

동역학 문제의 시간적분 특이성을 극복하기 위한 해석 알고리즘

An Analysis Algorithm to Overcome the Singularity of Time Integrations for Dynamics Problems

엄기상* 윤성호**
Eom, Ki-Sang Yun, Seong-Ho

ABSTRACT

For the linearized differential algebraic equation of the nonlinear constrained system, exact initial values of the acceleration are needed to solve itself. It may be very troublesome to perform the inverse operation for obtaining the incremental quantities since the mass matrix contains the zero element in the diagonal. This fact makes the mass matrix impossible to be positive definite. To overcome this singularity phenomenon the mass matrix needs to be modified to allow the feasible application of predictor and corrector in the iterative computation. In this paper the proposed numerical algorithm based on the modified mass matrix combines the conventional implicit algorithm, Newton-Raphson method and Newmark method. The numerical example presents reliabilities for the proposed algorithm via comparisons of the 4th order Runge-kutta method. The proposed algorithm seems to be satisfactory even though the acceleration, Lagrange multiplier, and energy show unstable behaviour. Correspondingly, it provides one important clue to another algorithm for the enhancement of the numerical results.

1. 서론

다물체에 대한 효과적인 해석과 시뮬레이션(Simulation)을 위해 일반화된 좌표계를 오랫동안 사용하여 왔다. 또한 직각 좌표계는 비교적 간단하게 체계적으로 표현될 수 있어 시스템 방정식을 수월하게 이끌어 낼 수 있으나, 사용되는 좌표의 개수가 많아진다.^{(1),(2)} 계산의 단순함과 일반화에 대한 노력은 자유도의 수에 달려있다. 이것이 유연체 시스템으로 확장될 때 많은 장점을 잃게 됨에도 불구하고 여러 가지 면에서 직각 좌표계를 유한요소의 좌표계로 선정하여 왔다. 유한요소는 시스템을 구성하는 물체의 운동과 기구학적 구속을 표현하는데 매우 편리하다. 직각 좌표계는 시스템의 기하학적 비선형 탄성 효과들을 고려하는데 사용될 수 있으며, 관성력에 대한 표현도 간단하게 도출될 수 있다.

* 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 석사과정
** 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 부교수

일반적으로 구속된 시스템에 대한 운동방정식은 미분방정식과 대수방정식으로 조합된 형태를 나타낸다. 많은 수의 유한요소로 이루어진 운동방정식들은 광대역 주파수로 분포된 시스템 고유진동수 중에 고주파수가 포함되어 강성(Stiffness)의 특성을 가진다.⁽³⁾ 이와 같이 강성은 시스템의 물리량에 의존하거나 공간의 이산화 과정에서 생성된다. 따라서 구조 동역학 해석은 무조건적인 안정성이 보장되는 알고리즘을 찾게 되었다.^{(4),(5)} 이러한 문제를 해석하는데 있어 일단계 방법(Single-step method)은 자기시작(Self-starting)과 컴퓨터 코드작성의 간편함으로 인하여 다단계 방법(Multi-step method)보다 더 선호된다. 그러나 일반적으로 음함수 알고리즘(Implicit-algorithm)은 유연다물체 시스템을 해석할 때 최선의 선택이 되어 왔다. 이 알고리즘을 적용하여 얻은 수치해석 결과를 여과(Filtering)과정을 거치지 않으면 해석의 불안정성을 야기 시키는 고주파수 모드를 생성시킨다.

그러함에도 불구하고 유연다물체(Flexible multibody)에 대한 해석을 위해 음함수 알고리즘을 사용하게 되는데, 그 이유로 첫째는 구속된 비선형 동적문제에 음함수 적분(Implicit integration)을 하게될 때, 미리 정한 정확도를 가지고 시스템을 해석하며,⁽⁶⁾ 둘째는 음함수 알고리즘 공식을 이용한 시간적분은 선형시스템에 대한 전체 주파수 대역(Frequency spectrum)에서 무조건적인 수치 안정성을 제공하고 있다는 것이 잘 알려져 있기 때문이다. 그러나 일반화된 좌표계나 직각 좌표계를 유한요소의 좌표계로 사용할 때, 앞서 논의한 해석의 안정성을 확보한다 할지라도 시스템 행렬을 역변환하는 과정에서 특이성이 종종 발견되어 해석을 어렵게 한다.

본 연구는 일반화된 좌표계를 선택했을 때, 구속방정식을 포함한 비선형 운동방정식을 해밀톤 정리와 라그랑지 상수(Lagrange multiplier)를 이용하여 구속문제가 비구속문제로 바뀐 동적 평형운동방정식을 유도하였다. 이 방정식을 테일러 급수(Taylor series)를 이용하여 선형화 된 미분대수방정식을 유도 할 것이며, 시간 적분은 제안된 음함수 알고리즘에 Newton-Rapshon 방법을 적용할 것이다. 이 때, 역변환하는 과정에서 특이성을 피하기 위하여 기존 알고리즘을 개선할 것이다. 예제를 통해 제안된 알고리즘의 결과와 이론해를 비교함으로써 제안된 알고리즘이 특이성을 효과적으로 극복할 수 있음을 보여 줄 것이다.

2. 운동방정식의 선형화 및 알고리즘 이식

2.1 운동방정식

구속방정식을 포함하고 있는 일반적인 동적 모델에 대한 운동방정식을 세우기 위해 해밀톤 정리를 이용하여 미분대수방정식을 도출할 것이다. 구속방정식을 포함하는 초기치 문제는 라그랑지 상수를 이용하여 비구속 방정식문제로 대체될 수 있다. F_C 는 구속력(Constraint force) 벡터, λ 는 라그랑지 상수 벡터, $\Phi=0$ 는 구속방정식, B 는 구속방정식의 기울기(Constraint gradient) 행렬, u 는 일반좌표(Generalized coordinates) 벡터로 표시한다. 구속력은 라그랑지 상수와 구속방정식의 기울기의 곱으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_C(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}^T \lambda = B(u)^T \lambda \quad (1)$$

K 를 운동에너지, P 를 위치에너지, S 를 변형에너지라고 할 때 해밀톤 정리를 적용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} \pi dt = \delta \int_{t_i}^{t_f} (K - P - F_C - S) dt = 0 \quad (2)$$

강체운동에서는 변형에너지 S 는 무시될 수 있고 일반화된 동적 평형운동방정식은 식 (3)과 같이 미분대수방정식으로, 구속방정식은 식 (4)와 같이 대수방정식으로 표현될 수 있다.

$$-\gamma(u, \dot{u}, \ddot{u}, \lambda) = M\ddot{u} - g(u, \dot{u}, t) + B^T \lambda = 0 \quad (3)$$

$$\Phi(u, t) = 0 \quad (4)$$

여기서 γ 는 잔여량(Residual) 벡터, m 은 관성행렬, $g(u, \dot{u}, t)$ 은 외력, 내력, 보조 관성력(Complementary inertia forces)의 합이다. 따라서 구속방정식을 포함하는 동적문제에 대한 운동방정식은 식 (3)과 같이 비구속형태의 운동방정식이 얻어진다.

2.2 Newton-Rapshon 방법을 개선한 알고리즘

식 (3)과 (4)를 선형화를 위해 시간 t^* 에서 변위 u^* , 속도 \dot{u}^* , 가속도 \ddot{u}^* , 라그랑지 상수 λ^* 가 주어 져 있다고 가정한다. 그리고 시간 t^* 에서 반복계산에 사용되는 증분된 수정자(Corrector)를 아래와 같이 나타 낸다.

$$u = u^* + \Delta u \quad (5a)$$

$$\dot{u} = \dot{u}^* + \Delta \dot{u} \quad (5b)$$

$$\ddot{u} = \ddot{u}^* + \Delta \ddot{u} \quad (5c)$$

$$\lambda = \lambda^* + \Delta \lambda \quad (5d)$$

식 (3)을 선형화하기 위하여 테일러 급수를 1차 확장(First-order expansion)을 수행할 수 있는데 있어서 다 음의 접선강성행렬(Tangent stiffness matrix) K_T 와 감쇠행렬 C_T 가 필요하다.

$$K_T = -\frac{\partial \gamma}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u} (B^T \lambda^*) \quad (6)$$

$$C_T = -\frac{\partial \gamma}{\partial \dot{u}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{u}} (g_{ext}) \quad (7)$$

동적평형 방정식의 변수 변위, 속도, 가속도에 대한 각각의 미분을 통해 구한 식들을 모아 정리하면 아래 와 같은 선형화된 평형방정식과 구속방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} M\Delta \ddot{u} + C_T \Delta \dot{u} + K_T \Delta u + B^T \Delta \lambda &= g_{ext} - B^T \lambda^* - M \ddot{u}^* + O(\Delta^2); \\ &= \gamma^*(u^*, \lambda^*, t) + O(\Delta^2) \end{aligned} \quad (8)$$

$$B\Delta u = -\Phi^*(u^*, t) + O(\Delta^2) \quad (9)$$

식 (8)과 (9)의 선형화된 평형방정식과 구속방정식을 행렬 형태로 미분대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{u} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_T & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^* \\ -\Phi^* \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 첫 번째 질량행렬은 M 은 대각요소가 0인 항이 생기게 되고, 이는 질량행렬이 절대적인 양수(Positive definite) 행렬이라는 조건을 위배하게 된다. 이 때 음함수 알고리즘에서 초기 가속도 값을 구하는데 있어서 특이성(Singularity)이 발생한다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 질량행렬이 절대적인 양수로 변환해야 될 필요성이 있으며 다음과 같이 수정하였다.

$$M^* = M + B^T B \quad (11)$$

이렇게 수정된 질량행렬 M^* 는 미분대수방정식 (10)을 변경시키서 음함수 시간적분을 적용한다. 2계 시스템 에 대한 일단계 방법(Single-step method)으로 변위와 속도를 Newmark 방법으로 아래와 같이 정의하였다.

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1 - \gamma)h \ddot{u}_n + \gamma h \ddot{u}_{n+1} \quad (12)$$

$$u_{n+1} = u_n + h \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \ddot{u}_n + \beta h^2 \ddot{u}_{n+1} \quad (13)$$

여기서 h 는 시간간격 크기, γ 와 β 는 매개변수이다. 매개변수들의 선택은 $\gamma=1/2$ 과 $\beta=1/4$ 로 하여 평균가속도 공식에서 얻어진 값을 선택하였다. 이는 선형시스템에 대하여 절대적으로 안정한 해석 거동을 제공하기 때문이다. 시간 $t_{n,j}$ 에서 변위, 속도 가속도를 u_{n+1} , \dot{u}_{n+1} , \ddot{u}_{n+1} 이라고 하고 Newton-Rapshon 방법으로 대수방정식을 반복적으로 풀 수 있다. 이 때, 초기값의 예측자(Predictor)를 다음과 같이 설정한다.

$$\ddot{u}_{n+1}^0 = 0 \quad (14a)$$

$$\dot{u}_{n+1}^0 = \dot{u}_n + (1 - \gamma)h \ddot{u}_n \quad (14b)$$

$$u_{n+1}^0 = u_n + h \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \ddot{u}_n \quad (14c)$$

k 번 째 반복계산에서 식(10)에 의해 증분된 변위, 속도, 가속도의 수정자는 아래와 같이 표현할 수 있다. 이와 같은 증분의 기하학적 개념을 그림 1에 나타냈다.

$$\ddot{u}_{n+1}^{k+1} = \ddot{u}_{n+1}^k + \Delta \ddot{u} = \ddot{u}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta h^2} \Delta u \quad (15a)$$

$$\dot{u}_{n+1}^{k+1} = \dot{u}_{n+1}^k + \Delta \dot{u} = \dot{u}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta h} \Delta u \quad (15b)$$

$$u_{n+1}^{k+1} = u_{n+1}^k + \Delta u \quad (15c)$$

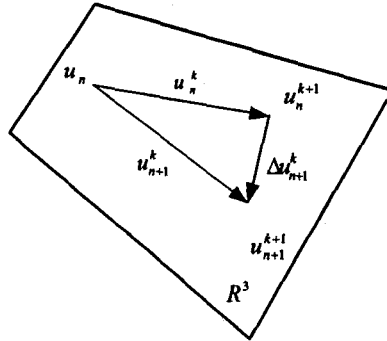


그림 1 변위 수정자의 기하학적 해석

식 (15a, b, c)를 식 (10)에 대입하고 정리하면 증분 Δu 와 $\Delta \lambda$ 에 대한 항들로 정리된다.

$$\begin{bmatrix} S_T & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^* \\ -\Phi^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$S_T = K_T + \frac{\gamma}{\beta h} C_T + \frac{1}{\beta h^2} M^* \quad (17)$$

여기서 S_T 는 미분대수평형방정식에서 강성, 감쇠, 구속조건에 영향을 모두 내포한 대표적인 강성으로 역할을 하게된다. Δu 와 $\Delta \lambda$ 를 산출할 때 앞서 언급했던 특이성을 피할 수 있게 되어 식 (15a, b, c)를 이용하게 반복계산을 할 수 있다. 이 값들은 다시 식(3)의 잔여량 벡터와 식(4)의 구속조건 벡터를 계산하여 그 값들이 수렴조건 조건은 $\|\gamma^*\| < \epsilon$ 와 $\|\Phi^*\| < \eta$ 에 동시에 만족할 때까지 반복적으로 수행한다. 이러한 반복법을 이용하고 제안된 알고리즘의 시간적분 과정을 그림 2에 나타냈다.

먼저 초기시간 $t=t_0$ 일 때, 변위, 속도, 매개변수, 라그랑지 상수 및 시간간격을 설정하고 이 초기값들을 이

용하여 식 (11)의 개선된 질량행렬 M^* 을 계산한다. 개선된 질량행렬을 이용하여 식 (3)의 운동방정식으로부 터 초기가속도 \ddot{u}_n 을 구한다. 이들 변위, 속도, 가속도는 식 (14a, b, c)를 이용하여 초기 예측자를 계산한다. 그런 다음 예측자들을 식 (3)의 운동방정식과 식 (4)의 구속방정식에 대입하여 잔여량 벡터를 계산한다. 이들 잔여량 벡터들을 수렴조건에 만족하는지를 판별하여 만족하지 못하면 식 (15a, b, c)의 수정자를 계산하기 위해 필요한 증분값 Δu 와 $\Delta \lambda$ 를 식 (10)의 선형화된 미분대수행렬식을 역변환으로 풀어 구한다. 또 다시 증분된 수정자 값들을 다시 식 (3)과 (4)에 대입하여 잔여량 벡터를 구하고 만약 수렴조건이 만족되면 시간 $t=t_0$ 일 때의 변위, 속도, 가속도 등에 대한 근사해를 구한 것이다. 다음에는 시간간격 크기가 h 로 증분된 시간을 초기시간 $t=t_0+h$ 일 때, 변위, 속도, 가속도를 전 시간 단계에서 최종적으로 구한 근사해들을 초기값으로 설정하게 된다. 이 초기값들을 이용하여 전 시간 단계에서와 마찬가지로 과정으로 반복적으로 계산을 수행하여 근사해를 구하게 된다.

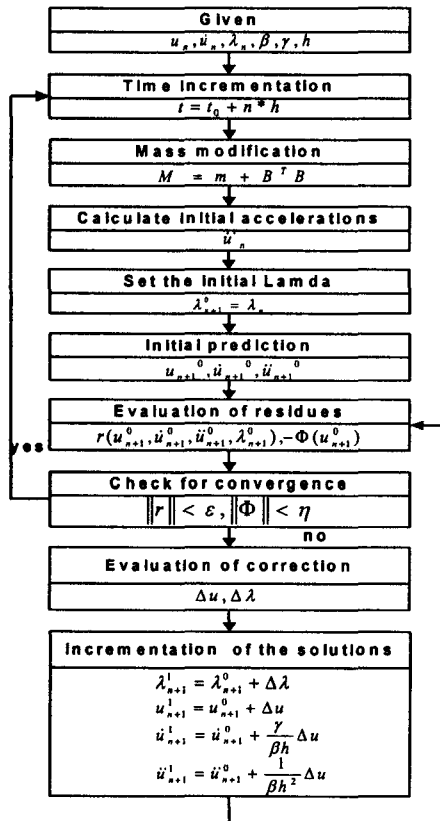


그림 2. 반복계산 개념과 제안된 알고리즘의 흐름도

3. 수치해석

감쇠가 없는 조건에서 질량 $m=1\text{kg}$, 길이 $L=1\text{m}$ 인 진자가 그림 3과 같이 매달려 있으며 초기속도는 0으로 가정하였다. 초기 라그랑지 상수는 자유물체도를 이용하여 $\lambda_1=-10$, $\lambda_2=0$ 로 설정했으며, 시간간격 $h=0.01$ 초로 하였고 이론해는 4계 Runge-Kutta 방법을 이용한 해와 비교하였다. 단진자 시스템의 일반화된

좌표계 $u=[x \ y \ \theta]^T$ 에서 운동에너지 K 와 위치에너지 P , 구속방정식 ϕ 를 이용하여 식 (3)의 운동방정식과 식 (11)의 개량된 질량행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -l \cos \theta & -l \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$M^* = \begin{bmatrix} m+1 & 0 & -l \cos \theta \\ 0 & m+1 & -l \sin \theta \\ -l \cos \theta & -l \sin \theta & l^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기에서 알 수 있듯이 개량된 질량행렬은 운동방정식 (18)에서 질량행렬을 절대적인 양수로 변화시켜 초기 가속도를 구할 수 있도록 한다.

그림 4는 각도와 각속도에 대하여 4계 Runge-Kutta 방법과 제안된 알고리즘을 비교할 때 정확히 일치함을 보여주고 있으며, 그림 5와 6은 Runge-Kutta 방법으로 구할 수 없는 x 와 y 방향에 대한 변위와 속도를 보여 주고 있다. 이 때 그림 6의 각 성분을 합성하여도 그림 4의 속도성분과 일치함을 확인하였다. 그림 7은 에너지에 대한 그래프로 운동에너지와 위치에너지가 서로 상반되게 진동하고 있음을 보여주고 있으며 이들의 합인 총에너지는 거의 일정하게 보존되고 있음을 보여준다. 그러나 운동에너지와 위치에너지가 최소값과 최대값으로 되는 곳에서는 에너지가 진동함을 알 수 있다. 이는 Newmark 알고리즘에서 사다리꼴법에 의해서 생성되는 오차이다. 그림 8 과 그림 9 는 4계 Runge-Kutta 방법으로 구한 각가속도와 제안된 알고리즘으로 구한 각가속도로 제안된 알고리즘으로 구한 각가속도에 고주파수가 발생하고 있음을 보여 주고 있다. 이는 시간간격 크기와 관련되어 있으며, 만일 고주파수를 제거하고자 필터링 과정을 거친다면 4계 Runge-Kutta 방법에 정확히 접근함을 확인하였다. 그림 10과 그림 11은 x 방향 가속도와 y 방향 가속도 그래프를 보여 주고 있다. 그림 12 와 그림 13은 라그랑지 상수들로 반력과 관계되어 있으며, 매 시간적분마다 산정 되어진다. 이들은 가속도와 같이 고주파 성분이 심하게 발생하고 있으며 고주파대가 어느 정도 주기를 가지고 그 크기가 변하면서 진동하고 있음을 보여준다. 다시 말하면, 해가 불안정하다는 것을 보여준다. 각가속도와 마찬가지로 고주파성분을 제거하여 안정화를 이룰 수 있는 새로운 알고리즘 기법을 모색할 필요성을 대두시키고 있다.

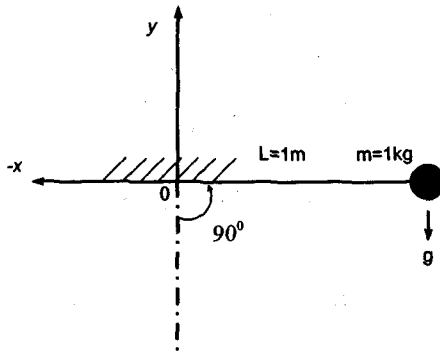


그림 3 강체 진자의 초기 위치도

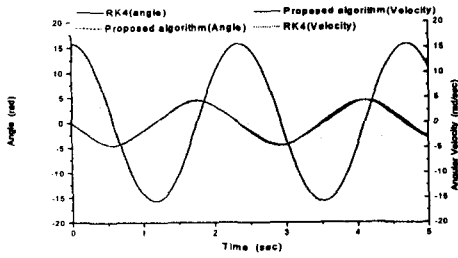


그림 4 각도 θ 와 각속도 $\dot{\theta}$ 비교

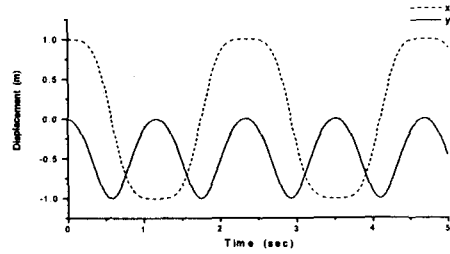


그림 5 제안된 알고리즘에 의한 변위

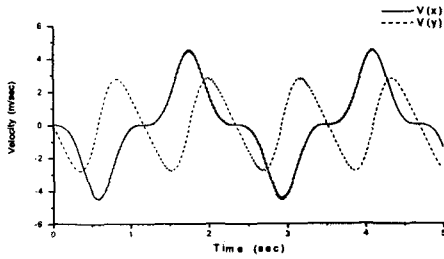


그림 6 제안된 알고리즘에 의한 속도

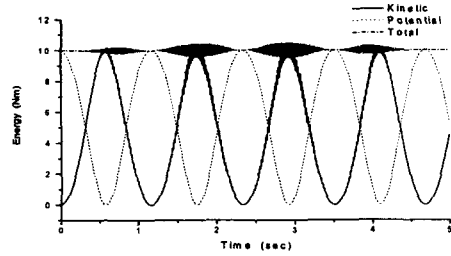
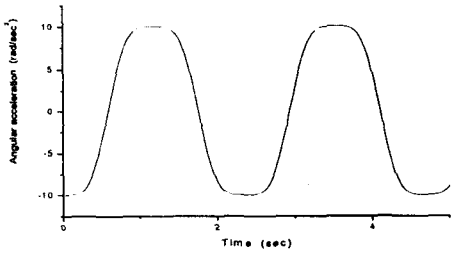


그림 7 제안된 알고리즘에 의한 에너지



그림

8 Runge-Kutta로 구한 각가속도 $\ddot{\theta}$

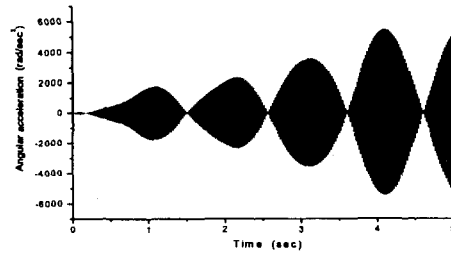


그림 9 제안된 알고리즘에 의한 각가속도 $\ddot{\theta}$

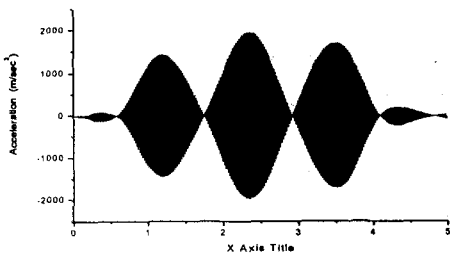


그림 10 제안된 알고리즘에 의한 가속도 \ddot{x}

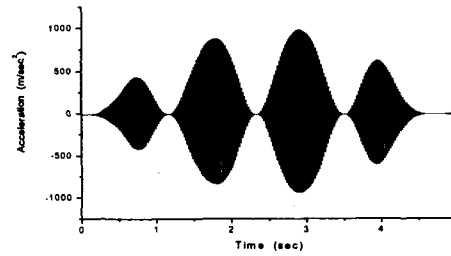


그림 11 제안된 알고리즘에 의한 가속도 \ddot{y}

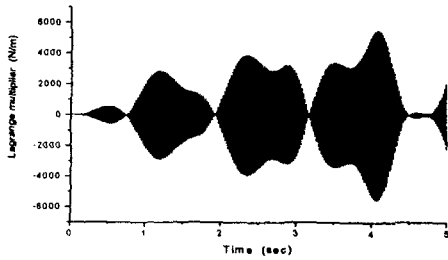


그림 12 제안된 알고리즘에 의한 λ_1

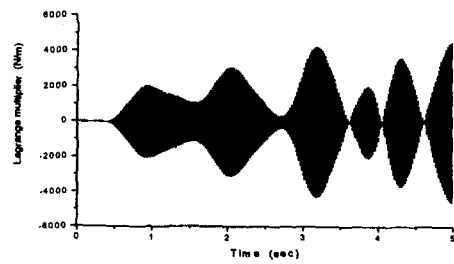


그림 13 제안된 알고리즘에 의한 λ_2

4. 결론

본 연구는 일반화된 좌표계를 선택하여 운동방정식을 시간적분 할 때, 역변환하는 과정에서 특이성을 극복하는 알고리즘을 제안하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 구속방정식을 포함한 비선형 운동방정식을 해밀톤 정리와 라그랑지 상수(Lagrange multiplier)를 이용하여 구속문제를 비구속문제로 바꾼 운동방정식을 선형화 된 미분대수방정식으로 유도하였다.
- (2) 질량행렬을 절대적인 양수(Positive definite)로 변경하여 초기의 예측자와 수정자 계산이 가능하도록 하였고, 시간 적분은 종래의 음함수 알고리즘(Implicit algorithm)에 Newton-Raphson 방법을 병용하였다.
- (3) 예제를 통해 제안된 알고리즘의 결과와 4계 Runge-Kutta 방법으로 구한 이론해를 비교함으로써 제안된 알고리즘이 특이성을 효과적으로 극복할 수 있음을 확인하였다.

후 기

이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2003-003-D00014).

참고 문헌

1. M. F. O. S. Pereira and J. A. C. Ambrosio, *Computational Dynamics in Multibody Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995, pp. 15~164
2. N. Orlandea, M. Chace and D. Chahan, "A sparsity oriented approach to the dynamic analysis and design of mechanical systems, part I and II", *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 99, 1977, pp. 773~784
3. J. C. Simo and K. Wong, "Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.31, 1991, pp. 19~52
4. J. Baumgarte, "Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamics systems", *Computer & Methods in Applied Mechanics & Engineering*, Vol. 1, 1972, pp. 1~16
5. J. Chung and G. Hulbert, "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized - α method", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, 1993, pp. 371~375
6. A. Cardona and M. Geradin, "Time integration of the equation of motion in mechanism analysis", *Compter & Structures*, Vol. 33, No. 3, 1989, pp. 801~820