

유한요소와 4원법을 이용한 비선형 유연체동역학의 해석기법

The Dynamics Analysis for Nonlinear Flexible Mechanisms using Finite Elements and Algebraic Quaternions

이 동 현*
Lee, Dong-Hyun

윤 성 호**
Yun, Seong-Ho

ABSTRACT

This paper deals with the development of computational schemes for the dynamic analysis of flexible and nonlinear multibody systems. Different from the existing method, this paper introduces the quaternion algebra to develop the equation of the conservation of energy. Simultaneously, Rodrigues parameters are used to express the finite rotation for the proposed scheme. The proposed energy scheme is derived such that it provides unconditionally stable conditions for the nonlinear problems. Several examples of dynamic systems are presented which illustrate the efficiency and accuracy of the developed energy schemes.

1. 서 론

비선형 유연 다물체의 동적해석은 물체에 고정된 좌표나 관성좌표계로 각 물체가 큰 병진과 회전으로 거동할 때 상대적 또는 절대적으로 관측하는 것이다. 특히, 각 유연체의 변형을 관심있는 곳에서 관찰하기 위해 유한요소법을 널리 사용하여 모델화 한다. 유연체의 거동은 물론 유연 조인트 요소들도 유한요소로 설명되어질 수 있으며, 각 노드의 위치는 관성계에서 좌표로 표현될 수 있다. 각 요소의 단면적 회전은 동일한 관성계를 기준으로 표현된 유한 회전 텐서에 의해서 표현된다. 복수의 유연체들로 이루어진 구조물의 기구학적 구속들은 라그랑지 상수로 비구속의 문제로 만들 수 있다. 유연 조인트의 거동은 본 논문에서는 취급하지 않지만, 유연 다물체 모델링의 결과로부터 도출한 운동방정식의 특징을 살펴보면, 강성, 비선형, 대수, 미분의 특징을 내포한 방정식으로 언급할 수 있다. 이 논문에서는 다룰 내용은 비선형 다물체의 동적반응을 표시하는 운동방정식의 적분과 고주파수의 수치발산(Numerical Dissipation)을 제거할 수 있는 알고리즘을 유도하고, 무조건적 안정상태가 되는지를 보는 것이다. 사다리꼴법칙으로 잘 알려진 평균가속도 방법은 선형 문제들에 적용 될 때 무조건적 안정함을 보여준다. 시스템의 안정성 증명의 또 다른 방법은 에너지 보존법을 바탕으로 한다. 이것은 에너지 평형이론에서 정확하게 시스템의 전체에너지가 보존됨을 보여주고 있다. 큰 유한요소의 이산화는 고주파수가 발생하고, 그 주파수로 인해 수치발산을 하게 된다. 이러한 수치발산을 개선하기 위해 α -방법이 선형, 비선형문제 대하여 성공적으로 쓰여지고 있으나, 무조건적 안정성은 선형시스템에서만 증명되었다.⁽¹⁾ 또 다른 방법으로 강체동역학과 탄성동역학에 보의 문제를 접목하여 에너지 보존법을 발표했다.^{(2),(3),(4)}

* 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 석사과정

** 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 부교수

본 논문에서는 기존의 표현 방법과는 달리 유한회전에 의한 에너지 평형과정을 전개하기 위하여 4원법(Quaternion)⁽⁵⁾을 도입하여 에너지보존 조건을 설정할 것이다. 동시에 유연체 운동방정식을 이산화하는 과정에서 로드리게스의 매개변수의 특성식들을 정리하여 중간값에 사용하고 이들이 에너지 보존조건을 만족하는지를 설명할 것이다. 이 때, 4원법을 사용하여도 운동방정식은 시스템의 관성과 탄성 요소에 대하여 총에너지 보존을 수반하고, 반면에 기구학적 구속에 연관된 구속력이 수행한 일을 정확하게 제거하는 방향으로 이산화가 진행되도록 하여야 한다.

따라서 본 논문에서는 4원법을 사용하여 유연체의 운동방정식을 이산화하고 에너지가 보존되는 과정을 예제와 더불어 보여 줄 것이다. 즉, 도출된 에너지보존 이론을 기초로 한 Newton-Raphson 반복법⁽⁷⁾을 사용하여 선형 및 비선형 스프링-질량계와 단진자 운동에 대한 안정된 알고리즘을 보여 줄 것이다.

2. 유연체 에너지 평형 방정식

2.1 4원법으로 도출된 에너지 보존이론

에너지보존이론에 대한 운동방정식은 관성력과 탄성력에 관한 항으로 나눌 수 있다.

$$F_p^{im} + F_p^{em} = F_p^{am} \quad (1)$$

여기에서 F_p^{im} 과 F_p^{em} 은 관성력과 탄성력의 정의로 주어지고, 외력의 항은 다음 F_p^{am} 로 정의된다. 식 (1)의 운동방정식을 갤러킨 근사법⁽⁸⁾을 이용해 이산화하고, 해밀턴 정리를 이용하여 에너지의 항으로 바꾸면, 다음의 식 (2)와같이 에너지평형 방정식을 얻을 수 있다.

$$(v_q^f - v_q^i)M_{qp}v_p^m + (\epsilon_p^f - \epsilon_p^i)f_p^m = W^{am} \quad (2)$$

식 (2)에서 에너지가 보존되는 원리를 이용 속도-변위와 힘-변형관계를 정의하면 다음의 식 (3. a, b)이 된다.

$$v_p^m = \frac{u_p^f + u_p^i}{2} ; \quad (3a)$$

$$f_p^m = C_{pq} \frac{\epsilon_p^f + \epsilon_p^i}{2} \quad (3b)$$

식 (2)의 일 평형방정식은 다음과 같이 된다.

$$K^f - K^i + V^f - V^i = W^a \quad (4)$$

2.2 유연체의 에너지 평형방정식

유연체의 운동에너지 K와 변형에너지 V는 다음과 같이 정의된다.

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \underline{v}^{*T} M^* \underline{v}^* dx_1 ; \quad (5a)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \underline{e}^{*T} C^* \underline{e}^* dx_1 \quad (5b)$$

여기서 L은 보의 길이, x_1 은 중립선 상의 좌표, M^* 와 C^* 는 관성, 강성 텐서, \underline{v}^* 와 \underline{e}^* 는 속도

벡터와 변형벡터의 요소이고, 속도-변위, 변형-변위 관계는 다음과 같다.

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\underline{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\underline{v}} \end{bmatrix}; \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{e}} \\ \underline{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{u}_0' + \underline{u}') - RR_0 \dot{\underline{u}} \\ \underline{e} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 $(\dot{\quad})$ 은 시간 t 에 대한 미분이고, $(\quad)'$ 은 공간 x_1 에 대한 미분이다. $\tilde{\underline{v}} = \underline{R}R^T$, $\tilde{\underline{v}}$ 는 가속도 벡터, $\tilde{\underline{e}} = \underline{R}'R^T$, $\tilde{\underline{e}}$ 는 탄성 곡률벡터이다. 해밀턴 정리로 운동방정식을 유도하기 위해 가상 속도와 변형이 정의되며, 속도와 변형의 가상변화는 다음과 같다.

$$\delta \underline{v}^{*T} = (\delta \underline{d}^T - \delta \underline{d}^T U[\tilde{\underline{u}}]) \underline{R}R_0; \quad (7)$$

$$\delta \underline{e}^{*T} = (\delta \underline{d}'^T - \delta \underline{d}^T U[\tilde{\underline{u}}_0 + \tilde{\underline{u}}']) \underline{R}R_0 \quad (8)$$

$\delta \underline{d}^T = (\delta \underline{u}^T, \delta \underline{v}^T)$ 는 가상변위와 가상회전이다. 가상회전은 $\delta \tilde{\psi} = \delta R R^T$ 로 정의된다.

유연체의 운동방정식은 해밀턴 정리에 의해서 유도되어 진다.

$$\int_{x_1}^y \int_0^L \delta \underline{v}^{*T} M^* \underline{v}^* - \delta \underline{e}^{*T} C^* \underline{e}^{*T} + \delta W^a dx_1 dt = 0 \quad (9)$$

여기에서 δW^a 은 외력에 의한 가상일이다. 유연체의 운동방정식은 식 (9)에 식(7)과 (8)의 도입과 변형과 속도의 표현인 식 (1)의 방정식에서 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(\underline{R}R_0 \underline{p}^*) + U[\tilde{\underline{u}}] \underline{R}R_0 \underline{p}^* - (\underline{R}R_0 \underline{f}^*)' - U[\tilde{\underline{u}}_0 + \tilde{\underline{u}}'] \underline{R}R_0 \underline{f}^* = \underline{q}; \quad (10)$$

식 (10)의 \underline{p}^* 는 모멘타로, \underline{f}^* 는 탄성력으로 정의 된다.

식 (10)의 운동방정식을 4원법의 대수학적 표현인 추가연산자 \underline{D} 의 형태로 바꾸면 다음과 같은 형태로 바뀐다. 여기서 \underline{D} 의 스칼라 성분은 0으로 설정된다.

$$(\underline{D} \underline{D}_0 \underline{p}_q^*) + U_q[\tilde{\underline{u}}] \underline{D} \underline{D}_0 \underline{p}_q^* - (\underline{D} \underline{D}_0 \underline{f}_q^*)' - U_q[\tilde{\underline{u}}_0' + \tilde{\underline{u}}_m'] \underline{D} \underline{D}_0 \underline{f}_q^* = \underline{q}_q \quad (11)$$

여기서 관성력과 탄성력 두 부분으로 나눌 수 있고, 다음과 같이 이산화를 수행한다.

$$\begin{aligned} & \frac{D_f D_0 \underline{p}_{fq}^* - D_i D_0 \underline{p}_{iq}^*}{\Delta t} + U_q \left| \frac{\tilde{\underline{u}}_f - \tilde{\underline{u}}_i}{\Delta t} \right| D_a D_0 \frac{\underline{p}_{fq}^* + \underline{p}_{iq}^*}{2} \\ & - (D_b D_0 \underline{f}_{mq})' - U_q[\tilde{\underline{u}}_0' + \tilde{\underline{u}}_m'] D_b D_0 \underline{f}_{mq}^* = \underline{q}_{mq} \end{aligned} \quad (12)$$

이산화된 관성력에 의한 일은 증분된 병진량과 회전량을 힘의 방정식 앞에 곱하고, 유한요소 길이 L 의 유연체에 대하여 적분함으로써 얻어진다.

$$W_I = \int_0^L \left| \frac{u_{fq} - u_{iq}}{r_q} \right| r \left| \frac{D_f D_0 \underline{p}_{fq}^* - D_i D_0 \underline{p}_{iq}^*}{\Delta t} + U_q \left| \frac{\tilde{\underline{u}}_f - \tilde{\underline{u}}_i}{\Delta t} \right| D_a D_0 \frac{\underline{p}_{fq}^* + \underline{p}_{iq}^*}{2} \right| dx_1 \quad (13)$$

위의 식 (13)에서 r_q 는 증분된 회전을 표현하기 위해 사용된 로드리게스 매개변수의 요소이다. 여기서 증분된 병진과 회전에 각각 구별하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} W_I = \int_0^L & \left(\frac{u_{fq}^T - u_{iq}^T}{\Delta t} D_m D_0 \left[(D_{G^*} - \frac{\tilde{r}_q}{2} \frac{D_{G^*} + D_{G^*}^T}{2}) \hat{\underline{p}}_{fq}^* - (D_{G^*} + \frac{\tilde{r}_q}{2} \frac{D_{G^*} + D_{G^*}^T}{2}) \hat{\underline{p}}_{iq}^* \right] \right. \\ & \left. + \frac{r_q^T}{\Delta t} D_m D_0 (D_{G^*} \tilde{\underline{p}}_{fq}^* - D_{G^*}^T \tilde{\underline{p}}_{iq}^*) dx_1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

상기 식은 4원법에 의해서 도출된 에너지 방정식을 보존하기 위한 조건이며, 평균속도 벡터 $\underline{v}_{m,q}^*$

는 다음과 같이 정의 된다.

$$\underline{v}_{mq}^* = \begin{bmatrix} D_0^T D_a^T \frac{u_{fq} - u_{iq}}{\Delta t} \\ D_0^T D_m^T \frac{r_q}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_a D_0)^T \frac{u_{fq} - u_{iq}}{\Delta t} \\ (D_m D_0)^T \frac{r_q}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (15)$$

이산화된 관성력에 의한 일은 식 (15)의 조건을 식 (14)에 대입함으로써 아래의 형태로 된다.

$$W_I = \underline{v}_{mq}^* M^* (\underline{v}_{fq}^* - \underline{v}_{iq}^*) \quad (16)$$

이산화된 탄성력에 의한 일은 다음 식의 형태로 표현된다.

$$W_e = \int_0^L \left(\begin{bmatrix} u_{fq}' - u_{iq}' \\ r_q' \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} u_{fq} - u_{iq} \\ r_q \end{bmatrix}^T U_q (\underline{u}_0' + \underline{u}_m') \right) D_b D_0 \underline{f}_{mq}^* dx_1 \quad (17)$$

탄성력에 의한 일에 추가연산자 D 정의를 이용해 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$W_e = \int_0^L \left[\underline{f}_{mq}^{*T} \frac{(D_G^* + D_G^{*T})}{2} \left[(I - \frac{\tilde{r}_q}{2}) D_0^T D_m^T (\underline{u}_{0q}' + \underline{u}_{fq}') - (I + \frac{\tilde{r}_q}{2}) D_0^T D_m^T (\underline{u}_{0q}' + \underline{u}_{iq}') \right] \right. \\ \left. + \underline{f}_{mq}^T D_0^T D_m^T D_G D_H^T r_q' \right] dx_1 \quad (18)$$

다음 식 (19)은 로드리게스의 매개변수의 특성식이고, 이것을 식 (18)에 대입함으로써 탄성력에 의한 일을 식 (20)과 같이 도출해 낼 수 있다.

$$(I_{4 \times 4} - \frac{\tilde{r}_q}{2}) D_G = (I_{4 \times 4} + \frac{\tilde{r}_q}{2}) D_G^T = (\frac{D_G + D_G^T}{2})^{-1}; \quad (19)$$

$$W_e = \int_0^L \left[\underline{f}_{mq}^{*T} [\hat{e}_{fq}^* - \hat{e}_{iq}^*] + \underline{f}_{mq}^{*T} [\check{e}_{fq}^* - \check{e}_{iq}^*] \right] dx_1 \quad (20)$$

식 (16)과 식 (20)을 조합하면, 이산화된 운동방정식은 에너지 평형방정식으로 표현된다.

$$W_I + W_e = \int_0^L \underline{v}_{mq}^* M^* (\underline{v}_{fq}^* - \underline{v}_{iq}^*) + \underline{f}_{mq}^{*T} [\underline{e}_{fq}^* - \underline{e}_{iq}^*] dx_1 = \Delta W_{mq}^a \quad (21)$$

즉, 관성력과 탄성력에 의한 일로 표현되고, 이러한 에너지 보존을 만족하기 위한 조건으로부터 속도-변위, 힘-변위 관계는 다음과 같이 결정된다.

$$\underline{v}_{mq}^{*T} = \frac{\underline{v}_{fq}^* + \underline{v}_{iq}^*}{2}; \quad (22a)$$

$$\underline{f}_{mq}^* = C^* (\underline{e}_{fq}^* + \underline{e}_{iq}^*) / 2 \quad (22b)$$

상기 식 (22.a,b)를 식 (21)에 대입하면, 4원법으로 도출된 에너지 평형방정식은 $\epsilon_{fq} - \epsilon_{iq} = \Delta W_{mq}^a$ 로 표현된다. 이것은 4원법으로 이산화된 운동방정식의 에너지 평형방정식이 에너지 보존 조건을 따른다는 것을 보여준다.

3. 강제구속

3.1 에너지 보존에 의한 강제구속

$C = 0$ 인 구속조건을 가진 다물체계를 고려할 때 라그랑지 상수가 사용된다면 이산화된 구속력

에 의한 일은 $W^o = (C_p^f - C_p^i)\lambda_p^m$ 이 된다. 라그랑지 상수 λ^m 은 추가적인 미지수가 된다. 비구속 문제로 구속할 때 추가된 구속 방정식은 이산화된 구속력에 의한 일을 제거하기 위해 필요하다. $\lambda_p^m \neq 0$ 면, $C_p^f - C_p^i = 0$ 가 되어야 한다. 오차누적현상을 피하기 위해서 각 시간 단계마다 $C_p^f = 0$ 의 조건을 구속하면, 구속력에 의해 생기는 에너지를 제거하는 역할을 한다. 이 구속조건을 운동방정식에 구속함으로써 시스템 에너지는 보존된다.

4. 예제해석

4.1 에너지 보존법에 의한 수치해석

운동에너지가 $K = m\dot{u}^2/2$ 이고, 변형에너지 $V = k\epsilon^2/2$ 인 비선형 스프링-질량 시스템을 4원법으로 도출된 에너지법으로 해석 할 때, 이 시스템의 변형을 $\epsilon = u^{1.5}$ 로 정의하면, 운동방정식은 $m\ddot{u} + (3/2)ku^2 = 0$ 과 같이 변위의 제곱의 항으로 유도된다. 그러나 이러한 2차의 비선형 스프링-질량 문제는 변형 에너지가 변위의 3차의 항으로 되기 때문에 에너지가 음의 양으로도 표현되어 해석하는데 문제점이 발생한다. 그러면서 3차의 변형에너지는 발산한다. 우선 아래의 그림 2는 이런 문제들의 결과를 보여준다. 이러한 문제 때문에 $\epsilon = u^2$ 을 정의하고, 변형 에너지가 변위의 4차의 항으로 나오도록 유도하여 문제를 해석했다. 이 때, 운동방정식은 $m\ddot{u} + 2ku^3 = 0$ 으로 된다. 갤러킨 근사법을 도입하여 운동방정식을 유도하고, 사다리꼴 알고리즘과 4원법에 의해서 도출된 에너지 보존 알고리즘으로 이산화 하면, 다음과 같이 표현된다.

사다리꼴 알고리즘

$$\frac{m\dot{u}^f - m\dot{u}^i}{\Delta t} + 2k\left(\frac{u^f + u^i}{2}\right)^3 = 0 \quad (23a)$$

$$\frac{u^f - u^i}{\Delta t} = \frac{\dot{u}^f + \dot{u}^i}{2} \quad (24b)$$

에너지보존 알고리즘

$$\frac{m\dot{u}^f - m\dot{u}^i}{\Delta t} + (u^f + u^i)\left(\frac{u^{f2} + u^{i2}}{2}\right) = 0 \quad (25a)$$

$$\frac{u^f - u^i}{\Delta t} = \frac{\dot{u}^f + \dot{u}^i}{2} \quad (25b)$$

사다리꼴이론이 선형시스템에서 무조건적으로 안정적이지만, 비선형계에 적용할 때는 안정성을 보장 할 수 없다. 그림 1은 선형 스프링-질량 문제를 사다리꼴 알고리즘과 에너지 알고리즘을 이용하여 그 응답을 그래프로 나타낸 것이다. 그래프에서 볼 수 있듯이 2개의 알고리즘의 결과는 같은 형태로, 시스템의 에너지가 정확하게 보존되는 것을 볼 수 있다. 그림 2는 비선형 스프링-질량 시스템에 Newton-Raphson 반복법을 사용하여 2개의 알고리즘에 의한 시스템의 반응을 본 것이다. 앞에서 언급했듯이 시스템 에너지가 발산한다. 그림 3은 2차의 비선형 시스템의 문제를 에너지 보존 알고리즘에 적용한 것이다. 에너지보존 알고리즘에 대한 비선형 시스템의 반응은 그림 5에서 보여준다. 시스템의 전체에너지는 정확하게 보존되는 것을 볼 수 있다. 그림 5는 단진자 운동 응답을 그래프로 나타낸 것이다. 여기서 운동에너지 $K = m\dot{u}_p\dot{u}_p/2$, 위치에너지 $V = -mgu_y$, 구속조

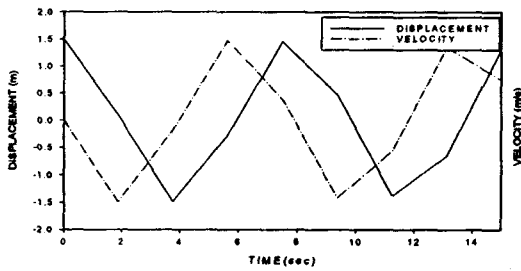
건 $C=(u_p u_p - l^2)/2=0$, 단진자의 길이, $L=0.5m$, 초기속도 $v_0 = 1.695m/sec$, 일 때 단진자운동의 시스템에너지가 보존되는 것을 보여주고 있다. 갤러킨 근사법으로 운동방정식을 세우고, 에너지보존법을 이용해 이산화하면 다음의 식 (26.a,b,c)처럼 표현된다.

$$\frac{m\dot{u}_p^f - m\dot{u}_p^i}{\Delta t} + \frac{u_p^f + u_p^i}{2} \lambda = mg_p \quad (26a)$$

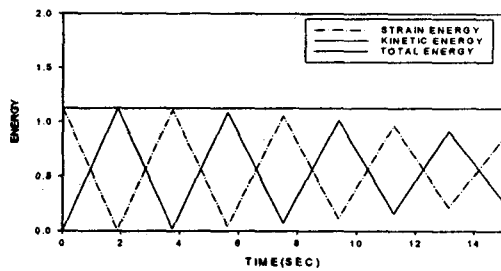
$$\frac{u_p^f - u_p^i}{\Delta t} = \frac{\dot{u}_p^f + \dot{u}_p^i}{2} \quad (26b)$$

$$\dot{u}_{xi} u_{xf} + \dot{u}_{yi} u_{yf} = 0 \quad (26c)$$

여기서 라그랑지 상수와 변위, 속도의 최종값을 변수로 두고 응답을 해석 하였다. 라그랑지 상수는 그림 6의 (c)에서 볼 수 있듯이 0이 되지 않음을 보여준다. 그림 6의 (d)는 단진자의 에너지가 정확하게 보존됨을 보여주는 그래프이다.

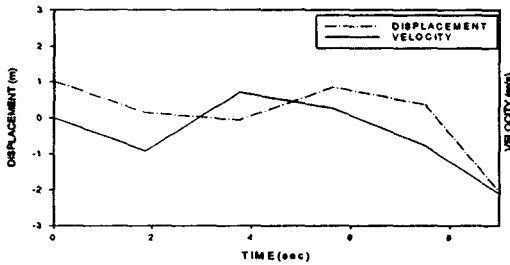


(a)

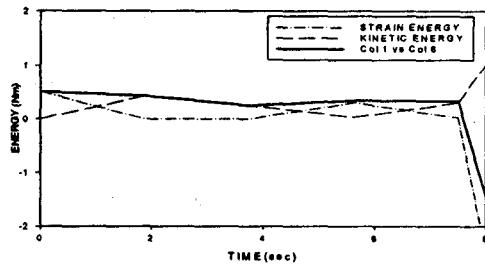


(b)

그림 1 선형 스프링 질량계의 응답

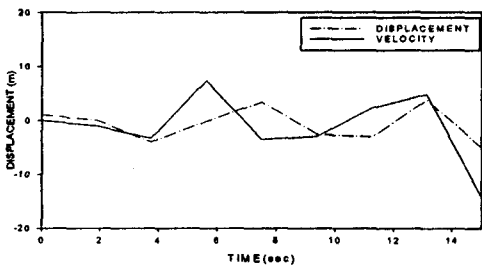


(a)

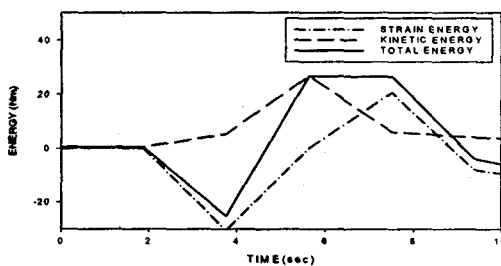


(b)

그림 2 사다리꼴 알고리즘에 대한 2차 비선형 스프링-질량계 응답

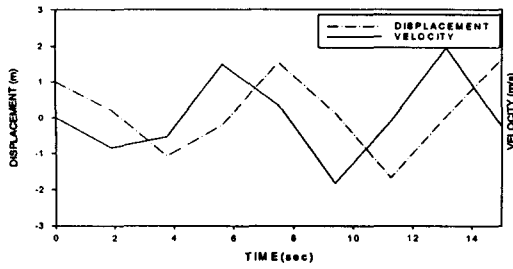


(a)

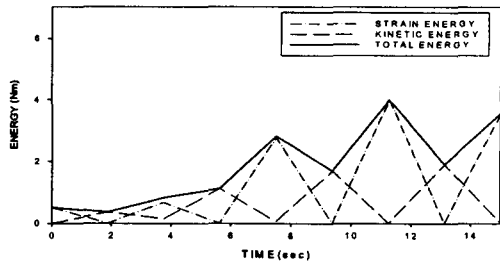


(b)

그림 3 에너지 보존이론에 대한 2차 비선형 스프링-질량계 응답

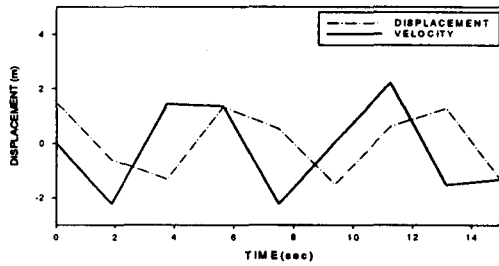


(a)

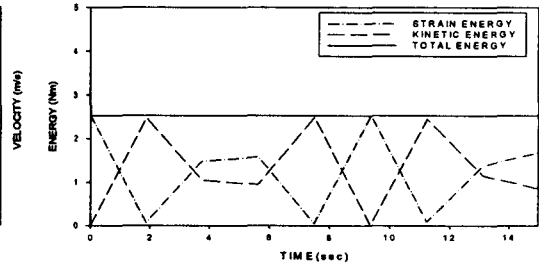


(b)

그림 4 사다리꼴알고리즘 대한 3차비선형스프링- 질량계 응답.

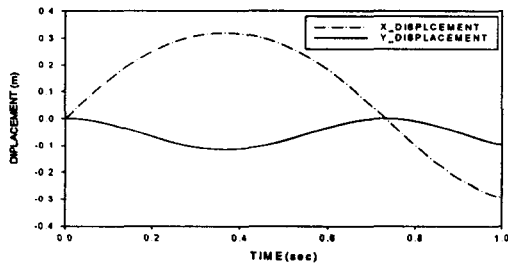


(a)

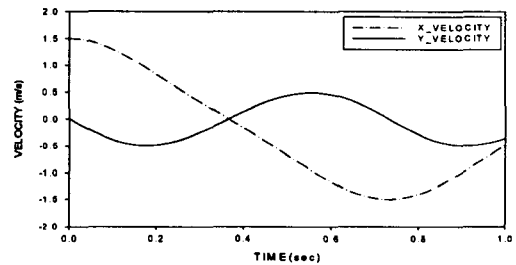


(b)

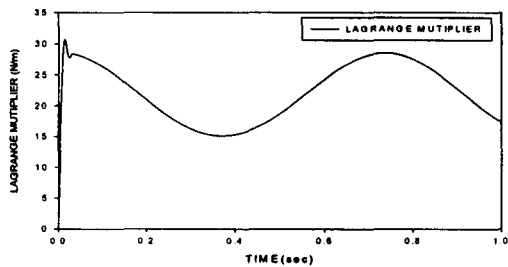
그림 5 에너지 보존법에 대한 3차비선형-스프링-질량계 응답.



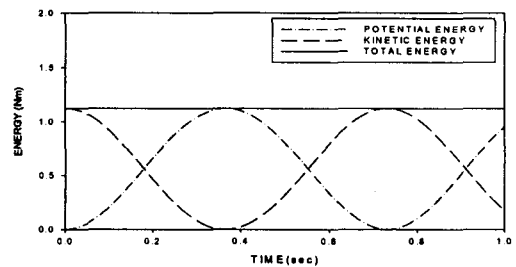
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 6 에너지 보존법에 대한 단진자운동의 응답.

5. 결론

본 연구는 4원법과 유한요소를 이용하여 비선형 유연 다물체의 운동방정식의 적분을 수행하고 고주파수에서 발생하는 수치발산을 제거하고자, 비선형의 경우에 무조건적으로 안정된 알고리즘을 적용하면 다음과 같은 결과를 얻었다.

- (1) 유연체 운동방정식의 이산화 과정에서 4원법의 대수학적표현을 도입해서 유한회전에 대한 표현을 공식화하였다. 이 때, 도출된 에너지보존 알고리즘은 비선형 시스템에서 그 응답을 확인했을 때, 그 시스템의 전체에너지는 일정함을 알 수 있었다.
- (2) 선형 및 비선형 문제의 예제를 4원법에 의해 도출된 에너지보존 알고리즘에 적용하여 기존의 사다리꼴 알고리즘과 비교해 본 결과 기존의 사다리꼴 알고리즘은 선형에서만 무조건적 안정성을 보인 것을 볼 수 있었고, 4원법을 통해 도출된 에너지보존 알고리즘은 비선형 문제에서도 안정함을 확인 할 수 있었다.
- (3) 2차의 비선형 스프링-질량계의 예제에서 볼 수 있듯이 변위의 3차의 항으로 변형에너지가 표현 될때 에너지법이 무조건적 안정성을 보여주지 못하는 것을 알았다. 이러한 취약점을 인식하고, 보완하기 위한 연구의 필요성을 인식 할 수 있었다.

후기

본 연구는 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2003-003-D00014).

참고문헌

1. H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, and R. L. Taylor, "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.5, 1977, pp.282~292
2. J. C. Simo and K. Wong, "Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.31, 1991, pp.19~52
3. J. C. Simo and N. Tarnow, "The discrete energy-momentum method. conserving algorithms for nonlinear dynamics", *ZAMP*, Vol.43, 1992, pp.757~792
4. J. C. Simo, N. Tarnow, and M. Doblare, "Non-linear dynamics of three-dimensional rods: Exact energy and momentum conserving algorithms", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.38, 1995, pp.1431~1473
5. Michel Ge'radin, *Flexible Multibody Dynamics*, Jhon Wiley & Sons, Ltd, 2001, p.73~83
6. Nikraves. P. E., *Computer-aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentic-Hall, New Jersey, 1988, p.227~247
7. 홍준표, C 및 FORTRAN에 의한 컴퓨터 수치해석, 문운당, 1999, p.43~53
8. Claes. Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, 1987, p.205~210