

라멘구조물의 유효좌굴장 결정 Determination of the Effective Buckling Length of Rahmen

경 용 수* 진만식** 김 문 영***
Kyung, Yong-Soo Jin, Man-Sik Kim, Moon-Young

ABSTRACT

The goal of this paper is to determine the accurate effective length factor(K factor) for buckling design of plane frames and to point out the practical limitations of the alignment chart which provides the approximate effective length factor. At present, the most general method to obtain K factors is to use the alignment chart which is given in the form of nomograph in LRFD-AISC specification commentaries. However it should be realized that various simplifications and assumptions were used in obtaining the alignment chart. Therefore, a simple but effective method to obtain accurate K-factors through the stability analysis of plane frames is developed in this study. To demonstrate the accuracy and effectiveness of the present scheme, K-factors by system buckling analysis of frames are calculated and compared with those calculated by the alignment chart.

1. 서 론

LRFD-AISC(American Institute of Steel Construction) commentary에서는 가로흔들이(side sway)를 허용하거나 이를 허용치 않는 프레임을 설계할 때 강제 보-기둥부재의 유효좌굴계수(이후 "K-factor"사용)를 산정하기 위하여 alignment chart를 추천하고 있다. Alignment chart는 실용적인 K-factor를 결정하는 데 가장 널리 쓰이는 방법으로 알려져 있으며, 이렇게 산정한 K-factor를 이용하여 축방향력과 휨모멘트를 받는 보-기둥부재의 내하력을 검토할 수 있다.

Alignment chart는 여러 개의 가정 하에 유도되었으며, 많은 연구자들은 이와 같은 가정 하에 일반적으로 널리 쓰일 수 있는 프레임 요소의 좌굴하중과 유효좌굴 길이를 쉽게 결정하는 차트를 제공하는 데 많은 노력을 기울였다. Galambos(1988)는 alignment chart를 이용하여 프레임의 안정성을 검토하는 경우에 실제와 다소 어긋나는 가정과 간략화 때문에 대칭적인 프레임이나 대칭적인 하중 재하의 경우에서만 적용되고 강성이 하중과 대략적인 비례관계가 있는 프레임의 경우에만 믿을 만한 결과를 준다고 언급하였다.⁽¹⁾ 이 때문에 많은 연구자들은 alignment chart를 폭넓게 적용할 수 있도록 이러한 제약조건을 극복하려고 노력하였다. Duan과 Chen(1989), Bridge와 Fraser(1987), Yura(1971)는 상대 강성비 (G factor)를 수정하는 방법을 제시하였고,^{(2),(3),(4)} LeMessurier(1977), Chu와 Chow(1969)는 Alignment chart에서 나온 결과 값을 보정하는 방법을 소개하기도 하였다.^{(5),(6)} 또한 LRFD Commentary(AISC 1993)에서는 비대칭효과를 고려할 수 있는 소위 기댄 기둥효과(Leaning Column Effect)를 제시하였고,⁽⁷⁾ Roddis등(1998)은 매개변수연구를 통해 alignment chart에 의한 K-factor와 전체 프레임 좌굴해석을 통해 얻은 K-factor 값의 차이를 비교하였지만, 이 방법의 기하학

* 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정
** (주)다산컨설팅 사원
*** 성회원, 성균관대학교 토목환경공학과 교수

적 의미를 명확히 설명하지는 못하였고 또한 연구대상 구조물이 가로흔들이가 있는 프레임의 경우로 제한되었다.⁽⁸⁾

본 연구에서는 K-factor를 결정하는 데 있어서 각 부재의 좌굴형상은 사인함수 형태를 취하므로 반 사인 함수에 대응하는 길이가 단순지지 하에서 유효좌굴길이에 해당한다는 점에 착안하여, alignment chart법의 제약조건을 근본적으로 제거할 수 있는 간단하고 동시에 정확한 산정방법을 제시한다. 이를 위하여 먼저 축하중을 받는 보-기둥요소의 엄밀한 접선강도행렬을 산정하고, 직접강도법에 근거하여 전체 평면프레임 시스템의 강도행렬을 구한다. 이때 경계조건을 고려한 접선강도행렬의 행렬식이 영이 되는 좌굴파라미터를 산정함으로써 각 부재의 좌굴하중 및 유효좌굴길이를 결정할 수 있다. 해석예제를 통하여 alignment chart법에 의한 결과와 본 연구방법에 의한 결과를 비교, 검토하여 본 연구의 정당성을 입증한다.

2. 정확한 K-factor 산정법

본 장에서는 전체 프레임 좌굴해석을 통하여 개별 부재의 K-factor를 정확히 산정하는 방법 및 개념을 설명한다.

2.1 탄성지지된 보-기둥 부재의 K-factor 산정

그림 1(a)는 축하향력 P 를 받는 보-기둥부재가 양단에서 이동 및 회전스프링에 의하여 지지되는 형상을 나타낸 것이다. 여기서 EI, L 은 각각 휨강성과 부재길이를 의미한다. 또한 \hat{k}_i, \hat{g}_i 는 각각 양단의 이동 및 회전 스프링상수이다. 이때 부재의 지배방정식은 식 (1)와 같다.

$$v(x)'''' + k^2 v(x)'' = 0 \tag{1}$$

여기서, $k^2 = P/EI$

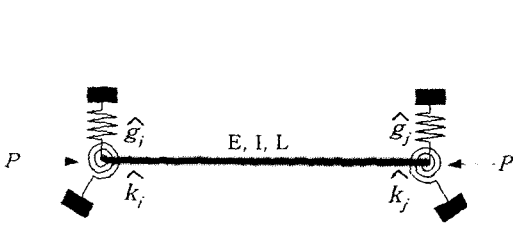


그림 1(a) 부분강절된 프레임 요소

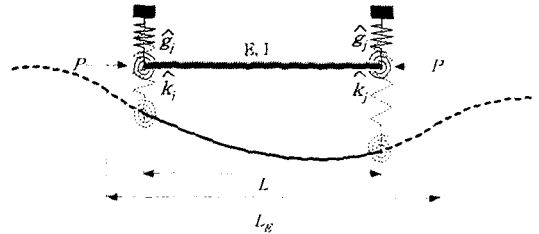


그림 1(b) 부분강절된 프레임 요소의 유효좌굴길이(L_E)

식(1)의 지배방정식을 편리하게 계산하기 위해 다음과 같이 새로운 변수를 도입한다.

$$k_i = \frac{\hat{k}_i}{EI}, g_i = \frac{\hat{g}_i}{EI}, k_j = \frac{\hat{k}_j}{EI}, g_j = \frac{\hat{g}_j}{EI} \tag{2}$$

이제 식 (1)의 일반해는 다음과 같다.

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D \tag{3}$$

여기서, 세 번째와 네 번째 항은 1차 함수로서 각각 부재의 강제회전 및 강제이동변위를 나타낸다. 이러한 변위형상은 변형이 영이기 때문에 좌굴하중에 영향을 주지 않는다. 이에 반하여 첫 번째와 두 번째 항은 부재의 처짐변형을 발생시키는 항으로서 sine, cosine함수의 조합으로 이루어짐을 알 수 있다. 따라서 일반해에 경계조건을 적용하여 처짐 형상을 구하였을 때 단순지지 점에 대응하는 변곡점과 변곡점 사이의 거리를 유효좌굴길이라 할 수 있다. (그림 1(b) 참조)

이제 식 (3)의 일반해를 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 연립방정식 형태의 식 (4)을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 k_i B + k^2 C + k_i D &= 0 \\
 g_i k A + k^2 B + g_i C &= 0 \\
 (k_j \sin kL) A + (k_j \cos kL) B - (k^2 - k_j L) C + k_j D &= 0 \\
 (k_j \cos kL - k^2 \sin kL) A - (g_j k \sin kL + k^2 \cos kL) B + g_j C &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

위의 연립방정식에서 kL 을 u 로 표현하고 행렬식을 구하면 다음 식 (5)과 같다.

$$\begin{aligned}
 &\left[-(k_i + k_j) \frac{u^6}{L^6} + [g_i g_j (k_i + k_j) + k_i k_j L] \frac{u^4}{L^4} + k_i k_j (g_i + g_j - g_i g_j L) \frac{u^2}{L^2} \right] \sin u \\
 &+ \left[(k_i + k_j)(g_i + g_j) \frac{u^5}{L^5} - k_i k_j L (g_i + g_j) \frac{u^3}{L^3} - 2k_i k_j g_i g_j \frac{u}{L} \right] \cos u + 2k_i k_j g_i g_j \frac{u}{L} = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

이와 같은 초월방정식은 가장 작은 양의 근, 즉 u_{cr} 을 얻는다. 이것으로 식 (6)과 같이 단부에서 탄성지지된 압축부재의 좌굴하중 P_{cr} 을 구할 수 있다.

$$P_{cr} = \frac{u_{cr}^2 EI}{L^2} \tag{6}$$

위에서 언급한 바와 같이 그림 3에서 변곡점 사이의 거리가 실제 유효한 좌굴길이가 된다. 따라서 K-factor는 식 (7) 로부터 계산할 수 있다.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad \text{또는} \quad K = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{P}} \tag{7}$$

2.2 평면 프레임의 엄밀한 좌굴하중 및 유효좌굴길이 산정

그림 2a,b는 길이가 L 이고 축하중이 부재 내에서 일정한 부재의 절점력 벡터와 절점변위 벡터를 각각 식(8a,b)로 나타내었고, 식(9)는 부재의 접선강도 행렬을 나타내었다.⁹⁾

$$\langle u^p, v^p, \omega^p, u^q, v^q, \omega^q \rangle \tag{8a}$$

$$\langle F_1^p, F_2^p, M^p, F_1^q, F_2^q, M^q \rangle \tag{8b}$$



그림 2(a) 프레임요소의 절점력



그림 2(b) 프레임요소의 절점변위 벡터

$$K_e = \begin{pmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b_1 & b_2 & \cdot & -b_1 & b_2 \\ & & b_3 & \cdot & -b_2 & b_4 \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ & & & & b_1 & -b_2 \\ \text{symm} & & & & & b_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

여기서, $a = EA/L$, $b_1 = 12\phi_1 \cdot EI/L^3$, $b_2 = 6\phi_2 \cdot EI/L^2$, $b_3 = 4\phi_3 \cdot EI/L$, $b_4 = 2\phi_4 \cdot EI/L$

식 (9)의 절선강도 행렬은 한 개의 부재의 부재좌표계에서 구한 강성행렬을 나타낸다. 따라서 해석하고자 하는 구조물의 전체 강성행렬을 구성하기 위해서는 아래의 식과 같이 전체좌표계에서 강도행렬로 변환시켜야 한다.

$$K_E = T^T K_e T \quad (10)$$

여기서, T = 좌표변환행렬. 이제 직접강도법에 근거하여 각 부재의 강도행렬을 더하면 전체시스템의 절선 강도행렬($K = \sum K_E$)을 얻을 수 있다. 이때 K_e 는 안정함수를 포함하고 있으므로, 강도행렬 K 는 축력의 함수행렬임에 주목해야 한다.

본 연구에서 적용하는 프레임의 좌굴하중을 산정하는 알고리즘은 다음과 같다. 이때 외력은 비례하중 (proportional loading)으로 가정하고, 하중파라미터는 λ 로 표시한다.

1. 단위비례하중에 하중파라미터 λ 를 곱하여 산정한 외력에 대하여 각 부재의 축력 λP_e 를 산정한다. 여기서, P_e 는 λ 값이 1인 경우의 부재축력을 나타낸다.
2. 식 (9)와 (10)을 이용하여 구조물 전체의 강도행렬을 산정한다.
3. 단계 2에서 구한 강도행렬에서 경계조건을 적용하고 행렬식을 산정한다. 이때 이분법(bisection method)을 사용하여 행렬식이 영이 되는 가장 작은 λ_{cr} 값을 산정한다.

$$\det|K(\lambda)| = 0 \quad (11)$$

4. 최종적으로 각 부재의 좌굴하중은 P_e 에 λ_{cr} 를 곱하여 구할 수 있다.
5. 유효좌굴길이는 식 (7)와 단계 4의 결과를 이용하여 다음 식으로 산정할 수 있다.

$$L_E = KL = \pi \sqrt{\frac{EI}{P_e \lambda_{cr}}} \quad (12)$$

일반 프레임구조에서 개별 압축부재의 K-factor를 산정하는 경우에, 2.1절에서 제시된 양단 탄성 지지된 압축재의 유효좌굴길이를 산정하는 개념을 그대로 적용할 수 있다. 즉, 주목하는 압축재의 양단에 연결된 보 또는 기둥의 영향은 단부에서 탄성 지지되는 수평 및 회전 스프링상수로 치환할 수 있으며 이때 얻는 좌굴 모드에서 변곡점과 변곡점사이의 사인곡선에 대응하는 길이를 유효좌굴 길이로 취하게 된다.

3. 수치예제

3.1 가로흔들이의 허용 유무에 따른 단층 2-bay 프레임의 K-factor 산정

그림 3과 4는 각각 가로흔들이가 없는 프레임과 가로흔들이가 있는 2-bay 프레임을 나타내고 있으며, 모든 부재의 휨강성과 기둥의 축압축력은 동일한 값을 갖는 대칭구조 시스템이다. 표 1, 2는 전체 좌굴해석 프로그램을 이용하는 본 연구의 방법에 의한 K-factor와 기댄기둥효과를 반영한 alignment chart의 결과의 비교한 것이다.

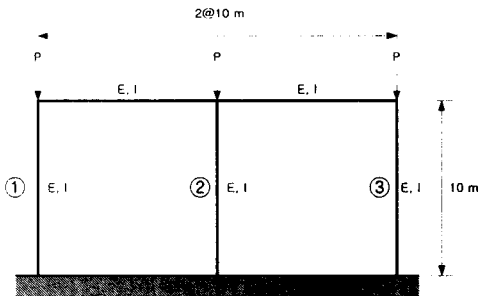


그림 3 가로흔들이가 있는 프레임

표 1 가로흔들이가 있는 프레임의 K-factor

기 둥 1		기 둥 2	
본 연구	기댄기둥효과를 고려한 차트법	본 연구	기댄기둥효과를 고려한 차트법
1.136	1.137	1.136	1.137

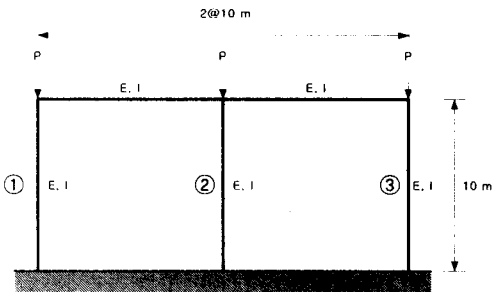


그림 4 가로흔들이가 없는 프레임

표 2 가로흔들이가 없는 프레임의 K-factor

기 둥 1		기 둥 2	
본 연구	기댄기둥효과를 고려한 차트법	본 연구	기댄기둥효과를 고려한 차트법
0.609	0.661	0.609	0.661

표 1에서는 가로흔들이가 없는 프레임에서는 비슷한 K-factor 값을 나타내었으나, 표 2의 가로흔들이가 있는 프레임에서는 후자의 방법이 더 큰 K-factor 값을 주는 것을 알 수 있으며, 최대 8.5%의 차이가 발생하였다. 이것은 기본적으로 alignment chart의 적용을 위해 여러 가지 가정을 내포하고 있어 기본모델과 어긋나므로 인해 차이가 커짐을 알 수 있다.

3.2 단면 2 차 모멘트의 비대칭성을 갖는 3층 3-bay 프레임

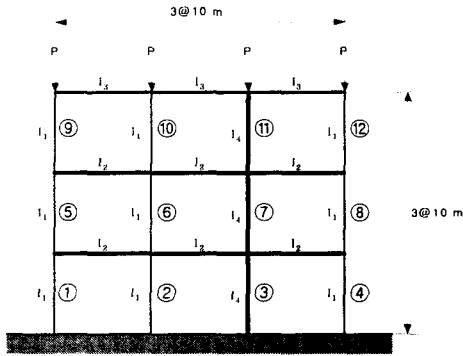


그림 5 비대칭 프레임 구조

표 3 단면제원

단 면	단면적 (cm^2)	단면 2차모멘트 (cm^4)
450×200×9×14	96.76	$I_1 = 33500$
400×200×8×13	84.12	$I_2 = 23700$
350×250×8×12	88.15	$I_3 = 18500$
498×432×45×70	770.1	$I_4 = 298000$

그림 5와 표 3은 각각 모든 기둥이 동일한 축압축력을 받는 3층 3-bay 프레임과 이때 사용된 제원을 나타낸 것이다. 여기서 기둥의 휨강성이 비대칭성을 보일 수 있도록 3, 7, 11 번 기둥의 단면 2차 모멘트만을 기준이 되는 2차 모멘트(I_1)의 9배까지 증가시키면서 K-factor를 산정하였다. 결과적으로 이 기둥들의 단면 2차모멘트의 증가는 모든 기둥의 강성 parameter($\phi = \sqrt{P/EI}$)가 각층마다 다르게 되므로, alignment chart를 사용하기 위한 기본 가정에 위배된다는 것을 알 수 있다.

표 4는 두 가지 방법을 적용한 결과를 제시한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 전체 프레임 좌굴해석에서 구한 각 기둥의 K-factor와 alignment chart로 구한 K-factor가 최대 41.4% 까지 차이가 남을 알 수 있다. 이것은 3, 7, 11 기둥의 강성이 타 기둥의 강성보다 9배나 커서 구조물의 비대칭 거동을 보인 결과라고 판단된다. 이처럼 기본 가정과 크게 위배되는 비대칭 구조의 경우에 alignment chart 법을 적용하는 것은 실제와 상당한 차이를 보일 수 있다. 앞의 예제와 마찬가지로 본 연구의 방법에 의한 K-factor는 각 기둥의 강성과 길이가 같으면 동일한 값을 나타내지만, alignment chart법에 의한 K-factor는 표 4에서와 같이 각 구하고자 하는 기둥에 연결된 보와 기둥의 강성비에 따라 다르게 나타남을 볼 수 있다.

표 4 가로흔들이가 있는 프레임의 각 기둥 K-factor 비교

기둥 1		기둥 2		기둥 3		기둥 7		기둥 8		기둥 9	
본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과
1.323	1.352	1.323	1.362	3.947	2.311	3.947	2.912	1.323	1.709	1.323	1.632
기둥 4		기둥 5		기둥 6		기둥 10		기둥 11		기둥 12	
본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과	본 연구	기대기 동효과
1.323	1.360	1.323	1.701	1.323	1.717	1.323	1.637	3.947	2.806	1.323	1.636

3.3 연직 압축력의 변화를 고려한 평면프레임

그림 6은 3층 3-bay의 평면 프레임으로서 모든 기둥 및 보의 강성이 같으나 하중은 3가지 방법으로 다르게 재하된다. 각각의 경우에 대한 AB 기둥의 K-factor값을 표 5에 나타내었다.

그 결과, 본 연구의 방법에 의한 K-factor값은 각 경우에 따라 변하지만 alignment chart법은 이를 반영하지 못한 채 거의 같은 K-factor값만을 제시한다. 이것은 alignment chart법은 비록 원(far end), 근단(near end)모멘트 비로써 수정되어지나 AB기둥의 주변부재에 대한 강성비에 주로 의존하기 때문이다.

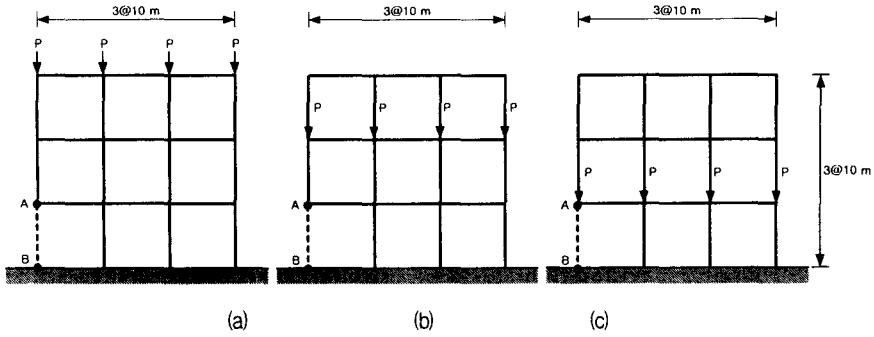


그림 6 3층 3-bay 평면 프레임

표 5 좌굴하중 및 K-factor 비교

AB 기둥(braced)	그림 a	그림 b	그림 c	AB 기둥(unbraced)	그림 a	그림 b	그림 c
좌굴하중(tonf)	21413.079	35205.350	52539.499	좌굴하중(tonf)	8963.413	10044.480	13516.83
기댄기둥효과를 고려한 차트법	0.636	0.636	0.636	기댄기둥효과를 고려한 차트법	1.216	1.216	1.216
본 연구	0.760	0.684	0.560	본 연구	1.355	1.280	1.103

다음 예제는 그림 7와 같이 모든 부재의 보와 기둥의 강성을 일정하게 유지한 2층 2-bay 평면 프레임에서 단독하중을 좌측과 중앙 기둥에 각각 재하 하였다. 그림 7a,b에서 AB기둥에 대한 K-factor를 구하여 표 6에 나타내었다. 두 경우에 대해 전체 프레임 좌굴해석을 수행하여 K-factor는 두 경우에 대해 거의 비슷한 값을 가지고 있다. 이것은 하중의 수가 적어서 가로흔들이 방지 유무에는 따라 상대적으로 영향이 적다. 하지만 상대 강성비에 의존하는 alignment chart법은 두 가지 경우의 상대 강성비의 차가 2배, 가로흔들이의 방지유무에 따른 K-factor의 값의 차이가 비교적 뚜렷하다. 따라서 하중에 대한 K-factor의 영향이 분명히 있음에도 불구하고 alignment chart법을 사용할 때에는 이를 반영하지 못함을 알 수 있다.

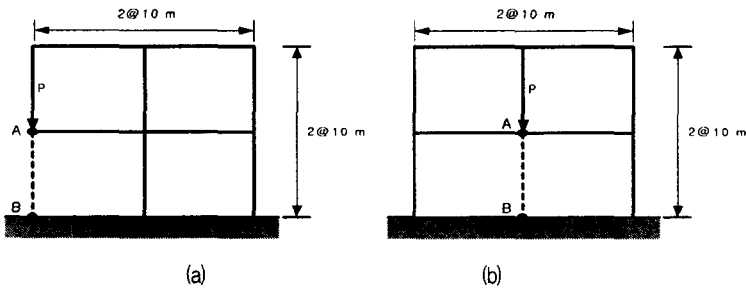


그림 7 2층 프레임 구조에 재하되는 하중

표 6 좌굴하중 및 K-factor의 비교

AB 기둥(braced)	그림 (a)	그림 (b)	AB 기둥(unbraced)	그림 (a)	그림 (b)
좌굴하중(tonf)	53718.065	57421.097	좌굴하중(tonf)	38640.545	38172.940
기댄기둥효과를 고려한 차트법	0.370	0.370	기댄기둥효과를 고려한 차트법	0.713	0.713
본 연구	0.553	0.535	본 연구	0.652	0.656

4. 결론

본 연구에서는 축력효과($P-\Delta$, $P-\delta$ 효과)를 고려하는 전체 프레임의 좌굴해석을 통해 산정한 좌굴하중을 이용하여 유효좌굴길이를 구하는 방법을 제시하였다. 한편, alignment chart는 각 부재 절점의 강성비 계수를 이용하여 도표를 사용해서 간단히 각각 부재의 K-factor를 얻을 수 있다. 수치예제를 통하여 두 가지 방법으로 얻은 K-factor 값을 비교하여 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

1. LRFD-AISC의 규정에 의한 Alignment chart법은 사용방법의 간편성 때문에 널리 사용되고 있지만, 여러 가정에 기초하여 유도된 방법이기 때문에 이러한 가정에 위배되는 구조에 적용하는 경우에는 적절한 보정이 요구된다.

2. Alignment chart와 전체 프레임 해석을 통해 얻은 각각의 K-factor의 차이는 보-기둥의 강성, bay width, 부재간의 연결강성 등에 따라 크게 발생할 수 있어, alignment chart로 얻은 유효좌굴길이를 이용한 보-기둥부재의 안정성 검토 시 주의를 요한다.

3. 시스템 좌굴고유치해석에 근거한 본 연구의 방법은 alignment chart법에서 도입한 가정의 제약을 받지 않고 평면프레임 구조의 각 기둥의 정확한 유효좌굴길이를 산정하는 것이 가능하다. 아울러 본 방법은 사장교의 주탑, 주형과 같이 부재 내의 축력이 다른 경우에도 효과적으로 K-factor를 산정할 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 목적기초사업비(과제번호 : R01-2002-000-00265-0)와 BK21 연구비에 의하여 연구되었기에 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. Galambos, T. V., (1988), *Guide to Structural Stability Design Criteria for Metal Structures, 4th Ed.*, John Wiley and Sons, New York
2. Duan, L. and Chen, W. F., (1989), Effective Length for Columns in Unbraced Frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 115 No.1, pp.149-165
3. Bridge, R. Q., and Fraser, D. J., (1987), Improved G-factor Method for Evaluating Effective Lengths of Columns, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 113 No. 6, pp.1341-1356
4. Yura, J. A., (1971), The Effective Length of Column in Unbraced Frames, *Engineering Journal*, AISC, Vol.8 No.2, pp.49-67
5. LeMessurier, W. J., (1977), A Practical Method of Second Order Analysis, Part 2-Rigid Frames, *Engineering Journal*, AISC, 2nd Qtr., pp.49-67
6. Chu, K.-H., and Chow, H. L., (1969), Effective Column Length in Unsymmetrical Frames, *Publication*, International Association of Bridge Structural Engineering, Vol.29, No.1
7. American Institute of Steel Construction, (1993), *Load and Resistance Factor Design Specification for Steel Buildings*, Chicago, IL.
8. Roddis, W. M. K., Hamid, H. A and Guo, C. Q., (1998), Factors for Unbraced Frames: Alignment Chart Accuracy for Practical Frame Variations, *Engineering Journal*, Vol.35 No.3, pp.81-93
9. 김문영, 장승필, (1990), 전단변형을 고려한 평면배대 구조물의 기하적인 비선형 해석, 대한토목학회논문집, 제 10권 1호, pp.27-36