다양한 골격요소를 갖는 음함수 곡면의 Interval Method를 이용한 렌더링 방법

정재광[0], 김재정
전남대학교 전산학과
chalgoguma@hanmail.net[0], jaykim@chonnam.ac.kr

Rendering Implicit Surface by Interval Method

Jae Kwang Chung[0], Jay Jeong Kim
Department of Computer Science, Chonnam National University

요 약

음함수 곡면은 부정형 물체의 모델링 성능이 탁월하며 다양한 골격요소가 사용된다. 골격요소의 모양이 다양할수록 모델링 성능이 향상되는 반면 렌더링은 상대적으로 어려워진다. 따라서 본 논문에서는 다양한 골격요소를 사용하는 음함수 곡면을 interval method로 렌더링 하는 방법을 소개한다. 또한 점(point) 외에 복잡한 도형을 골격요소로써 사용할 때, interval method를 적용하는 경우 직면하게 되는 문제 해결 방법을 제안한다.

1. 서론

음함수 곡면(implicit surface)은 점이나 선분 같은 기타 다양한 기하학적 도형을 골격요소 (skeletal primitives)로 사용하여 부정형 물체를 모델링 하는데 성능이 뛰어난 곡면이다. 또한 골격요소 간의 용이한 blending으로 유기체의 표현이나 뼈와 같은 골격을 가진 사람의 모델링, 근육의 표현 등의 모델링에 많이 사용되는 기법이다.

이러한 음함수 곡면으로 복잡한 부정형 물체를 모델링하기 위해서는 다양한 모양의 골격요소의 사용이 필수적이다. 그러나 단순한 점(point) 외에 다른 모양의 도형을 골격요소로 사용하면 모델링은 간단해지는 반면 그만큼 렌더링 하기가 어려워진다.

광선추적법으로 음함수 곡면을 렌더링 하는 방법은 크게 두 종류로 요약된다. 첫째는 광선과의 교점을 수치해석적인 계산을 통해 직접 구하려는 방법이며, 두번째로는 직접 근을 계산하는 대신 간접적으로 근의 존재 유무만을 판별하는 방법으로서 주어진 초기 영역에서의 근의 존재 여부를 검사하여 근이 존재하는 영역을 계속적으로 분할하여 그 영역을 좁혀나가는 방법이다. 본 논문에서는 이와 같은 두 번째 방법중의 하나로서 interval method를 이용하여 음함수 곡면을 렌더링 하는 방법을 사용하였다. 또한, 모델링 기능의 향상을 위하여 다양한 모양의 골격요소를 interval method를 이용하여 렌더링 할 때, 거리의 방정식의 구간이 나뉘어짐으로 인해서 직면하게 되는 문제를 해결하는 방법을 제안하였다.

2. 음함수 곡면(Implicit Surface)

음함수 곡면은 3차원 공간상에서 $f:\Re^3 \rightarrow \Re$ 인 필드함수(field function) $f(P)$ 를 점 P 와 골격요소로부터의 거리에 반비례하는 에너지의 강도를 나타내는 에너지 밀도 함수로 할 때, 실수 임계값(threshold) T 에 의해 다음의 식을 만족하는 점 P 들로 이루어진 곡면이다.

$$f(P) - T = 0$$

n개의 골격요소가 존재하는 경우에는 각 골격요소의 필드 함수가 $f_i(P)$ 라고 할 때, 음함수 곡면은 다음의 식으로 정의된다.

$$F(P) = \sum^{n} w_i f_i(P) - T = 0$$

w_i 는 각 골격요소의 필드 함수에 대한 weight값으로서 w_i 가 음수인 경우에는 다른 골격요소의 에너지 값을 줄이는 역할을 함으로써 인접한 골격요소에 움푹 패인듯한 효과를 낼 수 있게 한다. 임계값 T 는 필드 함수 $f(P)$ 의 값이 T 가 되는 3차원 공간상의 점 P 의 집합인 등가면(isosurface)을 정의한다. 필드함수 값은 골격요소에서의 거리에 반비례 하는 골격요소와 공간상의 한 점 P 사이의 거리 r 에 따른 함수 $f(r)$ 로 표현할 수 있다. 현재 다양한 필드 함수가 개발되어 왔으며 대표적인 필드 함수를 나열하면 [표 1]과 같다.

표 1. 대표적인 필드 함수

필드함수	제안자
$f(r) = e^{-r^2}$	Blinn[1]
$f(r) = (1-(\frac{r}{R})^2)^2$	Murakami
$f(r) = -\frac{4}{9}(\frac{r}{R})^6 + \frac{17}{9}(\frac{r}{R})^4 - \frac{22}{9}(\frac{r}{R})^2 + 1$	Wyvill
$f(r) = \begin{cases} 1-3(\frac{r}{R})^2 & (0 \le r < \frac{R}{3}) \\ \frac{3}{2}(1-\frac{r}{R})^2 & (\frac{R}{3} \le r \le R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$	Nishimura
$f(r) = (1-(\frac{r}{R})^2)^3$	Kim

Blinn의 필드 함수는 지수함수의 특성상 무한대의 거리에 있는 점에서도 필드함수 값이 0이 되지 않는다는 단점이 있다[1]. 그러나 다른 함수는 최대반지름 R 이 존재하여 거리가 R 보다 큰 경우에는 필드함수 값이 0이 되므로 bounding box를 이용하여 렌더링 시 가속화가 가능하다는 장점을 지닌다. 공간상에 골격 요소가 여러 개 존재하는

경우에는 필드함수 값을 구할 때 영향을 받는 모든 필드함수들을 계산하여야 한다. 그러나 최대 반지름 R 이 존재하는 경우는 광선과 각 골격 요소의 bounding box와 먼저 교차검사를 하여 교차하는 경우에만 그 골격요소의 필드함수에 영향을 받는다고 볼 수 있으므로 해당되는 골격요소의 필드함수만 계산하여 더하면 되는 것이다.

3. 골격요소(skeletal primitives)

3.1. 점(point)

골격요소가 점인 경우에는 3차원 공간상의 한 점 $\mathbf{C}$ 로 정의되며, 등가면은 구형(ball)의 모양을 나타낸다. 점 $\mathbf{C}$ 로부터 공간상의 한 점 $\mathbf{P}$ 까지의 거리 d 는 다음과 같다.

$$d = \|\mathbf{P} - \mathbf{C}\|$$

3.2. 선분(line segment)

골격요소가 선분인 경우는 선분의 양 끝점 $\mathbf{A}$ 와 $\mathbf{B}$ 로 정의되며 등가면은 capsule모양을 나타낸다. 점 $\mathbf{P}$ 에서 선분의 연장선상에 내린 수선의 발을 $\mathbf{L}$ 이라 하고 $\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ 라 하면 $\mathbf{L}(t) = \mathbf{A} + t\mathbf{M}$ 으로 나타낼 수 있다. 이 때 점 $\mathbf{P}$ 의 선분에 대한 상대적인 위치에 따라서 t 값이 달라지므로 다음과 같이 거리 d 를 구하는 식은 t 값에 따라 구간이 나뉘어진다.

$$d = \begin{cases} \|\mathbf{P} - \mathbf{A}\|, & t \le 0 \\ \|\mathbf{P} - (\mathbf{A} + t\mathbf{M})\|, & 0 < t < 1 \\ \|\mathbf{P} - \mathbf{B}\|, & t \ge 1 \end{cases}$$

4. Interval Method

음함수 곡면이 광선 $R(t)$ 와 교차하는 점 P 는 다음과 같은 t 에 대한 방정식으로 표현된다.

$$F(P) = \sum^{n} w_i f_i(P) - T = 0$$

$$P = R(t)$$

$$F(R(t)) = 0$$

즉 t 에 관한 방정식에서 최소가 되는 t 를 구하여 음함수 곡면을 렌더링하게 되는데, 이러한 근을 찾는 방법들은 *Newton's method, Regula-falsi, Sturm Sequence, Interval method* 등등 여러 가지 방법이 있으나 그 중에서 interval method는 방법이 단순하고 가장 쉽고 안정되게 적용할 수 있는 장점이 있어 본 논문에서는 이를 이용하여 근을 찾는 방법을 사용하였다.

interval method는 실수의 범위를 하나의 interval로서 정의하여 실수 연산과 비슷하게 interval 간의 연산을 시행하는 방법으로서, interval X_I 를 다음과 같이 정의할 때

$$X_I = [a,b] = \{x \in \Re | a \le x \le b\} \quad a,b \in \Re,\ a \le b$$

그러한 interval간의 기본적인 연산들을 정의하면 다음과 같다.

표 2. 기본적인 interval연산자 정의

$$X_I = [a,b], \quad Y_I = [c,d]$$

$$X_I + Y_I = [a+c, b+d] \qquad X_I - Y_I = [a-d, b-c]$$

$$X_I \times Y_I = [\min\{ab,ad,cb,cd\}, \max\{ab,ad,cb,cd\}]$$

$$\frac{1}{X_I} = \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right] \qquad \text{단}, a > 0 \ or\ b < 0$$

$$e^{X_I} = [e^a, e^b]$$

$$\sqrt{X_I} = [\sqrt{a}, \sqrt{b}] \quad \text{단 a,b>0}$$

$$X_I^{\,2} = \left[\min\{a^2, b^2, 0\ (if\ a \cdot b < 0)\}, \max\{a^2, b^2\}\right]$$

예를 들면 2차 함수 $f(x) = x(x-1)$ 에 대해 변수 x 의 interval이 $X_I = [0,1]$ 으로 주어졌을 때 interval 연산은 다음과 같이 시행된다.

$$f(x) = x(x-1)$$

$$f([0,1]) = [0,1] \times ([0,1] - [1,1]) = [0,1] \times [-1,0] = [-1,0]$$

이때 만약 임계값 T 가 interval연산의 결과인 interval $[-1,0]$ 에 포함된다면, interval $X_I = [0,1]$ 는 함수 $f(x) = T$ 의 근을 포함할 수 있다는 뜻이 된다. 반대로 interval $[-1,0]$ 에 포함되지 않는다면 그 구간내에는 근을 포함하지 않는다는 의미이므로 그 구간은 버린다. 따라서 미소 범위까지 분할하여 재귀적으로 이러한 연산을 반복하면 그 interval 내의 어느 값(보통 중간값)이 $f(x) = T$ 의 근에 근사하는 실수 값 이라고 볼 수 있다. interval method는 방정식의 근을 구하는 다른 방법과는 다르게 미분등의 복잡한 수학적 계산이 필요 없이 간단하게 처리될 수 있으며, Newton's method와는 달리 초기값에 민감하지 않고 견고하게 근을 찾을 수 있다는 장점을 지닌다[2].

5. Interval Method를 이용한 음함수 곡면 렌더링

광선 추적법으로 음함수 곡면을 렌더링 하기 위해서는 음함수 곡면 $F(P) = \sum^{n} w_i f_i(P) - T = 0$ 과 광선과의 교차점을 구해야 한다. 매개변수 t 로 이루어진 광선벡터 $R(t)$ 와 음함수 곡면과의 교차점 P 는 $P = R(t)$ 를 만족하므로 $F(R(t)) = 0$ 와 같이 매개변수 t 에 관한 방정식으로 바꿀 수 있으며, 이 방정식의 최소 양수근 t 를 구하면 음함수 곡면과의 교차점 P 를 구할 수 있게 된다.

다음은 각 골격요소가 점 요소로만 이루어져있고 필드함수로 $f(r) = e^{-r^2}$ 를 사용한다고 가정했을 때 interval method 로 근 t 를 찾는 과정을 나타낸 예제이다.

```
Procedure FindMinimumRoot(Interval t_I , Ray R)
  f_I = [0, 0]
  for (each skeletal primitives)
    P_xI = O_x + t_I V_x
    P_yI = O_y + t_I V_y                  // P(t) = O + tV
    P_zI = O_z + t_I V_z
    r_I = sqrt((P_xI - C_x)^2 + (P_yI - C_y)^2 + (P_zI - C_z)^2)   // r(P) = ||P - C||
    f_I = f_I + e^(-(r_I)^2)              // f(r) = e^(-r^2)
  if (T ∈ f_I)
    if ((t_Ihi - t_Ilow) < epsilon)
      return (t_Ihi + t_Ilow)/2           // 최소 근 반환
    else
      t_I 를 t_I1 , t_I2 로 이등분
      t_root = FindMinimumRoot(t_I1 , R)
      if (t_root = false)
        t_root = FindMinimumRoot(t_I2 , R)
      return t_root
  else
    return false
Procedure End
```

골격 요소가 선분인 경우에는 점 P 의 위치에 따라 거리를 구하는 식이 달라지므로 직접적으로 interval 연산에 의한 interval method 를 적용하기는 어려우며 따라서 위와는 다른 특수한 방법이 필요하다.

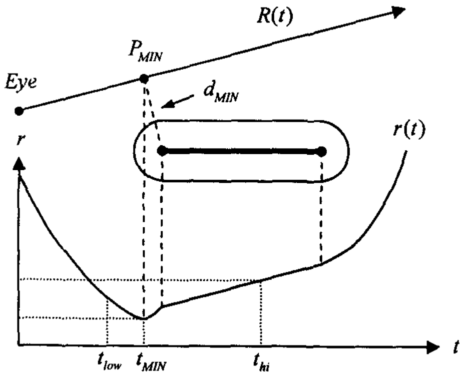

그림 1. 광선의 매개변수 t에 따른 거리 r의 그래프

위 그림은 한 선분 골격요소에 대하여 광선 $R(t)$의 매개변수 t의 변화에 따른 광선과 선분간의 거리 r을 그래프로 나타낸 것이다. 매개변수 t에 관한 interval $t_I = [t_{low}, t_{hi}]$를 거리의 함수 $r(t)$에 interval 연산을 적용하면 거리의 interval $r_I = [r_{low}, r_{hi}]$가 나오게 된다. 그러나 $r(t)$는 t의 구간에 따라 식이 달라지는 함수이므로 바로 interval 연산을 행할 수는 없다. 광선과 선분과의 최소거리 d_{MIN}에 해당하는 점 P_{MIN}을 나타내는 t_{MIN}에서 $r(t)$의 그래프가 극소값을 나타냄을 알 수 있다. 또한 t_{MIN} 이전에는 단조감소하며 t_{MIN} 이후에는 단조증가 한다. 그러므로 interval t_I에 t_{MIN}이 포함되는 경우에는 반드시 $r_{low} = r(t_{MIN})$가 되며, interval t_I에 t_{MIN}이 포함되지 않는 경우에는 $r(t_{low})$, $r(t_{hi})$이 각각 interval r_I의 성분이 되는 것을 알 수 있다. 그러므로 다음의 과정으로 r_I를 구한다.

1. 광선과 선분과의 최소 거리 d_{MIN}에 해당하는 t_{MIN}을 구한다[3].
2. $t_{MIN} \in t_I$인 경우 $r_I = [r(t_{MIN}), \max\{r(t_{low}), r(t_{hi})\}]$
3. $t_{MIN} \notin t_I$인 경우 $r_I = [\min\{r(t_{low}), r(t_{hi})\}, \max\{r(t_{low}), r(t_{hi})\}]$

골격요소가 삼각형과 직사각형인 경우도 임의의 점과 골격요소간의 거리를 구하는 식의 구간이 나뉘어진다[3]. 따라서 바로 interval 연산을 적용할 수는 없으나, 다음의 조건을 만족하므로 interval method를 이용하여 렌더링이 가능하다.

1. 광선(또는 직선)과 골격요소간의 최소거리를 구하는 식이 존재한다[3].
2. 광선의 매개변수 t에 대한 광선(또는 직선)과 골격요소간의 거리 r의 그래프에서 극소 값 t_{MIN}이 존재한다.
3. t_{MIN} 이전에는 단조감소, t_{MIN} 이후에는 단조증가 한다.

이와 유사한 방법으로 구간이 나뉘어지는 Nishimura 의 필드함수도 interval 연산을 적용할 수 있다. 단, Nishimura 의 필드함수는 R에서 극소 값이 존재하며 구간이 나뉘어지는 지점도 $R/3$로 고정되어 있으므로, 거리의 interval $r_I = [r_{low}, r_{hi}]$의 각 원소 r_{low}, r_{hi}가 어느 구간에 포함되어 있는지를 확인하여 그 구간에 알맞은 함수를 적용하고 최종 필드함수 값의 interval f_I로 조합하면 된다.

6. 다양한 필드함수의 음함수 곡면 렌더링 구현

본 논문에서는 음함수 곡면과 광선과의 교차점 계산에 interval method 를 이용하였으며, Blinn, Murakami, Wyvill, Nishimura, Kim 의 필드함수를 이용하고, 골격요소로서 점, 선분, 원, 삼각형, 직사각형 등을 사용하여 광선추적법으로 구현하였다. 구현결과 위에서 나열한 모든 필드함수가 interval method 로 렌더링 됨을 알 수 있었다. 또한 선분, 삼각형, 직사각형과 같은 거리의 방정식의 구간이 나뉘어 지는 골격요소도 interval method로 렌더링 됨을 알 수 있었다.

아래의 샘플 이미지는 35 개의 점, 원, 선분, 삼각형, 직사각형 등 다양한 골격요소로 Nishimura 함수를 필드함수로 하여 interval method 에 의해 광선 추적법으로 렌더링한 이미지이다.

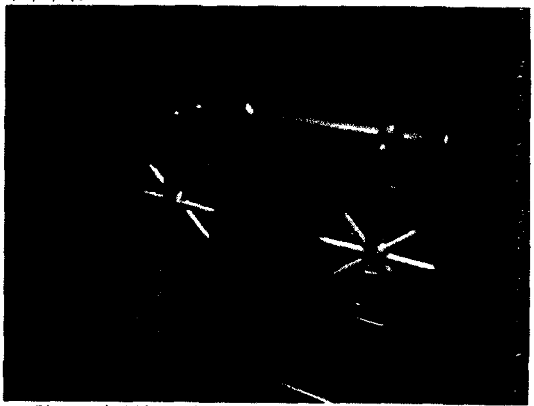

그림 2. 다양한 골격요소로 이루어진 모델의 렌더링 결과

7. 결론

음함수 곡면은 유기체나 사람 같은 부정형 물체를 모델링하는데 성능이 뛰어나 Computer Animation 이나 Virtual Reality, 의료영상 등에 자주 이용되고 있다. 이러한 음함수 곡면으로 다양한 물체를 모델링하기 위해서는 단순한 점 요소 외에도 다양한 골격요소가 필수적으로 요구된다.

본 논문에서는 다양한 골격요소로 이루어진 음함수 곡면과 광선과의 교차점을 interval method 를 이용하여 간단히 구하는 방법을 소개하였다. 또한 선분, 삼각형, 직사각형등과 같이 거리의 방정식이 구간에 따라 나뉘어지는 경우에도 interval method 를 적용하는 방법을 제안하였다. 여기서 제안한 방법은 위의 세 조건을 만족한다면 다른 도형에도 동일하게 적용될 수 있을 것으로 생각된다.

앞으로 음함수 곡면의 더욱 향상된 모델링 성능을 위해서 disk, 사면체, 육면체, 곡선 등의 다양한 골격요소를 추가하는 연구가 진행되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] Blinn, J.F., " A Generalization of Algebraic Surface Drawing" , ACM Trans. Graphics, Vol. 1, No3, July 1982, pp 135-256

[2] Nilo Stolte, Arie Kaufman., " Discrete Implicit Surface Models Using Interval Arithmetics" , In Second CGC Workshop on Computer Geometry, October 1997.

[3] Philip J. Schneider, David H. Eberly, " Geometric Tools for Computer Graphics" , Morgan Kaufmann Publisher, 2003