

# 페트로프-갤러킨 자연요소법에 의한 기하학적 비선형 해석

## Geometrically Nonlinear Analysis using Petrov-Galerkin Natural Element Method

이 홍 우\*                      조 진 래\*\*  
Lee, Hong-Woo                Cho, Jin-Rae

---

### ABSTRACT

This paper deals with geometric nonlinear analyses using a new meshfree technique which improves the numerical integration accuracy. The new method called the Petrov-Galerkin natural element method (PGNEM) is based on the Voronoi diagram and the Delaunay triangulation which is based on the same concept used for conventional natural element method called the Bubnov-Galerkin natural element method (BGNEM). But, unlike BGNEM, the test shape function is differently chosen from the trial shape function. In the linear static analysis, it is ensured that the numerical integration error of the PGNEM is remarkably reduced. In this paper, the PGNEM is applied to large deformation problems, and the accuracy of the proposed numerical technique is verified through the several examples.

---

### 1. 서    론

유한요소법과 같이 요소를 기반으로 한 수치기법의 단점을 극복하기 위한 방안으로 많은 연구자들이 무요소법(meshless)의 개념에 관심을 기울이기 시작하였으며, 1992년 Nayroles 등이 DEM (Diffuse Element Method)<sup>(1)</sup>을 발표한 이후로 편미분방정식의 새로운 해법으로 무요소 개념에 대한 집중적인 연구가 이루어져 왔다. 대표적으로 EFG (Element Free Galerkin)<sup>(2)</sup>, RKPM(Reproducing Kernel Particle Method)<sup>(3)</sup>, H-P Clouds<sup>(4)</sup>, Partition of Unity<sup>(5)</sup> 등이 무요소 개념을 바탕으로 제안된 방법들이다. 제안된 대부분의 무요소법들은 공통적으로 필수경계조건의 처리와 약 형식(weak form)의 수치적분에 있어서 문제점을 내포하고 있다.

최근의 자연요소법(NEM ; Natural Element Method)<sup>(6-7)</sup>은 보로노이 다이어그램(Voronoi diagram)과 델라우니 삼각화(Delaunay triangulation)와 같은 기하학적 개념을 도입하여 필수경계조건의 직접적 처리를 가능하게 하였다. 이는 기존의 무요소법과는 달리 Sibson<sup>(6)</sup> 및 Laplace 보간함수<sup>(7)</sup>가 완전한 보간특성을 가짐에 기인한다. 하지만, 자연요소법에서도 수치적분 오차에 대한 문제점은 여전히 미해결 상태로 남아 있으며, 적분오차에 대한 자연요소법의 정확도 및 수렴성 저하는 참고문헌<sup>(6-7)</sup>에서 보고되고 있다. 이에 저자들은 논문<sup>(8-9)</sup>에서 수치적분 오차를 감소시키기 위한 방안을 제시하고, 선형 탄성 문제에 대한 수치 예제를 통하여 그 성능을 검증하였다. 기존의 자연요소법이 부브노프-갤러킨(Bubnov-Galerkin) 개념에 기초한 정식화인 것에

---

\* 부산대학교 기계설계공학과 박사과정

\*\* 책임저자, 부산대학교 기계공학부 교수

반해 제안된 방법은 시험함수(test function)와 시도함수(trial function)가 다르게 적용되는 페트로프-갤러킨 (Petrov-Galerkin) 개념에 기반을 두고 있다. 따라서, 저자들은 새로운 방법을 페트로프-갤러킨 자연요소법 (PGNEM)이라 명명하였다.<sup>(8-9)</sup> 본 논문에서는 PGNEM을 이용한 기하학적 비선형 문제의 해법을 제시하고, 수치예제를 통해 PGNEM의 성능을 검증하도록 한다.

## 2. 페트로프-갤러킨 자연요소법(Petrov-Galerkin Natural Element Method)

### 2.1. 자연 이웃 보간함수(natural neighbor interpolation function)

본 논문에서 보로노이 다이어그램과 델라우니 삼각화는 2차원 유클리드(Euclidean) 공간  $R^2$ 에서 정의한다. 먼저, 평면상의 서로 다른 점 집합  $P$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P = \{ p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \}, p_I \in R^2 \quad (1)$$

점 집합  $P$ 의 1차 보로노이 다이어그램은 평면상의 서로 다른 점의 분포로부터 국부영역  $V_I$ 로 평면을 분할하게 되며, 수학적으로 다음과 같이 정의된다.<sup>(6-7)</sup>

$$V_I = \{ p \in R^2 : d(p, p_I) < d(p, p_J) \forall J \neq I \} \quad (2)$$

여기서,  $d(p_I, p_J)$ 는 점  $p_I$ 와  $p_J$  사이의 거리를 나타내는 유클리드 메트릭(metric)이다. 그림 1에 7개의 절점에 대한 보로노이 다이어그램을 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 보로노이 다이어그램은 각 점을 닫힌 부영역 또는 경계가 없는 부공간으로 분할하게 된다. 이에 대한 자세한 내용은 참고문헌<sup>(6-7)</sup>에서 확인할 수 있다.

Laplace 보간함수를 정의하기 위해 보로노이 다각형  $V_I$ 와  $V_J$ 의 1차원 공통 면(facet)인  $\omega_{IJ}$ 를 다음과 같이 정의한다.<sup>(7)</sup>

$$\omega_{IJ} = \{ p \in \bar{V}_I \cap \bar{V}_J, J \neq I \}, \bar{V}_I = V_I \cup \partial V_I \quad (3)$$

여기서,  $V_I$ 와  $V_J$  사이에 공통의 모서리가 존재하지 않으면  $\omega_{IJ}$ 는 공집합이 된다. 따라서,  $d(p_I, p_J) \neq 0$ 이며, 다음과 같은 관계가 성립된다.<sup>(7)</sup>

$$\sum_{J=1}^n \frac{|\omega_{IJ}| p_J}{d(p_I, p_J)} = p_I \left[ \sum_{J=1}^n \frac{|\omega_{IJ}|}{d(p_I, p_J)} \right] \quad (4)$$

여기서,  $|\cdot|$ 는 1차원에서 모서리 길이를 의미한다. 그림 2와 같은 2차원 평면 상의 보로노이 다각형을 고려 하면, 점  $p$ 는 4개의 자연 이웃 점을 가지고 있다. 그림에서와 같이 절점  $p_I$ 에 관련된 보로노이 모서리 길이는  $s_I(p) = |\omega_{IJ}|$ 로 표현되며, 절점  $p_I$ 의 보로노이 모서리와 점  $p$ 의 수직거리는  $h_I(p) = 0.5 d(p, p_I)$ 로 기술된다. 따라서, Laplace 보간함수  $\phi_I(p)$ 는 식 (5)와 같이 정의된다.<sup>(7)</sup>

$$\phi_I(p) = \frac{a_I(p)}{\sum_{J=1}^n a_J(p)}, a_I(p) = \frac{s_I(p)}{h_I(p)}, p \in R^2 \quad (5)$$

식 (5)에서 알 수 있듯이 2차원일 때의 Laplace 보간함수는 보로노이 모서리와 관련된 길이 비로 정의된다. 자연 이웃 점 기반의 보간 기법을 이용한 벡터 함수의 보간은 다음과 같이 표현된다.

$$u^h(\boldsymbol{p}) = \sum_{I=1}^m \phi_I(\boldsymbol{p}) u_I \quad (6)$$

여기서,  $u_I$  ( $I=1, 2, \dots, m$ )는  $m$ 개의 자연 이웃 점에서의 절점 벡터를 의미하며,  $\phi_I(\boldsymbol{p})$ 는 절점  $\boldsymbol{p}$ 에 해당하는 Laplace 보간함수를 나타낸다. Laplace 보간함수의 특성에 대한 자세한 사항은 참고문헌<sup>(7)</sup>에서 얻을 수 있다.

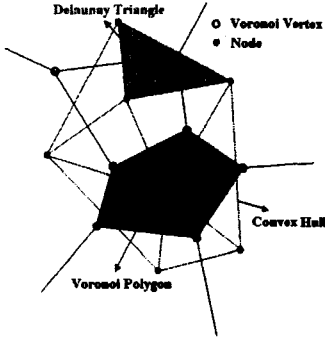


그림 1. 보로노이 다이어그램과 델라우니 삼각화

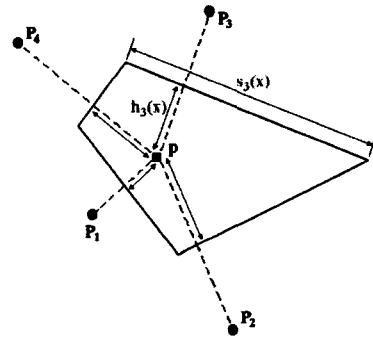


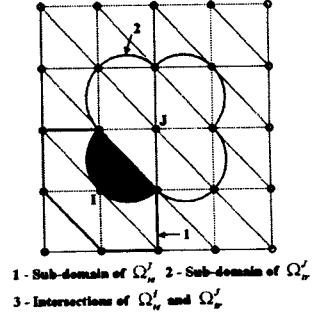
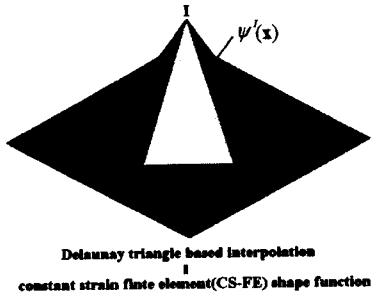
그림 2. 자연 이웃 기반의 Laplace 보간기법

## 2.2. 델라우니 삼각형 기반의 시험 형상함수

Sukumar 등<sup>(6-7)</sup>의 기존 BGEM(Bubnov-Galerkin Natural Element Method)에서는 시도 및 시험함수를 Laplace 보간함수를 이용하여 구성하였으며, 이는 적분함수의 지지영역과 적분영역의 불일치를 유발하여 심각한 적분정도의 저하를 야기시켰다. 이와 같은 적분오차로 인하여 BGEM은 조각시험을 통과하지 못할 뿐만 아니라, 점근적 수렴(asymptotic convergence)을 보장하지 못하는 경우도 발생하게 된다. 저자들의 선행 연구에서는 이러한 적분오차를 억제하기 위하여 시험함수의 지지영역을 적분영역과 동일하게 구성하는 방법을 제시하였다.<sup>(8-9)</sup> 이는 기존의 부브노프-갤러킨 기반의 자연요소법과는 달리 시도함수와 시험함수를 다르게 구성하기 때문에 페트로프-갤러킨 기반의 자연요소법으로 볼 수 있다. 따라서, 새로운 자연요소법을 기존의 BGEM에 대비하여 PGEM(Petrov-Galerkin Natural Element Method)으로 명명하였다.

PGEM에서 시험함수는 델라우니 삼각형 기반의 형상함수를 이용하여 구성한다. 즉, 시도 형상함수(trial shape function)는 BGEM의 형상함수인 Laplace 형상함수를 이용하고, 시험 형상함수(test shape function)는 델라우니 삼각형의 절점을 이용하여 새롭게 구성한다. 이러한 델라우니 삼각형 기반의 형상함수는 CSFEM(Constant Strain Finite Element Method)<sup>(10)</sup>의 형상함수와 동일하며, 적분점에서의 함수계산은 중심 좌표(barycentric coordinates)를 이용하여 얻을 수 있다.

그림 3(a)에서 구성된 형상함수의 지지영역은 절점  $I$ 를 둘러싼 델라우니 삼각형의 합 영역과 동일하며, 이는 적분영역과 적분함수 지지영역의 불일치로 인한 적분오차를 제거할 수 있는 매우 적절한 형상함수를 제공하게 됨을 의미한다. 즉, 그림 3(b)에서 절점  $I$ 의 시험함수영역  $\Omega'_{Ie}$ 와 절점  $J$ 의 시도함수영역  $\Omega'_J$ 의 교차영역은 적분영역인  $\Omega'_{Ie}$  내부에서만 정의됨을 알 수 있다. 따라서, 어떠한 경우에 있어서도 적분함수와 적분영역이 항상 일치하게 되며, BGEM의 가장 큰 단점인 적분의 부정확성에 의한 오차를 크게 줄일 수 있게 된다. PGEM을 이용한 선형 정해석(linear static analysis) 및 적분오차에 대한 평가는 참고문헌<sup>(8-9)</sup>에서 확인할 수 있다.



(a) PGNEM에서의 시험 형상함수 (b) 시험 및 시도 형상함수의 교차영역  
 그림 3. 페트로프-갈러킨 자연요소법(PGNEM)에서 형상함수의 지지영역

### 3. 기하학적 비선형 정식화

#### 3.1. 초기 형상에 대한 약 정식화

전체 영역이  $\Omega^{n+1}$ 이고 경계가  $\Gamma^{n+1}$ 인 변형 후의 탄성체를 고려하자. 영역의 경계를 따라 미리 규정된 변위  $\hat{u}_i^{n+1}$ 이 필수경계(essential boundary)  $\Gamma_D^{n+1}$ 에 부여되고, 표면력  $t_i^{n+1}$ 이 자연경계(natural boundary)  $\Gamma_N^{n+1}$ 을 따라 작용하는 탄성문제에 대한 정적 평형방정식은 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{n+1}}{\partial x_j^{n+1}} + b_i^{n+1} = 0, \quad \text{in } \Omega^{n+1} \quad (7)$$

$$u_i^{n+1} = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_D^{n+1}, \quad \sigma_{ij}^{n+1} n_j^{n+1} = t_i^{n+1} \quad \text{on } \Gamma_N^{n+1} \quad (8)$$

여기서,  $\sigma_{ij}^{n+1}$ 는 평형 상태의 Cauchy 응력 텐서(stress tensor),  $b_i^{n+1}$ 은 체적력을 의미한다.

식 (7)의 평형방정식에 대한 약 정식화(weak formulation)를 위해 변위 시도함수(trial function)  $u \in V = [H^1(\Omega^{n+1})]^2$ 과 시험함수(test function)  $v \in V_0 = [H_0^1(\Omega^{n+1})]^2$ 를 선정한다. 여기서,  $H^1(\Omega)$ 은 1차의 Hilbert 함수공간을 의미한다. 식 (7)에 시험함수  $v_i$ 를 곱하여 전체 영역  $\Omega^{n+1}$ 에 대하여 적분한 후, 부분적분과 발산정리(divergence theorem)을 적용하면 최종적으로 다음과 같은 약 형식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega^{n+1}} \sigma_{ij}^{n+1} \frac{\partial v_i}{\partial x_j^{n+1}} d\Omega^{n+1} = \int_{\Gamma_N^{n+1}} t_i^{n+1} v_i d\Gamma^{n+1} + \int_{\Omega^{n+1}} b_i^{n+1} v_i d\Omega^{n+1} \quad (9)$$

식 (9)의 약 정식화에서  $\Omega^{n+1}$ 은 변형 후 평형 상태에 도달한 물체의 영역을 나타낸다. 앞서 언급한 것처럼 대변형 문제에서 초기 형상과 변형 후 형상은 큰 차이를 보이기 때문에 평형 상태의 형상  $\Omega^{n+1}$ 은 미지의 상태라고 볼 수 있다. 따라서, 식 (9)의 직접적인 적분은 불가능하며, 알려져 있는 형상 즉, 참조 형상(reference configuration)  $\Omega^r$ 로의 사상(mapping)이 필요하다. 본 논문에서는 편의상 토탈 라그랑지 정식화(total Lagrangian formulation)를 적용하며, 이는 참조 형상으로서 초기 형상  $\Omega^0$ 를 사용하게 됨을 의미한다. 이에 따라 식 (9)를 초기 형상  $\Omega^0$ 로 사상시키면, 다음 식과 같은 최종적인 약 형식으로 정리되어 진다.

$$\int_{\Omega^0} S_{ij}^{n+1} \tilde{E}_{ij}^{n+1} d\Omega^0 = \int_{\Gamma_N^0} t_i^0 v_i d\Gamma^0 + \int_{\Omega^0} b_i^0 v_i d\Omega^0 \quad (10)$$

여기서, 변형 후 체적과 초기 체적과의 관계는 변형증분을  $F_{ij}^{n+1}$ 의 행렬식(determinant)에 의해 표현된다.<sup>(11)</sup>

$$d\Omega^{n+1} = J^{n+1} d\Omega^0 = |F_{ij}^{n+1}| d\Omega^0 = \left| \frac{\partial x_i^{n+1}}{\partial x_j^0} \right| d\Omega^0 \quad (11)$$

$S_{ij}^{n+1}$ 은 초기 형상에 대한 변형 후 상태의 2차 Piola-Kirchhoff(PK2) 응력을 의미하며, 다음의 관계식에 의해 정의된다.<sup>(11)</sup>

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \frac{1}{J^{n+1}} F_{ik}^{n+1} S_{kl}^{n+1} F_{jl}^{n+1} \quad (12)$$

또한,  $\hat{E}_{ij}^{n+1}$ 은 시험함수  $\mathbf{v}$ 에 의해 정의되는 변형률과 관련된 텐서로서 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{E}_{ij}^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m^{n+1}}{\partial x_i^0} \frac{\partial v_m}{\partial x_j^0} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{n+1}}{\partial x_j^0} \right] \quad (13)$$

한편, Green-Largange(GL) 변형률 텐서는 식 (14)와 같이 정의된다.<sup>(11)</sup>

$$E_{ij}^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m^{n+1}}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{n+1}}{\partial x_j^0} \right] \quad (14)$$

$t_i^0$ 는  $dI^{n+1}$ 과  $dI^0$ 의 면적 비에 의해 조정된(scaled) 표면력이며,  $b_i^0$ 도  $d\Omega^{n+1}$ 과  $d\Omega^0$ 의 체적 비에 의해 조정된 체적력이다. 따라서,  $t_i^0$ 와  $b_i^0$ 는 식 (15)와 같은 관계를 가진다.

$$t_i^0 = A^{n+1} t_i^{n+1}, \quad b_i^0 = J^{n+1} b_i^{n+1}, \quad A^{n+1} = J^{n+1} | [F_{ij}^{n+1}]^{-1} n_j^0 | \quad (15)$$

여기서,  $n_j^0$ 는  $dI^0$ 에 수직인 단위 벡터이며,  $A^{n+1}$ 은 Nanson의 관계<sup>(11)</sup>로부터 정의되는 면적 비이다.

### 3.2. 약 형식의 선형화

식 (10)의 약 정식화의 선형화(linearization)를 위해 각 적분소(integrand)를 Taylor 급수 전개시키면 다음과 같은 선형화된 약 형식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\mathcal{Q}^0} C_{ijpq}^n E_{pq}^{\hat{\Delta}} \hat{E}_{ij}^n d\Omega^0 + \int_{\mathcal{Q}^0} S_{ij}^n \hat{E}_{ij}^{\hat{\Delta}} d\Omega^0 = \int_{\Gamma_N^0} t_i^0 v_i dI^0 + \int_{\mathcal{Q}^0} b_i^0 v_i d\Omega^0 - \int_{\mathcal{Q}^0} S_{ij}^n \hat{E}_{ij}^n d\Omega^0 \quad (16)$$

여기서,  $S_{ij}^n$ 은 n 번째 평형 상태에서 계산된 PK2 응력이며,  $\hat{E}_{ij}^n$ 은 식 (13)에서  $u_i^{n+1}$  대신에  $u_i^n$ 이 대입된 식으로 n 번째 평형 상태에서 계산된 GL 변형률의 변분으로 생각할 수 있다. 한편,  $u_i^{\hat{\Delta}}$ 는 변위 증분(displacement increment)을 의미한다.

$C_{ijpq}^n$ 은 n 번째 평형 상태에서의 접선 물성 텐서(tangent modulus tensor)이며,  $E_{ij}^{\hat{\Delta}}$ 와  $\hat{E}_{ij}^{\hat{\Delta}}$ 는 각각 식 (17a)와 (17b)와 같이 정의된다.

$$E_{ij}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{u}^{\hat{\Delta}}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i^{\hat{\Delta}}}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j^{\hat{\Delta}}}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_m^{\hat{\Delta}}}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{\hat{\Delta}}}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_m^{\hat{\Delta}}}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{\hat{\Delta}}}{\partial x_j^0} \right] \quad (17a)$$

$$\hat{E}_{ij}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{u}^{\hat{\Delta}}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_m^{\hat{\Delta}}}{\partial x_i^0} \frac{\partial v_m}{\partial x_j^0} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_m^{\hat{\Delta}}}{\partial x_j^0} \right] \quad (17b)$$

선형화된 식 (16)의 약 정식화를 반복 형식(iteration form)으로 다시 쓰면, 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{\mathcal{Q}^0} C_{ijpq}^{(k)} E_{pq}^{\hat{\Delta}^{(k+1)}} \hat{E}_{ij}^{(k)} d\Omega^0 + \int_{\mathcal{Q}^0} S_{ij}^{(k)} \hat{E}_{ij}^{\hat{\Delta}^{(k+1)}} d\Omega^0 = \int_{\Gamma_N^0} t_i^{(k)} v_i dI^0 + \int_{\mathcal{Q}^0} b_i^{(k)} v_i d\Omega^0 - \int_{\mathcal{Q}^0} S_{ij}^{(k)} \hat{E}_{ij}^{(k)} d\Omega^0 \quad (18)$$

여기서, 상첨자 (k)는 n+1 번째 하중 단계의 (k) 번째 반복을 나타내며,  $\mathbf{u}^{\Delta(k+1)}$  은 (k+1) 번째 변위 증분으로 표현되는 것을 의미한다. 식 (18)에서 알 수 있듯이 하중 단계를 나타내는 상첨자는 편의상 생략하였다. 계산된 변위 증분으로부터 (k+1) 번째 반복 후의 변위가 계산된다.

$$\mathbf{u}_i^{(k+1)} = \mathbf{u}_i^{(k)} + \mathbf{u}_i^{\Delta(k+1)}, \quad k \geq 0 \quad (19)$$

### 3.3. 선형화된 약 형식의 이산화

선형화된 약 정식화의 근사해를 구하기 위해 좌표  $\mathbf{x}_n$ 에서의 변위 증분  $\mathbf{u}^{\Delta(k+1)}$  과 시험함수(test function)  $\mathbf{v}$ 를 다음 식과 같이 형상함수(shape function)을 이용하여 이산화한다.

$$\mathbf{u}^{\Delta(k+1)} = \sum \phi_I \bar{\mathbf{u}}_I^{\Delta(k+1)}, \quad \mathbf{v} = \sum \phi_I \bar{\mathbf{v}}_I \quad (20)$$

여기서,  $\phi_I$ 와  $\phi_I$ 는 각각 절점  $I$ 에 해당하는 시도(trial) 및 시험(test) 형상함수이며, 본 논문에서는 시도 형상함수로서 보로노이 다이어그램을 기반으로 한 Laplace 보간함수를, 시험 형상함수로서 델라우니 삼각형을 기반으로 한 일정 변형을 유한요소(constant strain finite element ; CSFE) 기저함수(basis function)을 도입한다.

식 (20)을 이용하여 식 (18)의 약 정식화를 이산화시키면 다음의 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{K}_m^{(k)} + \mathbf{K}_G^{(k)}] \bar{\mathbf{u}}^{\Delta(k+1)} = \mathbf{f}_{ext}^{(k)} - \mathbf{f}_{int}^{(k)} \quad (21)$$

여기서,  $[\mathbf{K}_m^{(k)}]$ 와  $[\mathbf{K}_G^{(k)}]$ 는 각각 물성 접선 강성행렬(material tangent stiffness matrix) 및 기하 접선 강성행렬(geometric tangent stiffness matrix)을 나타내며,  $\mathbf{f}_{ext}^{(k)}$ 와  $\mathbf{f}_{int}^{(k)}$ 는 각각 외력 벡터(external force vector) 및 내력 벡터(internal force vector)를 의미한다.

식 (21)로부터 (k+1) 번째 반복 후의 변위 증분을 얻을 수 있다. 지속적인 반복을 통해 n+1 번째 하중 단계의 평형상태에 수렴한 해(convergent solution)를 얻을 수 있으며, 본 논문에서는 적절한 수렴상태를 판단하기 위해 변위와 하중에 관련된 수렴조건(convergent condition)을 동시에 적용한다.

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{rel} = \frac{|\bar{\mathbf{u}}^{\Delta(k+1)}|}{|\bar{\mathbf{u}}^{(k+1)}|} \leq \alpha_u, \quad \Delta \bar{\mathbf{f}}_{rel} = \frac{|\mathbf{f}_{ext}^{(k+1)} - \mathbf{f}_{int}^{(k+1)}|}{|\mathbf{f}_{ext}^{(k+1)}|} \leq \alpha_f \quad (22)$$

여기서,  $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{rel}$  및  $\Delta \bar{\mathbf{f}}_{rel}$ 은 각각 상대 변위 증분(relative displacement increment)과 상대 하중잔여(relative force residual)을 나타내며,  $\alpha_u$ 와  $\alpha_f$ 는 각각 변위와 하중의 수렴기준 상수(convergence criteria constant)로서 본 논문에서는 1E-5을 적용한다.

## 4. 수치예제 및 결론

해석을 위한 물성 모델로서 Saint Venant-Kirchhoff 탄성 재료를 도입하였으며, 적용된 물성모델의 변형을 에너지 밀도 함수(strain energy density function), PK2 응력 및 접선 물성 텐서는 다음 식과 같이 주어진다.<sup>(11)</sup>

$$\mathbf{W}^{(k+1)} = \frac{1}{2} C_{i\bar{p}q}^{(k+1)} E_{\bar{p}q}^{(k+1)} E_{ij}^{(k+1)}, \quad S_{ij}^{(k+1)} = C_{i\bar{p}q}^{(k+1)} E_{\bar{p}q}^{(k+1)}, \quad C_{i\bar{p}q}^{(k+1)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{\bar{p}q} + \mu (\delta_{i\bar{p}} \delta_{jq} + \delta_{i\bar{q}} \delta_{jp}) \quad (23)$$

여기서,  $\lambda$ 와  $\mu$ 는 Lamé 상수이며,  $S_{ij}^{(k+1)}$ 는 (k+1)번째 반복 후의 PK2 응력이다.

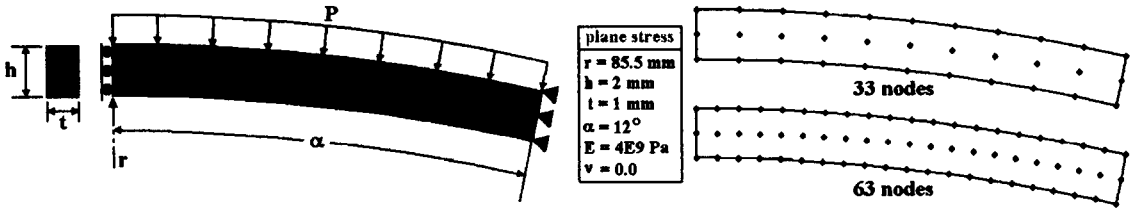


그림 4. 아치(arch) 해석을 위한 모델 형상과 절점 분포

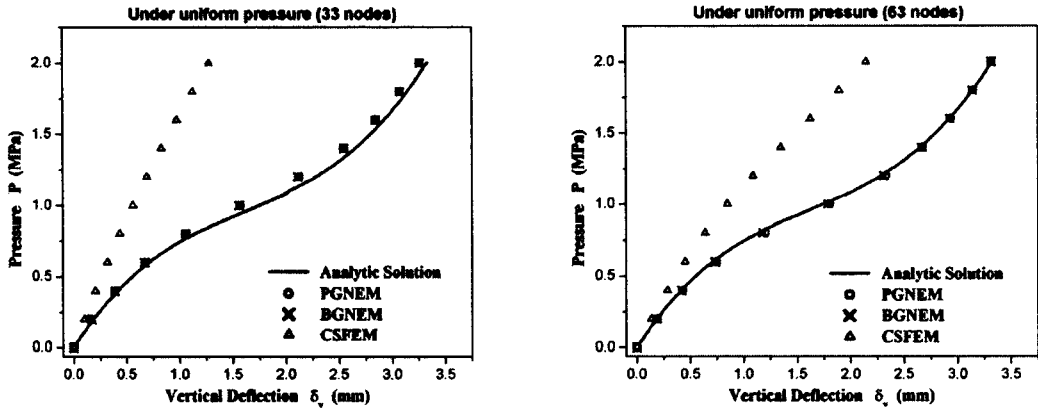


그림 5. 아치 모델에 대한 결과 그래프

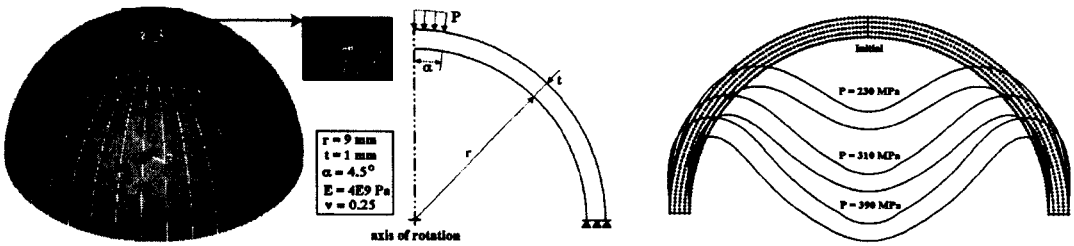


그림 6. 축대칭 해석 (a) 해석 모델 (b) PGNEM 결과 (405 절점)

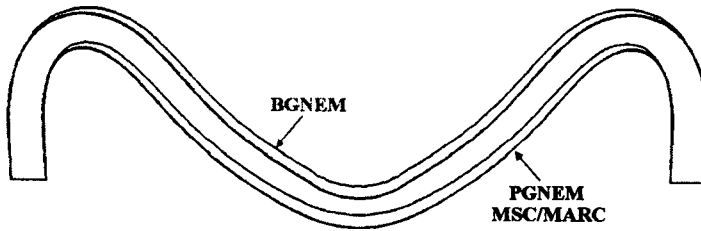


그림 7. PGNEM과 BGNEM 해석 결과의 비교

먼저, 아치(arch) 모델에 대한 해석을 수행하였으며, 그림 4에 해석 모델과 절점 분포를 도시하였다. 그림 5의 결과에서 알 수 있듯이 CSFEM의 처짐은 이론해의 결과와 매우 큰 차이를 보이고 있으나, PGNEM과 BGNEM의 결과는 적은 수의 절점으로도 매우 정확한 결과를 예측하고 있다. 다음으로 그림 6(a)에 도시한 것과 같이 반구형 막 구조물의 굽힘 해석을 축대칭 모델을 이용하여 해석하였으며, 그림 6(b)는 하중크기에 따른 PGNEM 처짐 형상을 도시한 것이다. 그림 7에 BGNEM과 PGNEM의 해석결과와 범용 유한요소 해석 프로그램인 MSC/MARC의 결과를 비교하였으며, MSC/MARC의 결과는 8절점 2차요소(총 1613 절점)를 이용하여 해석하였다. 그림에서 알 수 있듯이 PGNEM과 MSC/MARC의 결과는 거의 완전하게 일치하며, BGNEM의 처짐은 다소 작게 예측되고 있다. 이러한 결과는 대변형을 동반한 기하학적 비선형 해석에서도 제안된 PGNEM의 성능이 기존의 CSFEM과 BGNEM에 비해 우수하다는 것을 보여준다.

## 후 기

본 연구는 산자부 지역전략산업 석·박사 인력양성사업(2003.6-2006.4)의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P., "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements," *Computational Mechanics*, Vol. 10, 1992, pp. 307-318.
- (2) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp. 229-256.
- (3) Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. F., "Reproducing kernel particle methods," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, 1995, pp. 1081-1106.
- (4) Duarte, C. A. and Oden, J. T., "An h-p adaptive method using clouds," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, 1996, pp. 237-262.
- (5) Melenk, J. M. and Babuska, I., "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, 1996, pp. 289-314.
- (6) Sukumar, N., Moran, B. and Belytschko, T., "The natural element method in solid mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, 1998, pp. 839-887.
- (7) Sukumar, N., Moran, B., Semenov, A. Yu and Belikov, V. V., "Natural neighbor Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, 2001, pp. 1-27.
- (8) Cho, J. R. and Lee, H. W., "Petrov-Galerkin Natural Element Method Securing the Numerical Integration Accuracy," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, submitted.
- (9) 이홍우, 조진래, "페트로프-갤러킨 개념에 기초한 자연요소법에 관한 연구," 대한기계학회 2003년도 추계 학술대회논문집, 2003/11/5~7, pp. 1274-1279, 무주리조트.
- (10) Becker, E. B., Carey, G. F. and Oden, J. T., *Finite Elements: An Introduction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1981
- (11) Holzapfel, G. A., *Nonlinear Solid Mechanics ; A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2000.