

# Pasternak 탄성지지 하에서 비보존력계의 동적 안정성해석

## Dynamic Stability Analysis of Non-conservative Systems under Pasternak Elastic Foundations

이 준 석\*                      김 남 일\*\*                      김 문 영\*\*\*  
Lee, Jun-Seok                      Kim, Nam-Il                      Kim, Moon-Young

---

### ABSTRACT

Mass matrix, elastic stiffness matrix, load correction stiffness matrix by circulatory non-conservative force, and Winkler and Pasternak foundation matrix of framed structure in 2-D are calculated for stability analysis of divergence or flutter system. Then, a matrix equation of the motion for the non-conservative system is formulated and numerical results are presented to demonstrate the effect of some parameters with using Newmark method.

---

### 1. 서 론

응용역학 분야에서 취급되는 하중들은 대부분 보존력(conservative force)들로써 포텐셜 에너지를 갖지만 비보존력(non-conservative force)은 포텐셜 에너지를 가질 수 없는 힘을 말하며 물체의 접촉면에서 발생하는 마찰력, 감쇠하중, 그리고 작용점의 변위에 따라 작용 방향이 바뀌는 follower force들이 이에 속한다. 이러한 follower force를 받는 시스템의 안정성 문제는 탄성지반, 감쇠하중 그리고 경계조건 등 여러 가지 파라미터들에 따라서 정적 불안정 평형상태 (divergence)가 존재하여 종래의 좌굴 해석으로 취급할 수 있는 경우와, flutter 현상과 같이 정적인 평형상태가 존재하지 않기 때문에 동적인 방법에 의해서만 해석이 가능한 경우로 나눌 수 있다.

지금까지 비보존력을 받는 보-기둥부재의 정적 및 동적 안정성해석에 관하여 상당한 연구가 진행되어왔으며, Lee 와 Yang (1994, 1993), Irie 등 (1980), Takahashi (1999), Takahashi 와 Yoshioka (1996)은 transfer matrix method를 이용하여 전단변형이 고려된 보의 안정성해석을 수행하였으며,<sup>(1),(2),(3),(4),(5)</sup> 유한차분법 (Leipholz 1980, Guran 과 Rimrott 1989, Nageswara Rao와 Venkateswara Rao 1989) 및 Ritz method를 사용한 Levinson (1966),<sup>(6),(7),(8),(9)</sup> 그리고 다른 종류의 discretization 방법을 사용한 De rosa 과 Franciosi (1990)를 예로 들 수 있으며,<sup>(10)</sup> 사용의 편리성과 적용성면에서 뛰어난 유한요소해석법( Langthjem 과 Sugiyama 2000a )이 널리 사용되어지고 있다.<sup>(11)</sup>

국내에서는 전단변형효과를 무시한 비보존력계의 안정성해석에 관한 연구 (김과 장 1990a, 1990b)가 수행된 바 있다.<sup>(12),(13)</sup> 그러나 이러한 비보존력을 받는 부재의 다양한 파라미터의 영향에 관한 국외의 활발한 연구에도 불구하고 아직까지도 국내에서는 이에 관련된 연구가 미흡한 실정이다.

\*    성균관대학교 토목환경공학과 박사과정  
\*\*   (주)다산컨설턴트, 사원  
\*\*\* 정희원, 성균관대학교 토목환경공학과 교수

이러한 연구배경을 바탕으로 본 연구에서는 탄성지반하에서 비보존력을 받는 보-기둥 부재의 안정성 해석에 관한 연구로서 이에 대한 운동방정식을 유도하고 divergence 및 flutter에 의한 안정성 해석을 수행한다. 또한 내적 (internal) 및 외적 (external) 감쇠하중을 운동방정식에 포함시킴으로써 감쇠효과를 고려하고, 2차 고유치해법을 적용하여 flutter에 미치는 영향을 조사한다. 이후 외팔보의 자유단에 집중 비보존력이 작용하는 경우와 균일하게 분포하는 비보존력이 작용하는 경우 및 선형적으로 비보존력이 작용하는 경우에 대하여 비보존력의 방향파라미터  $\alpha$ 에 대한 임계하중의 영향, 내적 및 외적감쇠의 영향, Winkler 및 Pastanak 지반에 의한 임계하중의 영향을 각각 조사하고자 한다.

## 2. 탄성지반하에서 비보존력을 받는 평면빔대구조의 운동방정식

그림 1과 같이 탄성지반 위에서 circulatory linearly distributed load( $g$ )와 재단력들( $F_2^0, M^0, F_2^1, M^1$ )을 받는 평면빔대요소의 운동에너지, 탄성에너지와 축방향력의 포텐셜을 포함하는 포텐셜에너지, 그리고 비보존력(내적 및 외적 감쇠하중과 circulatory force)이 행한 일들을 포함하는 비보존력계의 Hamilton 원리는 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - V) + \delta W_{NC}] dt = 0 \quad (1)$$

여기서,  $T$ 는 부재의 운동에너지,  $V$ 는 탄성에너지와 보존력의 포텐셜을 포함하는 부재의 포텐셜에너지 그리고  $W_{NC}$ 는 circulatory force를 포함하는 비보존력이 행한일,  $\delta$ 는 에너지의 변분을 나타낸다. 처짐이 일어나기 전의 축방향으로 작용하는 분포하중  $g(x)$ 가 부재 내에서 선형분포를 이룬다고 가정하면  $g(x) = (1 - x/l)P_x^0 + xP_x^1/l$ 로 표시할 수 있으며, 이때  $P_x^0$ 와  $P_x^1$ 는 각각  $x=0, l$ 에서  $g$ 의 크기를 나타낸다. 일단 처짐이 발생하면  $g(x)$ 의 작용방향은  $\alpha \cdot v'$ 만큼 회전하게 되므로 미소한 길이  $dx$ 에 작용하는  $g(x)$ 의 수평 및 수직성분은 각각  $g(x)dx$ 와  $\alpha \cdot v'g(x)dx$ 로 표시된다. 여기서,  $\alpha$ 는  $g(x)$ 의 방향을 조절하는 파라미터이고,  $v(x)$ 는 처짐이며, 그리고  $(\cdot)$ 와  $(\cdot)'$ 는 각각  $t, x$ 에 대한 편미분을 의미한다. 결과적으로 이를 고려한 시스템의 에너지는 다음과 같이 표시된다.

$$2T = \int_0^l (m \dot{v}^2) dx \quad (2a)$$

$$2V = \int_0^l [EI(v'')^2 + k_1 v^2 + k_2 v'^2 - F(x)(v')^2] dx - 2(F_2^0 v^0 + M^0 \hat{\omega}^0 + F_2^1 v^1 + M^1 \hat{\omega}^1) \quad (2b)$$

$$\delta W_{NC} = - \int_0^l (\gamma_1 \dot{v} + \gamma_2 \dot{v}'' + \alpha F' v') \delta v dx \quad (2c)$$

여기서  $m$  = 단위길이당 질량;  $EI$  = 휨강성;  $k_1$  = Winkler 지반계수;  $k_2$  = Pasternak 지반계수;  $F(x)$  = 요소 내  $x$ 지점에서의 축력;  $\alpha$  = 작용점의 변위에 따라 작용 방향이 바뀌는  $g(x)$ 의 방향 변화를 조절하는 파라미터;  $\gamma_1, \gamma_2$  = 각각 외적 및 내적감쇠계수. 그리고  $U_e^T = \langle v^0, \hat{\omega}^0, v^1, \hat{\omega}^1 \rangle$ 는 재단변위벡터이고,  $F_e^T = \langle F_2^0, M^0, F_2^1, M^1 \rangle$ 는 재단력벡터를 표시한다. 이때  $F(x)$ 의 구체적인 식은 아래와 같이 얻을 수 있으며, 식(2)의 변분을 취하면 식(4)와 같이 운동방정식과 경계조건을 얻는다.

$$F(x) = -F_1^p - \int_0^x g(x)dx = -F_1^p + P_x^p x + \frac{(P_x^q - P_x^p) x^2}{2L} \quad (3)$$

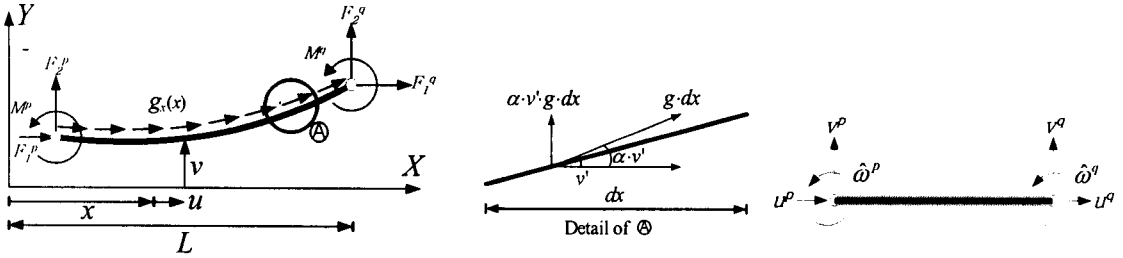


그림 1 circulatory linearly distributed load와 재단력들을 받는 평면빔대요소 및 절점변위 벡터

$$EI v'''' + (F v)'' - \alpha F' v' + k_1 v - k_2 v'' + m \ddot{v} + \gamma_1 \dot{v} + \gamma_2 (\dot{v})'' = 0 \quad (4)$$

$$\text{경계조건 : } \delta v^p = 0 \text{ 또는 } EI v'''(0) + F(0) v'(0) - k_2 v'(0) = -F_2^p$$

$$\delta v^q = 0 \text{ 또는 } EI v'''(l) + F(l) v'(l) - k_2 v'(l) = F_2^q \quad (5)$$

$$\delta \hat{w}^p = 0 \text{ 또는 } EI v''(0) = -M^p ; \delta \hat{w}^q = 0 \text{ 또는 } EI v''(l) = M^q$$

이때 지배방정식 (4)를  $v = e^{\omega t} V$ 로 가정하고  $\hat{v} = V/l$ ,  $\hat{x} = x/l$ 을 도입하여  $EI/l^3$ 로 양변을 나누어 이를 다시  $V = v^*(x^*) e^{\Lambda t}$ 로 표시하면 다음과 같은 무차원화 된 파라미터를 얻을 수 있다.

$$k_1^* = \frac{k_1}{EI/l^4} ; k_2^* = \frac{k_2}{EI/l^2} ; F^* = \frac{F}{EI/l^2} ; g^* = \frac{g}{EI/l^3} \quad (6a-6d)$$

$$\gamma_1^* = \frac{\gamma_1 l^2}{\sqrt{EI} m} ; \gamma_2^* = \frac{\gamma_2}{l^2 \sqrt{EI} m} ; \Lambda^2 = \frac{m \omega^2}{EI/l^4} \quad (6e-6g)$$

### 3. 비보존력계의 동적 유한요소해석 정식화

평면빔대요소의 부재매트릭스들을 산정하기 위하여 횡방향 변위에 대해서는 3차 Hermitian 다항식을 사용하여 식 (2)에 대입하여 적분을 행하고 Hamilton 원리를 적용하면 다음과 같이 행렬식으로 표현되는 운동방정식을 얻는다.

$$\mathbf{M}_e \mathbf{U}_e + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{U}}_e + [\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_s - \alpha \mathbf{K}^{nc}] \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_e \quad (7)$$

여기서,  $\mathbf{M}_e$  = 질량행렬;  $\mathbf{C}_e$  = 감쇠행렬;  $\mathbf{K}_e$  = 탄성강도 행렬;  $\mathbf{K}_g$  = 포물선분포를 이루는 축방향력에 대한 기하적인 강도행렬;  $\mathbf{K}_s$  = 탄성지반 영향행렬;  $\mathbf{K}^{nc}$  = 비보존력의 방향변화로 인한 load correction stiffness matrix(LCSM)을 각각 나타내며 감쇠행렬을  $\gamma_1 = \rho A \cdot \beta_1$ ,  $\gamma_2 = EI \cdot \beta_2$ 로 놓으면 식 (8)과 같이 Rayleigh 감쇠행렬에 대응한다는 것을 알 수 있다. 이들을 전체좌표계에 대한 행렬형태의 운동방정식을 식

(9)와 같이 얻을 수 있으며 이에 대한 각각의 행렬연산은 문헌 13에 나타나 있다.

$$C_e = \beta_1 M_e + \beta_2 K_e = \gamma_1 \begin{bmatrix} \frac{13}{35} L & \frac{11}{210} L^2 & \frac{3}{70} L & -\frac{13}{420} L \\ & \frac{1}{105} L^3 & \frac{13}{420} L & -\frac{3}{420} L^3 \\ & & \frac{13}{35} L & -\frac{11}{210} L^2 \\ & & & \frac{1}{105} L^3 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$M U + C U + [K_E + K_G + K_S - \alpha K^{NC}] U = F \quad (9)$$

#### 4. 비보존력계의 동적 안정성해석

divergence system과 감쇠하중이 없는 경우의 flutter system, 감쇠하중을 고려하는 경우에 대한 flutter system은 비보존력의 영향으로 강도행렬이 비대칭행렬이 되므로 본 논문에서는 이러한 비대칭행렬의 고유치를 산정하는 것이 가능한 IMSL의 subroutine을 사용하였다. 이에 대한 자세한 내용은 문헌 13에 자세하게 기술 되어 있으므로 본 논문에서는 생략하기로 한다.

#### 5. 수치예제

그림 2(a,b,c)는 외팔보의 자유단에 집중 비보존력이 작용하는 경우와 균일하게 분포하는 비보존력이 작용하는 경우 및 선형적으로 비보존력이 작용하는 경우로써 본 논문에 사용된 수치해석 예제들이다.

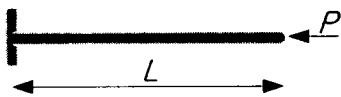


그림 2(a) Beck's column

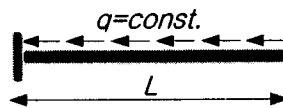


그림 2(b) Leipolz's column

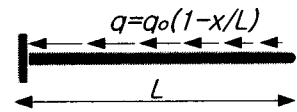


그림 2(c) Hauger's column

##### 5.1 Follower force의 방향파라미터 $\alpha$ 에 대한 임계하중의 영향

Beck's column의 경우  $\alpha$ 값이 0.0에서 0.32113까지는 D.S.(Divergence System),  $\alpha$ 값이 0.32113에서 0.5까지는 D.F.S.(Divergence-Flutter System), 그리고  $\alpha$ 값이 0.5보다 클 때에는 F.S.(Flutter System)에 해당한다. 이를 확인하기 위해서 그림 3은 Beck's column의 경우,  $\alpha$ 의 영향에 대한  $F^* - \Lambda^2$  곡선을 나타낸 것이다. 특히  $\alpha$ 값이 0.5에서  $P_{\text{crit}}$ 값의 불연속이 나타나는 것을 확인하였으며, 이는 그림 3(a)와 3(e)에서 보듯이 D.S에 해당하는 구간에서는  $\Lambda_1^2$  과  $\Lambda_2^2$  이 만나는 점이 없으나, D.F.S가 시작하는 구간( $\alpha = 0.32113$ )에서  $\Lambda_1^2$  과  $\Lambda_2^2$  이 만나는 점이 발생하여 곡선이 두 부분으로 나뉘어 지기 시작하여 결국  $\alpha$ 가 0.5에 도달했을때  $\Lambda_1^2$ ,  $\Lambda_2^2$ 의 곡선의 윗부분이 사라지며 첫 번째 및 두 번째 divergence는 사라지게 된다. 그림 3(a-d)는 이때 각 구간의 특정 시점 ( $\alpha = 0.0, 0.4, 0.5, 1.0$ )에 대한 Beck's column의  $F^* - \Lambda^2$  곡선을 보여주고 있으며, 그림 3(e-h)는 그림 3(a-d)를 확대한 것이다.

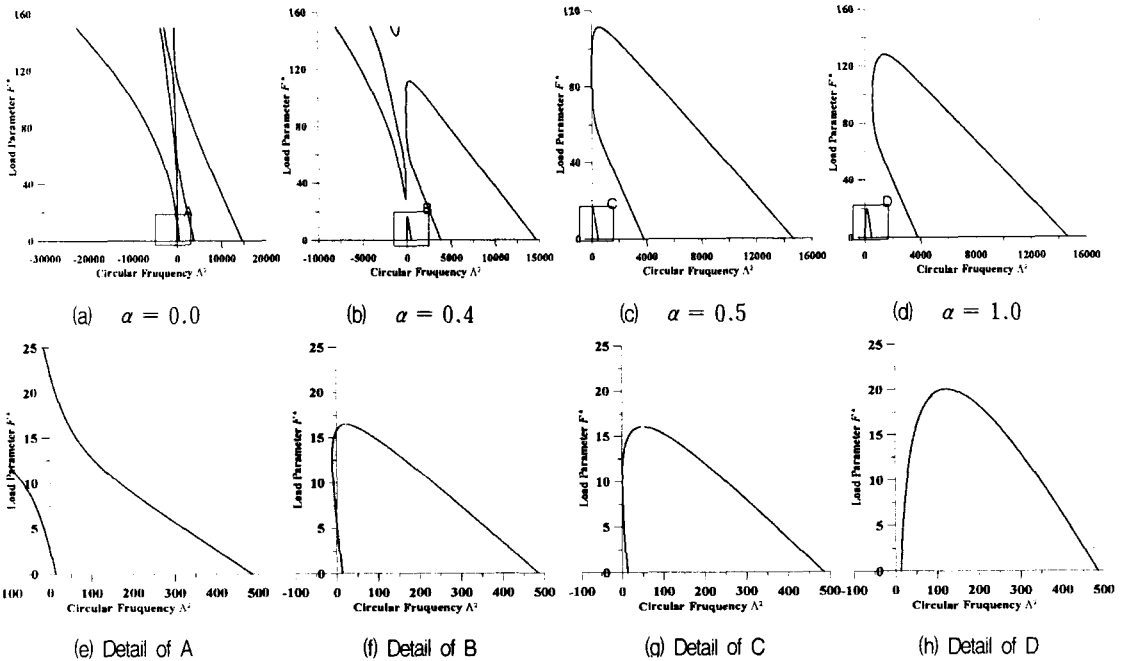


그림 3  $\alpha$ 의 변화에 따른 외팔보의 고유치 곡선

감쇠효과가 없는 구조물에 flutter 현상이 발생할 때 진동수  $\omega$ 는  $a \pm bi$ 의 형태를 가진다. 이 때 변위  $\delta$ 는  $C \cdot e^{at} \cdot (\cos bt \pm i \sin bt)$ 로 나타낼 수 있다. 이를 Beck's column의 경우에 tangency coefficient의 변화에 따라서 F.S. 구간을  $F_{cr}^*$ 와  $\Lambda$ 의 값으로 표 1에 나타냈으며,  $\alpha$ 가 1.0일 경우에 시간에 따른 외팔보 끝단의 변위의 증가 경향을 그림 4에 나타냈다. 이로부터 알 수 있듯이  $\alpha$ 의 영향이 커질수록 진동수는 증가하나, 진폭의 크기는 줄어드는 경향이 있음을 알 수 있다.

표 1. tangency coefficient의 영향에 의한 Beck's column의 진동수 변화

$\alpha$	$F_{cr}^*$ ( $1.01F_{cr}^*$ )	$\Lambda$ of $1.01F_{cr}^*$
0.5	16.05 (16.21)	$1.2223 \pm 0.0024i$
0.6	16.26 (16.42)	$1.3286 \pm 0.0013i$
0.7	16.79 (16.96)	$1.3988 \pm 0.00166i$
0.8	17.59 (17.77)	$0.8724 \pm 0.00085i$
0.9	18.67 (18.86)	$1.4934 \pm 0.00087i$
1.0	20.05 (20.25)	$1.5275 \pm 0.0012i$

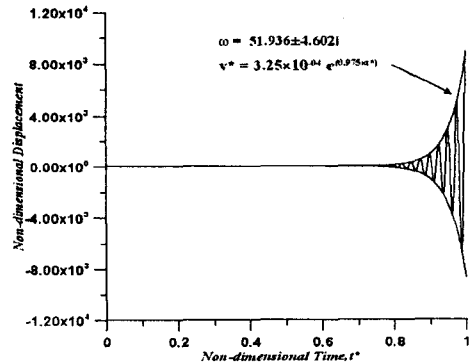


그림 4 시간에 따른 외팔보 끝단의 변위 ( $\alpha = 1.0$ )

## 5.2 Damping에 대한 임계하중의 영향

flutter시스템의 경우 미소한 크기의 내적 감쇠하중(internal damping force)에 의해서 임계하중의 값이 현저히 감소할 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. 표 2는 Beck's column의 경우 이에 해당하며 Rao(1989)의 값과 비교 하였으며, 그 값의 차가 무시할 수 있을 정도로 거의 일치하는 것을 볼 수 있었다. 이에 대해서 그림 (6)은 Beck's Column, Leipolz's Column 및 Hauger's Column에 대한 flutter load의 경향을 나타낸 것이다.

표 2. 내적 및 외적 감쇠하중에 대응하는 Beck's column의 flutter load ( $F_{cr}^*$ )

$\gamma_1^*$ \ $\gamma_2^*$	0.0	1.0	100.0
0.0000	20.053 (20.049)	20.11	37.22
0.0010	10.94 (10.942)	19.98	37.21
0.0100	10.97 (10.969)	17.80	37.21
0.1000	13.64 (13.643)	17.33	37.38
0.1500	16.95 (16.958)	20.89	37.59
0.2000	21.51 (21.525)	25.86	37.85

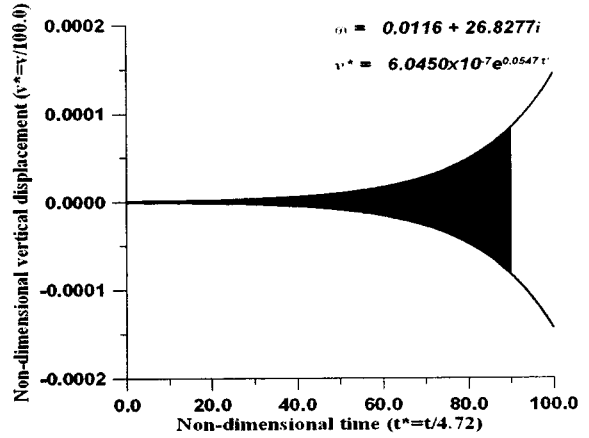
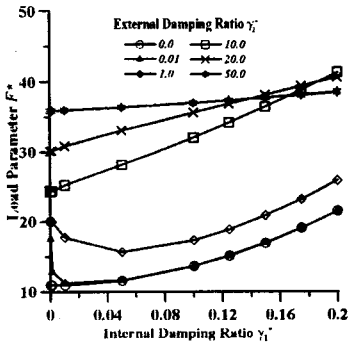
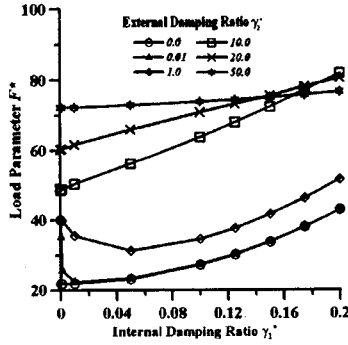


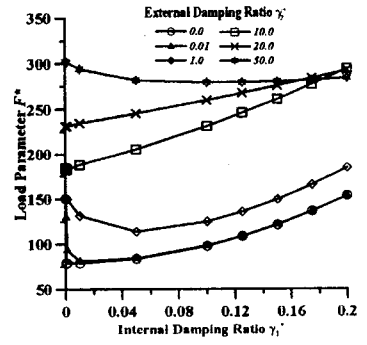
그림 5 시간에 따른 Beck's column 끝단의 변위 ( $\gamma_2^* = 0.001$ )



(a) Beck's Column



(b) Leipolz's Column



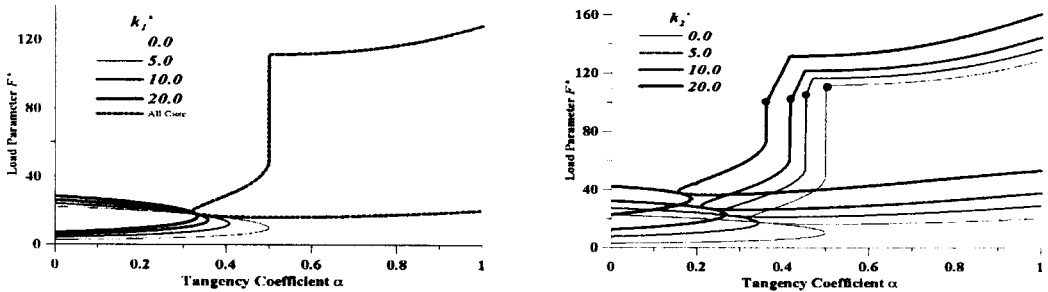
(c) Hauger's Column

그림 6. 외적 감쇠하중과 내적 감쇠하중의 영향에 의한 외팔보의 flutter load ( $\alpha = 1.0$ )

$\gamma_2^* = 0.001$  일 때  $F_{cr}^* = 10.9492$  의 값을 110% 증가시켰을 때 시간에 대한 외팔보 끝단의 변위는 그림 (5)와 같다. 이로부터 알 수 있듯이, internal damping은 flutter force를 감소시키는 것은 확실하나, 실제적으로는 상당한 시간이 지난 후에 어느 정도 크기의 변위를 발생시킨다는 것을 알 수 있다. 따라서 internal damping의 영향에 의해 flutter force의 값은 크게 감소하나, 실제적으로는 상당한 시간이 지난 후에야 비로소 변위의 증가가 두드러지는 weakly unstable 상태에 있음을 알 수 있다.

### 5.3 Winkler, Pasternak Foundation에 대한 임계하중의 영향

Winkler Foundation의 영향이 divergence load에만 영향을 미친다는 것은 이미 알려진 사실이다. 그림 7은 Beck's Column의 경우에 대한 안정곡선(Stability Curve)를  $k_1^*$  및  $k_2^*$  의대해서 나타낸 것이다. 그림으로부터 알수 있듯이, Pasternak foundation의 영향은 D.S., D.F.S, F.S.의 구간을 전체적으로 이동시키는 경향을 나타내며, flutter load의 불연속점이 각각 A, B, C, D에서 변하는 것을 알 수 있었으며,  $k_1^*$ 의 경우에는 divergence load에만 영향을 미치고, Pasternak 탄성지지하에서는 전체적으로 임계하중이 증가함으로써, 구조물의 강성이 증가함을 알 수 있다.



(a) Winkler foundation Effect

(b) Pasternak foundation Effect

그림 7. Beck's column에 대한 Winkler foundation 와 Pasternak foundation의 영향

## 7. 결론

탄성지지하의 비보존력계에 있어서 2절점 평면뼈대요소의 안정성을 검토하기 위해서 Hermitian polynomial을 형상함수로 채택하고 Hamilton의 원리로부터 매트릭스 운동방정식을 유도하였으며 유한요소 정식화 과정을 거쳐서 탄성강도 매트릭스, 질량매트릭스, 질량 및 탄성강도의 일차결합으로 표현되는 감쇠 매트릭스, 축방향력에 대한 기하강도 매트릭스, Circulatory force의 방향변화를 고려하는 Load correction stiffness matrix, 지반의 영향을 고려하는 Winkler foundation Effect matrix 및 Pasternak foundation effect matrix를 방정식에 포함하였고, 무차원화 된 파라미터를 유도하여 연구결과에 도입함으로써 매개변수 연구에 유용하도록 하였다. 또한 Newmark 방법을 사용하여 수치적으로 직접 적분함으로써 임계하중 이후에 각 구조물의 거동을 선형적으로 추적하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1) 구조물을 충분한 개수의 유한요소로 나누었을 때, 본 연구에 의하여 얻은 보존력 및 비보존력계의 평면뼈대 구조물의 divergence load 및 flutter load가 문헌의 결과들과 잘 일치하였다.

2) 감쇠효과를 고려한 Flutter system의 경우 Rao(1989)의 결과와 잘 일치한다는 것을 확인하였으며, 미소한 내적 감쇠하중의 증가로 인해 임계하중의 값이 급격히 감소하나 내적 감쇠하중의 크기가 증가함에 따라 다시 임계하중의 크기가 증가하였다. 외적 감쇠하중의 영향이 작용하였을 때 구조물의 임계하중은 전체적으로 증가하였으며 외적감쇠하중의 크기가 증가함에 따라 구조물의 임계하중은 어떤 값에 수렴하고 있는 경향을 보였다.

3) Winkler foundation의 영향이 증가함에 따라 divergence load의 크기는 증가하나 flutter load에는 영향을 미치지 않았다. 또한 Winkler foundation의 영향이 커짐에 따라 D.S. 및 D.F.S 구간은 줄어들고 F.S. 구간의 크기는 변화가 없었다. Pasternak foundation은 구조물의 전체적인 강성을 증가시키고, 따라서 임계하중의 크기도 증가시켰고, stability 구간의 크기도 변화시켰다.

4) 미소한 크기의 internal damping의 영향으로 Beck's column의 flutter force가 크게 감소하였으나,

Newmark 수치해석 결과 실제로 구조물은 상당한 시간이 지난후에야 진폭의 증가가 두드러지는 weakly unstable의 상태임을 알 수 있었으며 따라서 실제 flutter force보다 상당한 크기의 하중을 가했을 때에야 구조물의 폭발적인 증가 현상을 확인할 수 있었다.

#### 감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 목적기초사업비(과제번호 : R01-2002-000-00265-0)와 BK21 연구비에 의하여 연구되었기에 이에 깊은 감사를 드립니다.

#### 참고문헌

1. Lee, S. Y. and Yang, C. C. (1994) Non-conservative instability of non-uniform beams resting on an elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, pp. 433-444.
2. Lee, S. Y. and Yang, C. C. (1993) Non-conservative instability of a Timoshenko beam resting on Winkler elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, pp. 177-184.
3. Irie, T., Yamada, G. and Takahashi, I. (1980) Vibration and stability of a non-uniform Timoshenko beam subjected to a follower force, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 70, pp. 503-512.
4. Takahashi, I. (1999) Vibration and stability of a non-uniform cracked Timoshenko beam subjected to follower force, *Computers and Structures*, Vol. 71, pp. 1585-591.
5. Takahashi, I. and Yoshioka, T. (1996) Vibration and stability of a non-uniform double-beam subjected to follower forces, *Computers and Structures*, Vol. 59, pp. 1033-1038.
6. Leipholz, H. (1980) Stability of Elastic Systems, *Sijthoff and Noordhoff. The Netherlands*.
7. Guran, A. and Rimrott, F. P. J. (1989) On the dynamic stability of an elastic rod under a slave tip loading, *In Vibration Analysis-Techniques and Applications ASME*, Vol. 18, pp. 225-228.
8. Nageswara Rao, B. and Venkateswara Rao, G. (1990) Stability of an cantilever column under a tip-concentrated subtangential follower force with damping, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, pp. 341-344.
9. Levinson, M. (1966) Application of the Galerkin and Ritz methods to nonconservative problems of elastic stability, *ZAMP*, Vol. 17, pp. 431-442.
10. De rosa, M. A. and Franciosi, C. (1990) The influence of an intermediate support on the stability behaviour of cantilever beams subjected to follower forces, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 137, pp. 107-115.
11. Langthjem, M. A. and Sugiyama, Y. (2000a) Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads Part I: The undamped case, *Computers and Structures*, Vol. 74, pp. 385-398.
12. Langthjem, M. A. and Sugiyama, Y. (2000b) Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads Part II: The damped case, *Computers and Structures*, Vol. 74, pp. 399-408.
13. 김문영, 장승필 (1990a) 보존력 및 비보존력을 받는 평면빔대 구조물의 안정성에 관한 연구, 대한 토목학회 논문집, 제 2권 1호, pp. 111-122.
14. 김문영, 장승필 (1990b) 감쇠효과를 보려한 비보존력계의 안정성해석, 대한 토목학회 논문집, 제 10권 3호, pp. 57-65.p