유체의 압축은 계속되어 reservoir 까지 전달된다. 압력파가 reservoir 에 도착했을 때( $t=L/a$ ) 파이프내의 속도는 0, 압력은  $H_0 + \Delta H$  가 된다. reservoir 의 압력은 일정하므로 압력의 불균형이 발생하여 유체가 역류하기 시작한다. 즉 유체는 reservoir 방향으로 속도를 가지고 흐르게 된다.  $t=2L/a$  가 되었을 때 파이프 내부의 압력은 정상상태로 되돌아가지만 속도는 처음과 반대 방향이다. 여전히 밸브는 닫힌 상태이므로 밸브쪽에서는 다시 유체의 속도가 0 이 되며 유체를 정지시키기 위한 저압이 발생한다. 이로 인한 압력파가 다시 reservoir 에 도착했을 때( $t=3L/a$ ) 파이프내의 속도는 0, 압력은  $H_0 - \Delta H$  가 된다. 마찬가지로, reservoir 의 압력은 일정하므로 유체는 다시 밸브쪽으로 속도  $V$  로 흐르게 되고  $t=4L/a$  가 되면 초기상태( $t=0$ )로 되돌아오게 된다. 이러한 현상이 일정한 주기( $t=4L/a$ )로 반복하게 되고 관의 마찰에 의해 시간이 경과할수록 수격압은 점차 줄어들고 결국에는 소멸하게 된다.

## 2.2 운동 방정식

파이프내의 수격 현상을 해석하기 위한 운동량 방정식과 연속방정식은 다음과 같이 얻어진다.

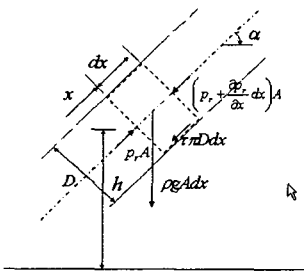


Fig. 2 Diagram for the derivation of the equation of motion

Fig. 2 에서 힘의 평형 방정식은 다음과 같다.

$$p_r - \left( p_l + \frac{\partial p_r}{\partial x} dx \right) A - \rho g A dx \sin \alpha - \tau \pi D dx = \rho \frac{d \left( \int_A u dy dz \right)}{dt} dx \quad (2.1)$$

여기서  $A$  는 관의 단면적  $\tau$  는 벽 전단응력이다.

식(2.3)을 정리하고  $v = \frac{1}{A} \int_A u dy dz$  의 관계를 이용하면 식(2.3)을 다음을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\tau \pi D}{A} + \frac{\partial p_r}{\partial x} + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (2.2)$$

압력파의 전파속도에 비해 유체의 속도는 매우 작아 식(2.4)의 두 번째 항은 첫 번째 항에 비해 무시할 수 있고,  $\tau$  는 관내의 정상상태 난류 유

동의 압력 손실 즉  $\tau = \frac{\lambda}{8} \rho v^2$  을 사용하여

$$\frac{\tau \pi D}{A} = \frac{\lambda \rho}{2D} |v| v \text{ 로 나타낼 수 있다.}$$

식(2.3)의 마지막 두 항은  $p = p_r + \rho g h$  와

$\sin \alpha = \frac{dh}{dx}$  를 사용하여  $\frac{\partial p_r}{\partial x} + \rho g \sin \alpha = \frac{\partial p}{\partial x}$  로 나타내어 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f}{2D} |v| v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

한편, Fig. 3 에서 연속 조건식은 다음과 같다.

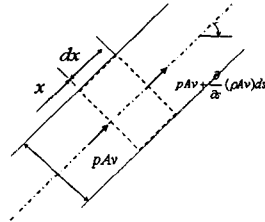


Fig. 3 Diagram for the derivation of the continuity equation

$$\rho A \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) = 0 \quad (2.4)$$

여기에서  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{K} \frac{dp}{dt}$ ,  $\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{eE} \frac{dp}{dt}$ ,  $K$  는 체적 탄성계수 이다.

그러므로 식(2.4)는

$$\frac{1}{K} \left( 1 + \frac{DK}{eE} \right) \frac{dp}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

식(2.5)에 압력과 속도( $a$ )를 적용하면[2]

$$\text{여기서 } a = \sqrt{\frac{K_e}{\rho}}, \quad K_e = \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{D}{eE}}$$

$$\frac{dp}{dt} + v \frac{dp}{dx} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

식(2.6)에서 두 번째 항은 매우 작은 값이므로 무시하면 다음과 같은 연속방정식을 얻을 수 있다

$$a^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

여기서, 관내 유체의 밀도  $\rho$ , 관의 마찰계수  $f$ , 관내부의 직경  $D$ , 관 두께  $e$ , 관 내부 압력파의 전파속도  $a$ , 관내의 유체의 평균 유속  $v$ , 그리고 압력  $p = p_r + \rho gh$ , 관내의 실제압력  $p_r$ , 저수조 높이  $h$ 로 구성된다.

식(2.3)과 식(2.7)을 수치해석으로 풀기 위한 특성방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{dz}{dx} + \frac{f}{2D} v|v| \right) + \left( a^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.8)$$

여기서  $\lambda$ 는 Lagrange multiplier 이다.

식(2.8)을 정리하면 다음과 같다.

$$\left[ \lambda \frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \left( \frac{\lambda}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (2.9)$$

$$+ \lambda g \frac{dz}{dx} + \lambda \frac{f}{2D} v|v| = 0$$

식(2.9)에서  $v$ 와  $p$ 에 대한 전미분 형태는 다음과 같다.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.10)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

식(2.9)와 식(2.10)를 비교하면

$$\lambda \frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \text{ 는 } \lambda \frac{dv}{dt}, \text{ 그리고 } \lambda \frac{dx}{dt} = a^2$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \text{ 는 } \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}, \text{ 그리고 } \frac{\lambda}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dx}{dt} \text{ 로 나}$$

타낼 수 있고, 두 개의  $\frac{dx}{dt}$  항에서  $\lambda^2 = a^2$  임을

알 수 있다. 즉  $\lambda = \pm a$ . ( $a$ 가 일정하면  $\lambda$ 도 선형이고, 일정하다.) 따라서 두 개의 편미분 방정식으로부터 다음과 같은 두 개의 상미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{a\rho} \frac{dp}{dt} + g \frac{dz}{dx} + \frac{f}{2D} v|v| = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{a\rho} \frac{dp}{dt} + g \frac{dz}{dx} + \frac{f}{2D} v|v| = 0 \quad (2.12)$$

식(2.11)은  $\lambda \frac{dx}{dt} = a^2$  일 때만 즉  $\frac{dx}{dt} = +a$  일 때

유용하고, 마찬가지로 식(2.12)은  $\frac{dx}{dt} = -a$  일 때

유용하다.  $p = \gamma(H - z)$  을 이용하여 식(2.11)과 (2.12)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2D} v|v| = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2D} v|v| = 0 \quad (2.14)$$

### 2.3 수치 해석

식(2.13)와(2.14)를 위한 차분법을 이용하여 수치 계산을 수행하였다.

$$\frac{v_i^k - v_{i-1}^{k-1}}{\Delta t} + \frac{g}{a} \frac{H_i^k - H_{i-1}^{k-1}}{\Delta t} + \frac{f}{2D} v_{i-1}^{k-1} |v_{i-1}^{k-1}| \quad (2.15)$$

$$\frac{v_i^k - v_{i+1}^{k-1}}{\Delta t} - \frac{g}{a} \frac{H_i^k - H_{i+1}^{k-1}}{\Delta t} + \frac{f}{2D} v_{i+1}^{k-1} |v_{i+1}^{k-1}| \quad (2.16)$$

### Boundary conditions

#### 1) Reservoir

$$H_{reservoir}^k = H_0 \quad (2.17)$$

$$V_{reservoir}^k = V_{reservoir+1}^{k-1} + \frac{g}{a} (H_0 - H_{reservoir+1}^{k-1}) \quad (2.18)$$

$$- \frac{f \Delta t}{2D} V_{reservoir+1}^{k-1} |V_{reservoir+1}^{k-1}|$$

#### 2) Valve

$$V_{valve}^k = V_0 \left( 1 - \frac{t}{T_c} \right), \quad 0 \leq t \leq T_c \quad (2.19)$$

$$V_{valve}^k = 0 \quad t \geq T_c$$

$$H_{valve}^k = H_{valve-1}^k - \frac{a}{g} (v_{valve}^k - v_{valve-1}^{k-1}) - \frac{a}{g} \frac{f \Delta t}{2D} v_{valve-1}^{k-1} |v_{valve-1}^{k-1}| \quad (2.20)$$

여기서,  $k$ 는 시간,  $i$ 는 파이프의 길이방향의 요

소를 나타낸다.

파이프는 길이방향으로 일정한 요소 길이  $\Delta x$ 로 구성되었으며, 시간 스텝은  $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$ 를 취하였다.

### 3. 구조 해석

#### 3.1 유한 요소법

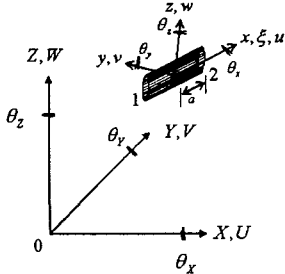


Fig. 4 Geometry of a three-dimensional framework element

유체를 고려한 빔의 운동 방정식 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\
 EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\
 EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (m_p + m_f) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\
 GJ \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - m_p \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

local 좌표에 대한 각 요소의 에너지 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 T_e &= \frac{1}{2} \int_a^a \rho A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} \int_a^a \rho I_x \dot{\theta}_x^2 dx \\
 U_e &= \frac{1}{2} \int_a^a EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^a \left\{ EI_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + EI_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_a^a GJ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx \\
 \delta W_e &= \int_a^a p_x \delta u dx + \int_a^a (p_y \delta v + p_z \delta w) dx \\
 &\quad + \int_a^a m_x \delta \theta_x dx
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

여기에서  $\rho$ 는 밀도,  $E$ 는 영률,  $I$ 는 단면적 관성모멘트,  $A$ 는 단면적,  $m_p$ 는 파이프의 질량,  $m_f$ 는 유체의 질량, 그리고  $u, v, w$ 는 각각 local 좌표  $(x, y, z)$ 에 관계된 횡단면의 중심 변위요소, 그리고  $\theta_x$ 는 local  $x$ 축에 대한 횡단면의 회전, 또한  $p_x, p_y, p_z$ 는 local 좌표에서의 단위 길이당 무게 그리고  $m_x$ 는 local  $x$ 축에 대한 단위 길이당 비틀림 모멘트이다.

형상함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 u &= [N_u(\xi)] \{u\}_e \\
 v &= [N_v(\xi)] \{v\}_e \\
 w &= [N_w(\xi)] \{w\}_e \\
 \theta &= [N_\theta(\xi)] \{\theta_x\}_e
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

식 (3.3)를 식(3.2)에 넣고 적분하면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}_e^T [\bar{m}]_e \{\dot{u}\}_e \quad (3.4)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}_e^T [\bar{k}]_e \{\dot{u}\}_e \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_e &= \{u\}_e^T \{\bar{f}\}_e \\
 \{u\}_e^T &= [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2}]
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

실험(Impact Hammer test)을 통해 얻은 데이터를 이용하여 비례점성감쇠를 적용하여 모드감쇠를 구하였다.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.8)$$

여기서  $M, C$ , 그리고  $K$ 는 각각  $n \times n$  크기의 질량, 감쇠, 강성 행렬.

$\alpha + \beta \omega^2 = 2\zeta \omega$   $\alpha, \beta$ 는 상수,  $\zeta$ 는 실험에서 얻은 감쇠비이다.

2 절에서 구한 수두(H)항을 이용하여 다음 그림과 같이 힘을 생성하였다.

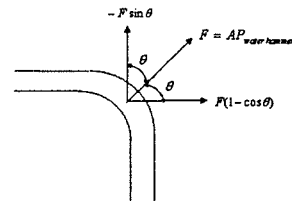


Fig. 5 Diagram for the derivation of the force

이상과 같이 질량, 강성, 감쇠, 그리고 힘이 정의되었으므로 다음 방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F_{water\ hammer}\} \quad (3.9)$$

여기서 M, C, 그리고 K 는 각각  $n \times n$  크기의 질량, 감쇠, 강성 행렬,  $x$  는  $n \times 1$  의 변위 벡터, 그리고  $F$  는  $n \times 1$  의 수격 현상에 의해 발생하는 힘이다.

## 4. 응용 예

### 4.1 실험 모델

수격 현상 실험 및 수치해석 그리고 구조실험을 위한 시스템을 아래 그림과 같이 설치하였다.

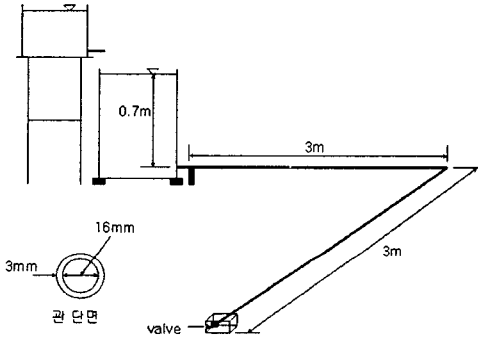


Fig. 6 Model for the experiment

파이프의 재료는 PVC 파이프를 사용하였고, 작은 reservoir 는 수위를 일정하게 유지 하기 위한 보조 용이다.

$$E_{pipe} = 3.5 \times 10^9, \quad \rho_{pipe} = 1442, \quad \nu_{pipe} = 0.33$$

$$\rho_{water} = 1000$$

Test 1 빈 파이프의 Impact Hammer test

Test 2 유체를 포함하는 파이프의 Impact Hammer test

Test 3 밸브 급 폐쇄에 의한 파이프 내부의 압력 변동과 그에 따른 파이프 시스템의 응답

### 4.2 수치 모델

파이프 구조 해석을 위해 그림과 같이 길이 6m, 내경 0.016m, 외경 0.022m, 영률  $3.5 \times 10^9$  의 PVC

파이프를 40 개의 빔 요소로 구성하였고, 양 끝단의 6 자유도(밸브쪽 길이방향제외)를 구속하였다.

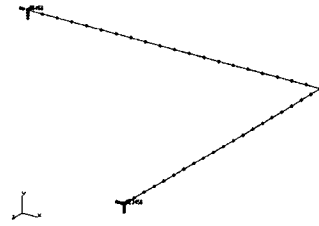


Fig. 7 Model for the numerical procedure

## 5. 결과

### 5.1 FRF 비교

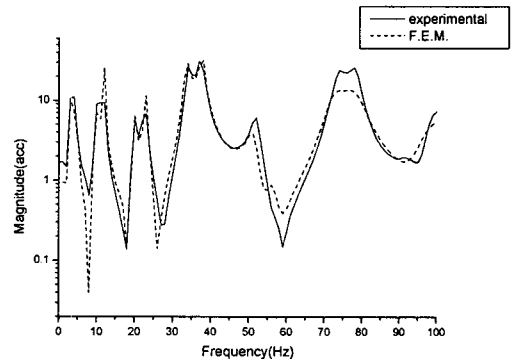


Fig. 8. Comparison between experiment and F.E.M for the empty pipe system

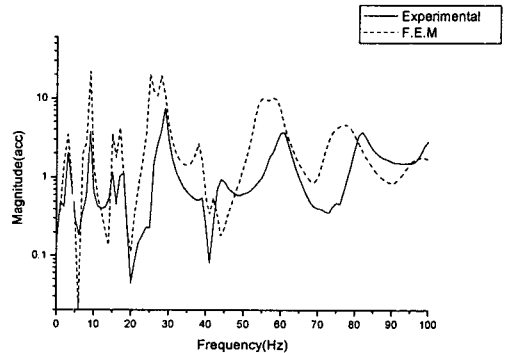


Fig. 9. Comparison between experiment and F.E.M for the pipe system conveying water

5.2 밸브 급 폐쇄에 의한 파이프 내부의 압력 변동

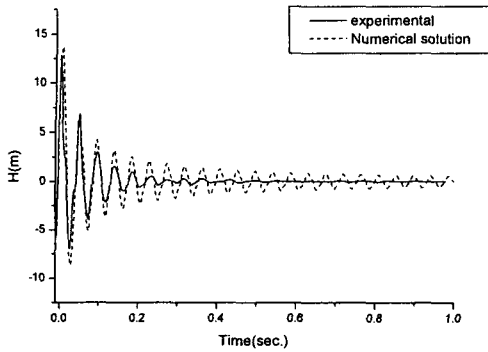


Fig. 10 Comparison between experimental and numerical head(time domain)

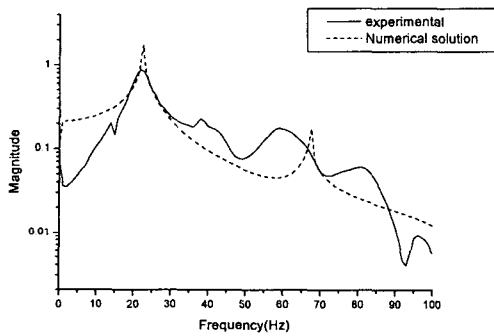


Fig. 11 Comparison between experimental and numerical head(frequency domain)

5.3 밸브 급 폐쇄에 의한 파이프 시스템의 응답 스펙트럼 비교

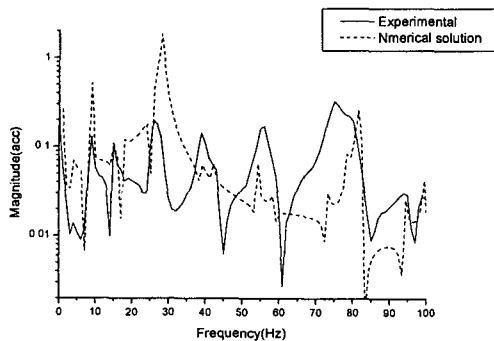


Fig. 12 Comparison between experimental and numerical response spectrum

6. 결론

우리 주변에서 흔히 경험 할 수 있는 수격 현상 (Water Hammer)을 실험을 통해 확인 할 수 있었고, 실험과 수치적 방법으로 구한 결과들의 비교를 통해, 수격 현상으로 인한 구조의 진동 응답을 수치적 방법을 통해 예측할 수 있었다. 본 연구에서는 아주 간단한 파이프 시스템에 대해서만 실험 및 해석이 수행하였지만, 여러 요소들(pump, surge tank, air chamber, pipe network)이 고려된 복잡한 실제 파이프 시스템에 대해서도 연구가 수행되어야 할 것이다.

참고 문헌

- (1) j Zaruba, 1993, Water Hammer in Pipe-line Systems.
- (2) Bruce E. Larock, Roland W. Jeppson, Gary Z. Watters, 2000, Hydraulics of Pipeline Systems.
- (3) Giuseppe Pezzinga, 1999, Quasi-2D model unsteady flow in pipe networks, Journal of Hydraulic Engineering, 1999.
- (4) M Petyt, 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis.