

주자유도 선정을 위한 2단계 축소기법의 제안과 축소시스템 구성에 관한 연구

Two-Level Scheme for Selection of Degrees of Freedom by Energy Estimation Combined with Sequential Elimination

김 현 기* 조 맹 효†
Hyungi Kim Maenghyo Cho

ABSTRACT

A number of approximate techniques have been developed to calculate the eigenvalues in a reduced manner. These schemes approximate the lower eigenvalues that represent the global behavior of the structures. In general, sequential elimination has been widely used with reliability. But it takes excessively large amount of time to construct a reduced system. The present study proposes two-level condensation scheme(TLCS). In the first step, the candidate elements are selected by element-level energy estimation. In the second step, master degrees of freedom are selected by sequential elimination from the candidate degrees of freedom linked to the selected elements in the first step. Numerical examples demonstrate that the proposed method saves computational cost effectively and provides a reduced system which predicts the accurate eigenvalues of global system.

1. 서 론

일반적으로 구조물의 고유치 해석을 위해서는 많은 계산시간을 필요로 하며, 이 문제를 해결하기 위한 연구들이 활발히 진행되어 왔다. 전체 구조물의 거동은 중요한 몇 개의 저차모드에 의해 지배된다. 이러한 특성을 이용하여 중요한 저차모드만을 추출하는 축소시스템을 구성함으로써 연산시간과 전산자원을 줄이기 위한 방법들이 제안되었다[1~4]. 축소시스템 구성을 위한 주자유도가 선정되면 해석 시간의 감소는 확연하며, 그에 대한 축소시스템 구성 방법들도 다양하게 제안되어 왔다. 축소시스템의 정확성을 결정하는 요인은 크게 두 가지로 나누어 생각할 수 있다. 첫 번째는 주자유도 선정이 적절해야 하는 것이고, 두 번째는 주자유도와 부자유도 사이의 관계를 표현하는 변환행렬의 오차를 최소화하면서 시스템을 근사화해야 한다는 것이다. 축소시스템 구성을 위해서는 주자유도 선정이 가장 중요하며, 축소시스템의 정확도는 잘 근사화 된다 하더라도 선정된 주자유도에 따라 그 한계를 갖게 된다.

주자유도 선정을 위한 다양한 방법들이 제안되어 왔으나, 순차적 소거법(Sequential Elimination Method)이 가장 널리 사용되고 있다[5,6]. 순차적 소거법은 시스템의 질량행렬과 강성행렬의 대각항의 비가 큰 자유도부터 순차적으로 제거하는 방법이다. 그러나, 이 방법은 매 알고리즘 마다 한 개의 자유도만을 소거하므로, 최종적인 축소시스템을 구성하기 위해서는 상당한 시간 비용을 필요로 한다. 최근에, 이 문제를 해결하면서 축소시스템을 구성하는 방법으로 각 자유도의 에너지 평

* 서울대학교 기계공학부 대학원생
† 서울대학교 기계항공공학부 부교수

가를 통하여 주자유도를 선정하는 방법이 제안되었다[7]. 순차적 소거법이 시스템의 거동에 크게 영향을 주지 않는 자유도를 제거하여 최종적으로 남는 자유도를 이용하는 것과 달리 이 방법은 각 자유도 에너지 평가를 통해 한꺼번에 원하는 개수 만큼의 주자유도를 선정하는 방법이다. 따라서, 기존의 순차적 소거법이 갖고 있는 시간 소요의 문제점은 고려하지 않아도 되는 장점이 있으며, 축소 시스템의 신뢰성도 어느 정도 보장된다고 할 수 있다. 그러나, 이 방법은 주자유도 선정 결과가 경계 조건이나 해석 구조물에 따라 의존하는 경향을 보이고 있으며, 구성된 시스템이 저차 모드를 강조하는 경향을 보인다.

본 연구에서는 주자유도 선정과정과 축소시스템 구성에서 발생하는 문제를 해결할 수 있는 2 단계 축소기법(Two-Level Condensation Scheme)을 제안한다. 첫 번째 단계는 요소단위의 에너지 평가를 통해 주자유도 선정이 이루어질 영역을 근사화 시키는 단계이다. 요소별 에너지는 리츠벡터를 통해 평가하게 되고, 각 요소별 에너지에서 설정된 요소 개수만큼이 선택된다. 두 번째 단계에서는 근사화된 영역에서 기존의 순차적 소거법을 적용하여 최종적인 축소시스템을 구성하게 된다. 순차적 소거법은 상당히 많은 시간을 필요로 하지만, 본 연구에서 제안하는 방법에서는 전체 시스템과 비교하여 1단계 축소단계 결과로부터 얻어진 상당히 감소된 시스템에 적용되므로 연산시간이 많이 요구되지는 않는다. 최종적으로 선정된 주자유도는 IRS(Improved Reduced System)연산을 통해 축소시스템을 구성하게 된다.

수치예제를 통해 제안된 방법의 효율성과 정확성을 검증하고, 기존의 방법들과의 비교를 통해 그 신뢰성을 확인한다.

2. 요소단위 에너지 평가를 통한 1단계 축소시스템의 구성

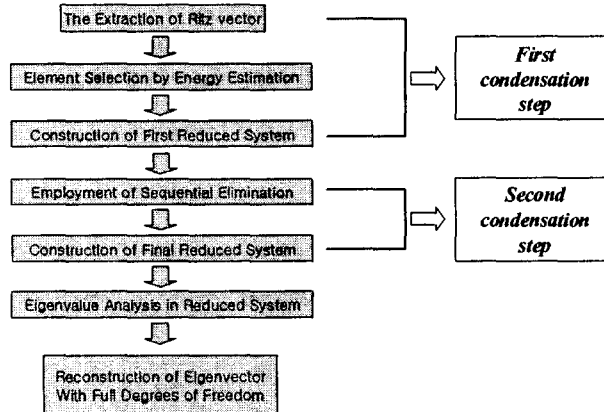


Fig.1 The present method algorithm for constructing of reduced system by the present method(TLCS).

본 연구에서 제안하는 방법의 전체적인 알고리즘은 Fig.1에 주어져 있다. 1단계는 요소단위 에너지 평가를 통한 축소시스템 구성단계이고, 2단계는 순차적 소거법에 의한 최종적인 축소시스템의 구성단계이다. 축소시스템이 구성되면, 고유치 해석을 통한 고유값과 고유벡터를 얻을 수 있고, 필요한 경우 주자유도와 부자유도의 변환 행렬을 통해 전체 시스템을 얻을 수 있게 된다.

2.1 리츠(Ritz)벡터

요소별 에너지 평가는 리츠벡터를 통해 이루어진다. 초기 가상하중은 질량 행렬의 대각항으로

근사화되며, 식 (1)의 정적문제를 구성하고 식 (2)의 정규화 과정을 통해 최초의 리츠벡터를 얻을 수 있다.

$$[K] \{x^{(1)}\}^* = [M_{ii}] \quad (1)$$

$$\{x^{(1)}\} = \frac{\{x^{(1)}\}^*}{\{x^{(1)}\}^{*T} [M] \{x^{(1)}\}^*} \quad (2)$$

식 (2)에서 구해진 결과는 질량행렬과의 연산을 통해 두 번째 리츠벡터를 구하기 위한 가상하중벡터로 사용한다. 이전 단계에서 구해진 벡터들은 Gram-Schmit 직교화 과정을 통해 현재 단계의 벡터로부터 제거된다. 식 (3)은 이 과정을 보여주고 있다.

$$\begin{aligned} \{x^{(i)}\} &= \{x^{(i)}\} - \sum_{k=1}^{i-1} [\{x^{(k)}\}^T [M] \{z^{(k)}\}] \{z^{(k)}\} \\ \{z^{(i)}\} &= \frac{\{x^{(i)}\}}{\sqrt{\{x^{(i)}\} [M] \{x^{(i)}\}}}, \quad (i: 1 \sim N^{th}) \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)의 반복 과정은 N 개의 리츠벡터를 얻을 때 까지 계속된다.

2.2 요소단위의 에너지 평가

위의 과정에서 구해진 리츠벡터는 요소단위의 에너지 평가를 수행하는데 사용된다. 에너지 평가를 위해서 식 (4)에 주어진 요소별 레일리 에너지 값(Rayleigh quotient)을 계산한다.

$$\lambda_e^i = \sum_{k=1}^n \frac{\{z^{(k)}\}^T [K_e^i] \{z^{(k)}\}}{\{z^{(k)}\}^T [M_e^i] \{z^{(k)}\}} \quad (4)$$

여기서, $[K_e^i], [M_e^i]$ 는 요소단위의 강성 및 질량행렬이고, $\{z^{(k)}\}$ 는 k 번째 리츠벡터를 의미한다. n 은 구해진 리츠벡터의 개수이다.

만약 m 개의 요소를 선택하는 경우 요소단위의 레일리 에너지 값이 n 개의 리츠벡터를 통해 계산된 후 더해지게 된다. 가장 적은 레일리 에너지 값을 갖는 요소순서로 m 개 선택하여 근사영역을 구성하게 된다.

2.3 가중치의 고려

가중치는 요소의 선택이 지나치게 저차모드를 강조하는 경우를 피하기 위해서 사용된다. 가중치 w_e^i 는 강성 및 질량 행렬의 대각항으로부터 얻어진다. $[K], [M]$ 이 $n \times n$ 행렬일 경우, 강성과 질량 행렬의 대각항으로 구성된 벡터의 크기는 $n \times 1$ 이 된다. 이 벡터로부터 각 요소의 자유도에 해당되는 성분을 추출하여 내적을 수행한 후, 각 요소에 곱해지는 가중치를 계산하게 된다. 이와 관련된 식은 식 (5)에 주어져 있다.

$$w_e^i = \left(\frac{\psi_i}{\psi_{\max}} \right)^2, \psi_i = [K_{ii}^e / M_{ii}^e]^T [K_{ii}^e / M_{ii}^e] \quad (5)$$

여기서, i 는 요소의 총개수이고, ψ_{\max} 는 내적값중에서 최대값을 의미한다.

가중치를 고려한 요소단위의 레일리 에너지 값은 식 (6)과 같다.

$$\pi_e^i = \sum_{i=1}^k \lambda_e^i w_e^i \quad (6)$$

2.4 Improved Reduced System(IRS)에 의한 1단계 축소시스템의 구성

2.1 ~ 2.3 단계를 통해 1단계 축소시스템 구성을 위한 요소가 선정된다. 선정된 요소에 포함된

자유도는 주자유도의 역할을 하게 되며, IRS 에 의해 축소시스템을 구성하게 된다. 일반적으로 감쇠를 무시한 고유치 문제는 식 (7)로 주어진다.

$$[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\} \quad (7)$$

식 (7)을 주자유도와 부자유도로 나누어서 재구성하면 식 (8)과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$\{\phi_p\}$ 는 주자유도 벡터이고, $\{\phi_s\}$ 는 부자유도 벡터를 나타낸다. 전체자유도는 식 (9)에서 주어진 변환 행렬에 의해 주자유도를 가지고 표현될 수 있다.

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_p \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ T_{IRS} \end{bmatrix} \{\phi_p\} = [T]\{\phi_p\} \quad (9)$$

식 (9)의 T_{IRS} 와 관련된 식은 식 (10)에서 주어진다.

$$\begin{aligned} [T_{IRS}] &= [T_s] + [K_{ss}]^{-1}([M_{sp}] + [M_{ss}][T_s])[M_G]^{-1}[K_G] \\ [T_s] &= -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \\ [K_G] &= [K_{pp}] - [K_{ps}][K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \\ [M_G] &= [M_{pp}] + [M_{ps}][T_0] + [T_0]^T[M_{sp}] + [T_0]^T[M_{ss}][T_0] \\ [T_0] &= -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \end{aligned} \quad (10)$$

축소시스템에서의 강성 및 질량행렬은 식 (9)에 주어진 변환 행렬을 이용하며 식 (11)과 같이 축소된 고유치 문제를 구성하게 된다.

$$[K_R]\{\phi_p\} = \lambda_R[M_R]\{\phi_p\} \quad (11)$$

축소시스템의 강성 및 질량행렬을 변환행렬과의 연산을 통해 전개하면 식 (12)로 주어진다.

$$\begin{aligned} [K_R] &= [I \ T_{IRS}] \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T_{IRS} \end{bmatrix} = [K_{PP}] + [T_{IRS}]^T[K_{SP}] + [K_{PS}][T_{IRS}] + [T_{IRS}]^T[K_{SS}][T_{IRS}] \\ [M_R] &= [I \ T_{IRS}] \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T_{IRS} \end{bmatrix} = [M_{PP}] + [T_{IRS}]^T[M_{SP}] + [M_{PS}][T_{IRS}] + [T_{IRS}]^T[M_{SS}][T_{IRS}] \end{aligned} \quad (12)$$

3. 순차적 소거법에 의한 2단계 축소시스템의 구성

1단계 축소 결과에 순차적 소거법을 도입하여 최종적인 축소시스템을 구성하게 된다. 기존의 순차적 소거법은 상당히 많은 연산시간을 필요로 한다. 제안된 방법은 축소된 시스템에 소거법이 적용되므로 과도한 시간이 걸리지 않으며, 고유치 해석 결과도 매우 신뢰할 만하다. Fig.2는 제안된 방법을 도식적으로 설명한 것이다. Fig.2.(a)는 초기 시스템이고, (b)는 첫 번째 축소과정을 통해 선택된 영역이다. (c)는 순차적 소거법으로 선택된 주자유도와 관련된 절점을 표시한 것이다. Fig.3은 Fig.2.(c)와 관련하여 순차적 소거법이 적용되는 알고리즘을 나타낸 것이다. Fig. 3에서 m 은 순차적 소거법이 적용되는 횟수를 의미한다.

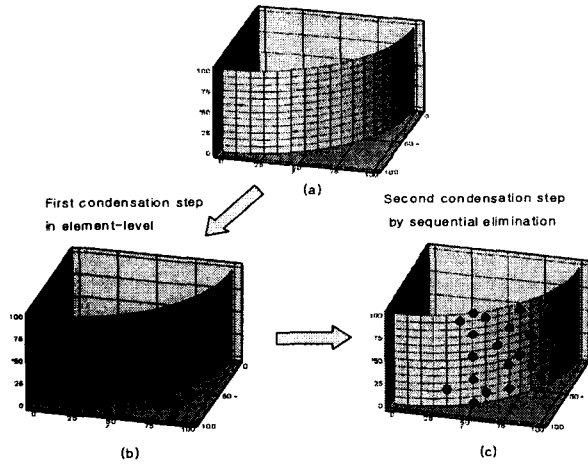


Fig.2 Example of reduction scheme by proposed method(TLCS).

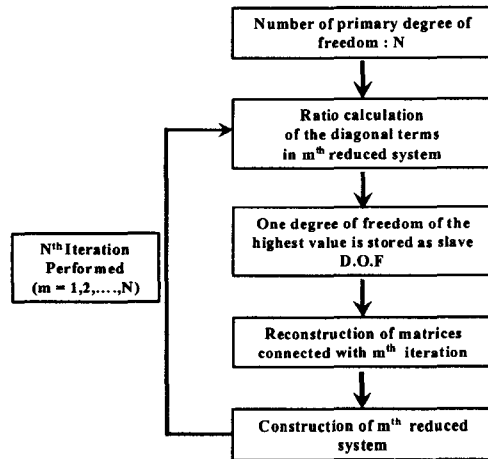


Fig.3 The sequential elimination algorithm in the second step of the present selection method

4. 수치예제

각 수치예제에서 기존의 방법과의 시간 비교를 통해 제안된 방법의 효율성을 검증하고, 고유치 해석 결과를 통해 신뢰성을 보이고자 한다. 유한요소 해석을 위해 4절점 혼합 셀요소와 사면체 솔리드요소를 사용하였다. 고유치 해석의 상대오차는 식(13)으로 정의된다.

$$e(\%) = \left| \frac{\lambda_{Reduce} - \lambda_{Full}}{\lambda_{Full}} \right| \times 100 \quad (13)$$

4.1 원통형 패널

첫 번째 예제는 실린더 패널이며, 형상과 해석조건이 Fig.4에 주어져 있다. 경계조건은 양변이 고정이고, 총 요소수는 247개이다.

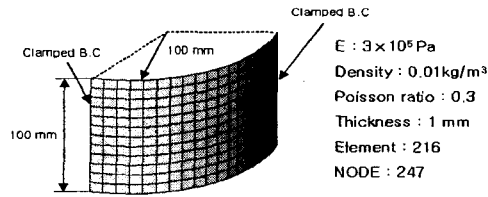


Fig.4 Configuration and analysis condition of cylindrical panel

Fig.5는 제안된 방법에 의해 첫 번째 축소과정에서 선택된 요소들을 선정된 개수만큼 나타낸 그림이고, Fig.6은 선택된 60개 요소에 의해 구성된 축소시스템으로부터 30개와 40개의 주자유도를 선정된 결과이다.

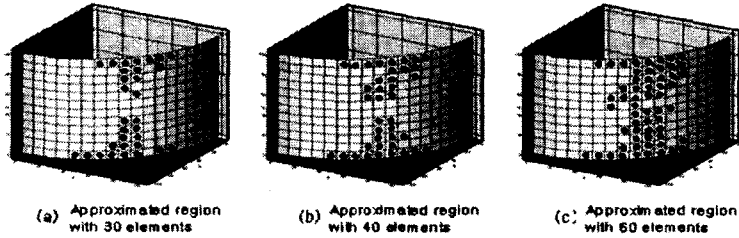


Fig.5 Element selection of 1st condensation step

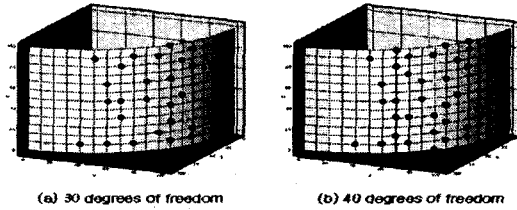


Fig.6 Selection results of primary DOF in 2nd condensation step

1단계 축소과정을 수행하기 위해서 리츠벡터 120개를 추출하였고, 소요시간은 약 47초 이다. 리츠 벡터를 이용한 요소선택과 첫 번째 축소시스템 구성 시간은 10초이다. 2단계 축소과정에서의 소요 시간은 약 100초 정도이다. 기존의 순차적 소거법은 총 4000초 정도이며, 제안된 방법은 이것의 1/20만을 필요로 한다.

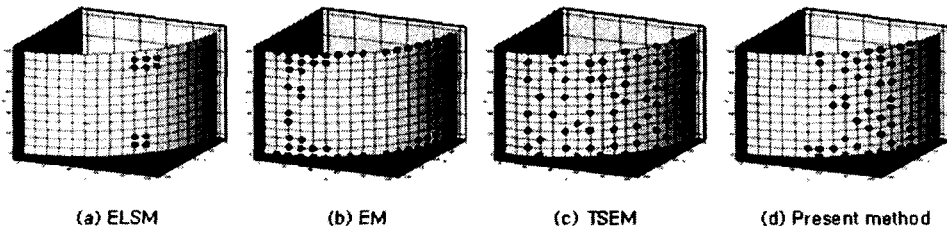


Fig.7 Selection results of primary DOF of each method

Fig.7은 기존의 축소시스템 구성방법에 따른 자유도 선택 결과이고, Fig.8은 각 방법에 따른 고유치의 상대오차 결과이다. 그림에서 ELSM은 Element-level Selection Method[8], EM은 Energy Method[7], TSEM은 기존의 순차적 소거법을 의미한다. 동등한 결과 비교를 위해서 최종 시스템이 동일한 크기를 갖도록 각 방법에 따른 선택 개수를 조절하였다. Fig.8에서 ELSM과 EM은 7차 모드가 이상에서 많은 오차를 보이며 발산하는 것을 알 수 있다. TSEM이 고차 모드에서도 가장 신뢰할 만한 결과를 보여주고 있으나, 시간 측면에서는 매우 비효율적이다. 제안된 방법은 시간 뿐만 아니라 해의 정확성에서도 좋은 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

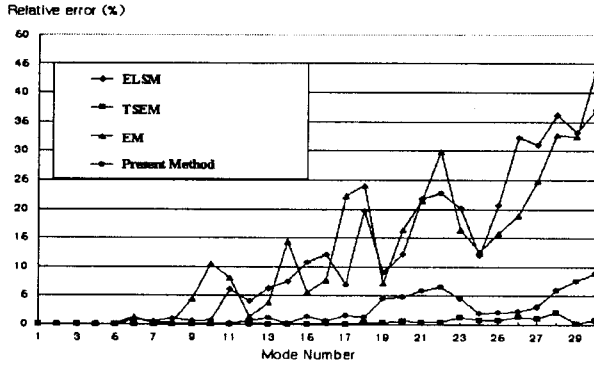


Fig.8 Relative error of eigenvalues in each method

4.2 샤프트

Fig.9는 샤프트 예제이다. 4절점 사면체 요소를 사용하였고, 3705개의 요소와 1193개의 절점으로 구성되어 있다. Fig.10은 TSEM와 제안된 방법에 의한 주자유도 선정 결과이다. 선정된 주자유도에 의해 축소시스템을 구성하고, 제안된 방법의 고유치 해석 결과를 Fig.11 에서 제시하였다.

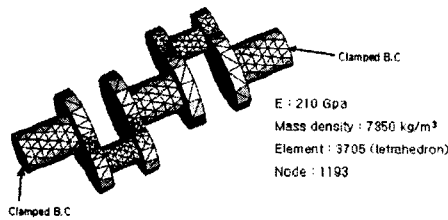


Fig.9 Configuration and analysis condition of shaft

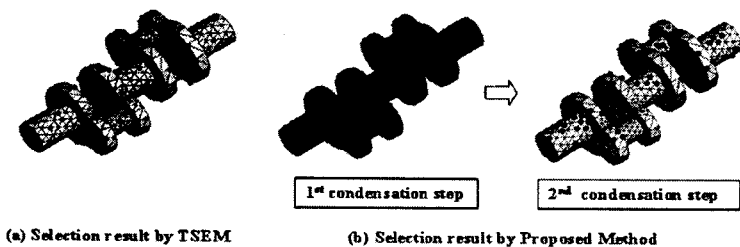


Fig.10 Selection results of TSEM and proposed method

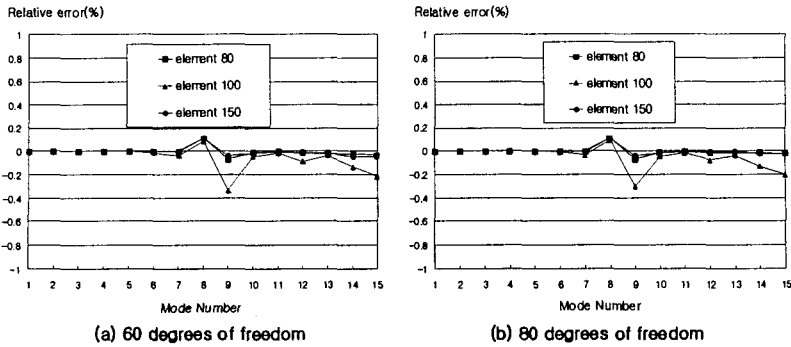


Fig.11 Relative error of eigenvalues in proposed method

15차 모드의 고유치 상대오차는 0.5% 미만의 결과를 보이고 있으며, 최종 축소시스템을 구성하는 자유도의 개수가 60개와 80개일 때 동일한 경향을 보이고 있다. 잘 선정된 주자유도에 의해 구성된 축소시스템은 고차 모드에서도 신뢰할 수 있는 결과를 제공할 수 있고, 선정된 주자유도 개수가 적더라도 그 오차는 상당히 줄일 수 있는 것으로 사료된다.

5. 결 론

제안된 방법을 통해 축소시스템을 구성하고, 기존의 방법과의 비교를 통해 효율성과 신뢰성을 검증하였다. 본 연구에서 제안하고 있는 2단계 축소기법은 요소의 에너지 평가를 통한 첫 번째 축소 단계와 순차적 소거법이 적용되는 두 번째 축소과정으로 구성된다. 순차적 소거법이 한 번의 축소과정을 거친 시스템에 적용되므로 많은 시간을 필요로 하지 않으며, 신뢰성이 높은 소거법을 적용함으로써 최종적인 고유치 해석 결과도 매우 신뢰할 수 있다. 신뢰도와 효율성은 수치예제를 통해 제시하였다. 본 연구는 대형구조물의 고유치 문제에 대한 적용을 통해 그 신뢰성을 확인하고, 도메인을 분할, 적용함으로써 그 효율성을 증대시키는 방향으로 진행될 계획이다.

참고 문헌

1. Guyan, R.J., 1978, "Reduction of stiffness and mass matrices." *AIAA journal*, Vol.3,1965, No.2, pp.380
2. Andrew, Leung. Y. T, 1978, "An accurate method of dynamic condensation in structural analysis." *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol.12, pp.1705-1715
3. O'Callahan, J., 1989, "A procedure for an improved reduced system(IRS) model." Proceedings of the 7th international modal analysis conference, Union college, Schenectady. NY, pp.17-21
4. Zhang,D.,W.,Li,S., 1995, "Succession-level approximate reduction(SAR) technique for structural dynamic model." Analysis conference(Nashville,TN), Union college press, Schenectady, NY, pp.435-441
5. Henshell, RD and Ong, J.H, 1975, "Automatic masters from eigenvalues economization." *J. Earthquake Equ. and Struct. Dyn.*,3, pp.375-383
6. Shah,V.N., Raymund,M., 1982, "Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem." *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol.18, No.1, pp.89-98
7. Kim,K.O., Y.J.Choi, 2000, "Energy method for selection of degrees of freedom in condensation." *AIAA Journal*, Vol.38, No.7, pp.1253-1259
8. M.Cho, H.Kim, 2004, "Element based node selection method for reduction of eigenvalue problems." *AIAA journal accepted*.