

# 비 홀로노믹 구속조건을 이용한 수중 이동체의 자세제어에 관한 연구

남택근\*, 노영오\*, 안병원\*, 김철승\*\*

\* 목포해양대학교 기관시스템공학부 교수 \*\* 목포해양대학교 해상운송시스템학부 교수

## A posture control for underwater vehicle with nonholonomic constraint

Taek-Kun Nam\*, Young-Oh Roh\*, Byong-Won Ahn\*, Chol-Seong Kim\*\*

\* Division of Marine Engineering System, \*\* Division of Marine Transportation System,

Mokpo National Maritime University, Mokpo, 530-729, Korea

**요약** : 본 논문에서는 비 홀로노믹적인 구속조건을 갖는 수중 이동체의 위치 및 자세제어에 관한 제어기법에 대해서 논의한다. 비 홀로노믹 시스템은 적분 불가능한 구속조건으로부터 도출되어지는 시스템으로 연속시간영역의 피드백제어로는 평형점에서의 안정화제어가 불가능한 특성을 가지고 있다. 본 연구에서는 속도의 비 홀로노믹 구속조건을 가지는 수중 이동체에 대하여 체인드폼으로 변환하고 변환된 시스템에 대해 백스테핑 제어기법을 적용하여 자세제어를 행하고 수치시뮬레이션을 통하여 제어기법의 유용성을 평가하였다.

**핵심용어** : 수중이동체, 비홀로노믹구속, 다중체인드폼, 백스테핑제어

**ABSTRACT** : In this paper, we study the posture control of an underwater vehicle with nonholonomic constraint. Generally, systems with nonholonomic constraints cannot be stabilized to an equilibrium points by smooth state feedback control. Therefore, we proposed a control strategy for posture control of the underwater vehicle using backstepping control. The proposed control scheme is applied to the posture control of an underwater vehicle and verified the effectiveness of control strategy by numerical simulation.

**KEY WORDS** : Underwater vehicle, nonholonomic constraints, multi-chained form, backstepping control

### 1. Introduction

본 연구에서는 3차원 공간내를 이동하는 수중 이동체의 위치·자세를 목표치에 안정화시키는 제어기법에 대해서 논의하고자 한다. 본 논문에서의 제어대상물인 수중 이동체는 자세를 제어하는 3개의 각속도와 추진방향을 제어하는 1개의 병진속도 합계 4개의 입력을 갖고 추진방향 이외에는 이동할 수 없는 구속조건을 갖고 있다. 즉, 4개의 제어입력을 이용하여 위치·자세를 나타내는 6개의 일반화좌표를 제어하는 문제이다.

이와 같은 구속조건은 비홀로노믹 구속조건 [8]으로 분류 되고 비홀로노믹적인 특성에 주목하여 다양한 연구가 진행되고 있다. 비홀로노믹 시스템은 연속시간영역의 피드백제어로는 평형점에서의 안정화 제어가 불가능한 특성[9]을 가지고 있는

시스템이기도 하다. Nakamura [11]등은 운동학 모델의 가제어성 및 안정성을 증명하고 있고 목표궤도가 0이 아니라는 가정 아래 추종제어를 행하고 있다. 하지만 자세표현에 있어서 특이점을 갖고 있어 대역적인 가제어성 및 안정성의 보장이 없다. Reyhanoglu [1]은 3자유도를 가지는 수면이동체(surface vessel)의 가제어성 및 비홀로노믹적인 특성에 대해 논의하고 있지만 구체적인 제어기설계에 대한 제안이 되지 않고 있다. Egeland [6]는 수중 이동체의 구속조건으로부터 체인드폼을 유도하고 시변(time-varying)제어기를 제안하여 위치·자세제어에 적용을 하고 있지만 수렴속도가 너무 느리고 제어기 설계과정이 복잡하고 난해한 문제점을 가지고 있다.

본 논문에서는 수중 이동체의 체인드폼으로의 변환결과 [6]를 이용하여 다중 체인드폼(multi-chained form)으로 변환을 행하고 백스테핑(backstepping) 제어기법을 적용하여 초기 위치·자세로부터 목적치로의 안정화 제어기법을 제안한다. 아울러 시뮬레이션을 통하여 제안한 제어기법의 유용성을 확인하고자 한

\*대표저자: 남택근

비회원, tknam@mmu.ac.kr, 061)240-7310

\*비회원, 종신회원, 종신회원 (mmuroh, ds4cvt, cskim@mmu.ac.kr),

061) 240 -7095, 7102, 7307

다.

## 2. 수중 이동체의 운동학 모델

본 연구에서의 제어대상물은 그림.1 과 같은 수중이동체이다. 이 수중 이동체는 자세를 제어하는 3개의 각속도와 추진방향을 제어하는 1개의 병진속도 합계 4개의 입력을 가지고 추진방향 이외에는 이동되지 않는다는 속도에 관한 2개의 비 홀로노믹 구속조건을 가지고 있다.

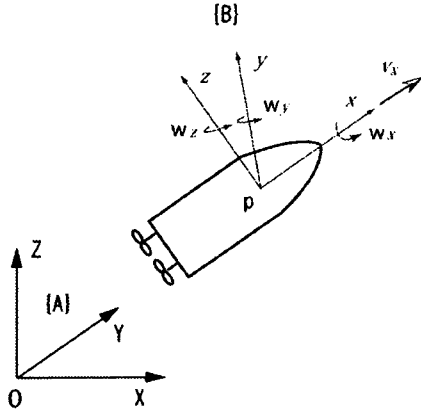


Fig. 1 underwater vehicle

그림 1의 A, B는 각각 기준좌표계와 수중이동체의 물체좌표계를 의미하고 수중이동체의 운동학모델은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{R} &= RS(u) \\ \dot{p} &= Rv \end{aligned} \quad (1)$$

단,  $R = \{r_{ij}\} \in SO3$  은 기준좌표계 A에서 본 물체좌표계 B의 회전행렬이고  $u = (u_x, u_y, u_z)^T$  는 물체좌표계에서의 각속도이다.  $S(\cdot)$  는 Skew symmetric matrix를 의미하고  $p = (p_x, p_y, p_z)^T$  는 수중이동체의 위치를,  $v = (v_x, 0, 0)^T$  는 물체좌표계에서의 이동체의 속도를 나타낸다. 이것은 수중이동체의 병진이동이 물체좌표계의 x축 방향만으로 이동하는 것을 의미한다.

제어목적은 위치  $p$ 를 목표위치  $p_d = 0 \in R^3$ 로, 자세  $R$ 을 목표자세  $R_d = I_3$ 에 안정화시키는 것이다. 단,  $I_3 \in R^{3 \times 3}$ 은 단위행렬을 의미한다. 물체의 자세를 표현하는 방법중 하나인 등가회전각, 등가회전축이 주어졌을 경우 회전행렬  $R$ 은

$$R = I_3 \cos \theta + S(\kappa) \sin \theta + \kappa \kappa^T (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

와 같이 나타내어진다. 단,  $\kappa = (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)^T \in R^3$ 은 좌표계 A의 기저벡터를 이용하여 표현한 수중이동체의 회전각 방향을 갖는 단위벡터이고  $\theta$ 는  $\kappa$ 를 중심축으로 한 회전각이다. 반대로 회전행렬  $R$ 이

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

로 주어질 경우 등가회전각( $\theta$ ), 등가회전축( $\kappa$ )은

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left( \frac{\text{trace}(R) - 1}{2} \right) \\ \kappa &= \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

로 주어진다. (3)의  $R$ 은 오일러 파라미터

$$\epsilon := \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \kappa, \quad \eta := \cos \left( \frac{\phi}{2} \right) \quad (5)$$

를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R = (\eta^2 - \epsilon^T \epsilon) I + 2\eta S(\epsilon) + 2\epsilon \epsilon^T \quad (6)$$

단, 오일러 파라미터  $\epsilon, \eta$ 는  $\epsilon^T \epsilon + \eta^2 = 1$ 의 조건을 만족한다. 또한 Euler-Rodriguez 파라미터 벡터를

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \frac{\epsilon}{\eta}, \quad \eta \neq 0 \quad (7)$$

로 정의하고 오일러의 회전벡터  $e$ 를

$$e := 2\eta \rho = \kappa \sin \phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (8)$$

로 정의하면, Euler-Rodriguez 파라미터  $\rho$ 는

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\epsilon}{\eta} = \frac{\epsilon}{2\eta^2} \\ &= \frac{1}{\text{trace}(R) + 1} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

가 된다. (9)를 미분하면

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2} (I + S(\rho) + \rho \rho^T) \omega \quad (10)$$

가 얻어진다 [7]. 또한  $\rho$ 를 이용하면 회전행렬  $R$ 은

$$\begin{aligned} R &= (\eta^2 - \epsilon^T \epsilon) I + 2\eta S(\epsilon) + 2\epsilon \epsilon^T \\ &= 2\eta^2 (I + S(\rho) + \rho \rho^T) - I \end{aligned} \quad (11)$$

(11)의 양변에 오른쪽으로부터  $\omega$ 를 곱해서 (10)을 이용하면

$$(R + I)u = 2\eta^2(I + S(\rho) + \rho\rho^T)u = 2\eta^2 2\dot{\rho} \quad (12)$$

이 되고 (10)은

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\text{trace}(R) + 1} (R + I)u \quad (13)$$

로도 표현할 수 있다. 단, (12)으로부터 (13)으로의 변환은

$$\text{trace}(R) = 4\eta^2 - 1 \quad (14)$$

를 이용하고 있다.

### 3. 다중 Chained form으로의 변환

(1)로 표현되는 수중 이동체에 대해 Egeland [6]에 의한 좌표변환

$$\begin{aligned} x_1 &= p_x \\ x_2 &= \frac{r_{21}}{r_{11}}, x_3 = p_y \\ x_4 &= \frac{r_{21}}{r_{11}}, x_5 = p_z \\ x_6 &= \frac{r_{32} - r_{23}}{1 + \text{Trace}(R)} \end{aligned}$$

과 입력변환

$$\begin{aligned} u_1 &= r_{11} \dot{x}_1, u_2 = \dot{x}_2 \\ u_3 &= \dot{x}_3, u_4 = \dot{x}_4 \end{aligned} \quad (16)$$

을 행하면

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 &= u_3 \\ \dot{x}_5 &= x_4 u_1 \\ \dot{x}_6 &= u_4 \end{aligned} \quad (17)$$

이 얻어진다. (17)에 대하여  $z = (x_1, x_3, x_2, x_5, x_4, x_6)^T$  와 같은 변수변환을 취하면

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \dot{z}_1 &= u_1 \\ \Sigma_2 : \dot{z}_2 &= z_3 u_1 \quad \Sigma_3 : \dot{z}_4 = z_5 u_1 \quad \Sigma_4 : \dot{z}_6 = u_4 \\ \dot{z}_3 &= u_2 \quad \dot{z}_5 = u_3 \end{aligned} \quad (18)$$

과 같은 다중 체인드폼(multi-chained form)이 얻어진다.

#### 3.1 제어

실제 제어를 행하는 데 있어서는 (1)을 직접적으로 이용하지 않고 (13)과 (1)의  $\dot{p} = Rv$ 로부터 얻어지는

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{trace}(R) + 1} (R + I)u & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (19)$$

를 이용한다. 제어목적은 (19)의 시스템에 대하여  $\rho, p$ 를 원점에 안정화시키는 제어입력  $u, v$ 를 구하는 것이다.  $\rho \rightarrow 0$ 이 달성되면 (7)로부터  $\epsilon \rightarrow 0$ 이 만족되고 오일러 파라미터의 조건 ( $\epsilon^T \epsilon + \eta^2 = 1$ )로부터는  $\eta^2 = 1$ 을 얻는다.

$\rho \rightarrow 0, \eta^2 \rightarrow 1$ 과 (12)로부터  $R \rightarrow I_3$ 이 되어 원래의 제어목적이 달성되는 것이다.

#### 3.2 백스테핑에 의한 다중 체인드폼의 제어

(15) 본 절에서는 (18)과 같이 표현되는 다중 체인드폼 시스템의 제어에 대해서 논의한다.

우선 (18)의 시스템에 대하여

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1 z_1, k_1 > 0 \\ u_4 &= -k_6 z_6, k_6 > 0 \end{aligned} \quad (20)$$

의 제어입력을 가하면 폐루프시스템(closed-loop system)

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 \\ \Sigma_2 : \dot{z}_2 &= -k_1 z_1 z_3 \\ \dot{z}_3 &= u_2 \\ \Sigma_3 : \dot{z}_4 &= -k_1 z_1 z_5 \\ \dot{z}_5 &= u_3 \\ \Sigma_4 : \dot{z}_6 &= u_4 \end{aligned} \quad (21)$$

가 얻어진다. (21)의  $\Sigma_1, \Sigma_4$ 로부터

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{-k_1 t} z_1(0), \\ z_6(t) &= e^{-k_6 t} z_6(0) \end{aligned} \quad (22)$$

가 성립되므로

$$z_1(t) \rightarrow 0, z_6(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \quad (23)$$

가 얻어진다.

$\Sigma_2, \Sigma_3$ 의 제어에는 백스테핑 제어기법을 적용한다. 먼저  $\Sigma_2$ 에 대하여 리아프노프(Lyapunov) 함수 후보로서

$$V_1 = \frac{1}{2} z_2^2 \quad (24)$$

을 선정하여 시간에 대해 미분하면

$$\dot{V}_1 = z_2 \dot{z}_2 = -k_1 z_1 z_2 z_3 \quad (25)$$

이 된다. 여기에서  $z_3$ 을 가상적인 제어입력으로 간주하고

$$z_3 = -\frac{k_2 z_2}{k_1 z_1} := \phi_1 \quad (26)$$

를 도입하면

$$\dot{V}_1 = -k_2 z_2^2 \leq 0 \quad (27)$$

이 성립되어  $z_2 \rightarrow 0$ 가 보증된다.

다음단계로서는 (26), (27)의 관계가 만족되도록 리아프노프 함수 후보로서

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} (z_3 - \phi_1)^2 \quad (28)$$

을 선택하여 시간에 대한 미분을 구하면

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_1 z_1 z_2 z_3 + (z_3 - \phi_1)(\dot{z}_3 - \dot{\phi}_1) \\ &= -k_1 z_1 z_2 \phi_1 + (z_3 - \phi_1)(u_2 - \dot{\phi}_1 - k_1 z_1 z_2) \end{aligned} \quad (29)$$

가 되고 제어입력으로

$$u_2 = \dot{\phi}_1 + k_1 z_1 z_2 - k_3 (z_3 - \phi_1), \quad k_3 > 0 \quad (30)$$

을 구성하면

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_3 (z_3 - \phi_1)^2 \leq 0 \quad (31)$$

가 된다. (31)로부터  $z_1 \rightarrow 0, z_3 \rightarrow \phi_1$ 이 보증되는 것을 알 수 있고 (26)의 정의로부터  $z_3 \rightarrow 0$ 가 된다. 단,  $z_3 \rightarrow 0$ 가 되기 위해서는

$$k_2 > k_1 \quad (32)$$

의 조건이 필요하다. 이것은 (26)의 분자를 분모의 항보다 빨리 원점에 수렴시키기 위한 것이다.

$z_2$ 의 수렴속도를 살펴보면 (27)의  $\dot{V}_1 = -k_2 z_2^2 = -2k_2 V_1$ 으로부터

$$V_1(t) = e^{-2k_2 t} V_1(0) \quad (34)$$

가 얻어지고 (26)과의 관계로부터

$$z_2(t) = e^{-k_2 t} |z_2(0)| \quad (35)$$

가 성립된다. 즉  $z_2$ 의 수렴속도는  $k_2$ 에 의해서 결정된다.

$\Sigma_3$ 에 대해서도 같은 해석법이 적용가능하고 다음과 같은 명제를 얻을 수 있다.

**명제.1** (18)로 표현되는 시스템은 다음과 같은 제어입력에 의해 시스템의 모든 상태변수는 원점에 점근수렴(점근안정-asymptotically stable)하게 된다.

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1 z_1, \\ u_2 &= \dot{\phi}_1 + k_1 z_1 z_2 - k_3 (z_3 - \phi_1) \end{aligned} \quad (36)$$

$$u_3 = \dot{\phi}_2 + k_1 z_1 z_4 - k_5 (z_4 - \phi_2)$$

$$u_4 = -k_6 z_6$$

$$k_1 > 0, k_2 > k_1, k_3 > 0, k_4 > k_1, k_5 > 0, k_6 > 0$$

단,  $\phi_1 = \frac{k_2 z_2}{k_1 z_1}, \phi_2 = \frac{k_4 z_4}{k_1 z_1}$

#### 4. 시뮬레이션

수중 이동체에 대하여 본 연구에서 제안한 제어알고리즘을 적용하여 위치-자세제어를 행하였고 제어결과는 그림 2 - 그림 4와 같다. 수중 이동체의 초기위치 및 자세는 각각

$$p_0 = (-1, -2, -3)^T \text{ 와 } R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & -0.7 \\ 0 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix} \text{ 이고 목적위}$$

치 및 자세는  $p_d = (0, 0, 0)^T, R_d = I_3$ 으로 하였다. 백스테핑 제어기의 계인으로는  $k_1 = 2, k_2 = k_4 = 5, k_3 = k_5 = k_6 = 2$ 로 하였고 제어시간은 5 [sec]로 하였다. Fig.2 (a), Fig.2 (b)는 각각 Euler-Rodriguez 파라미터와 수중 이동체의 병진위치를 나타내고 있다.

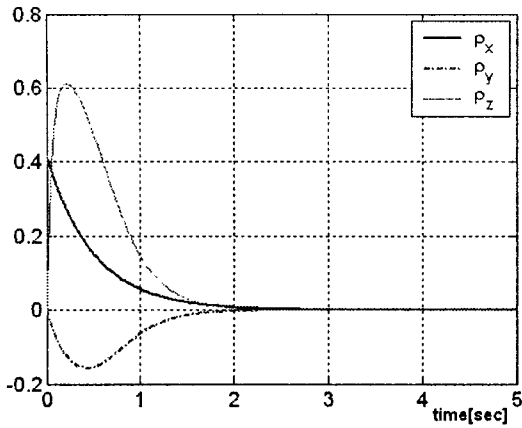


Fig. 2 (a) Time evolution of Euler-Rodriguez parameter( $\rho$ ).

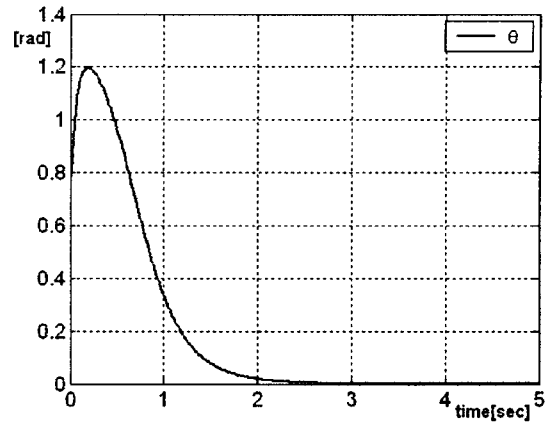


Fig. 3 (b) Time evolution of an equivalent revolution angle( $\theta$ ).

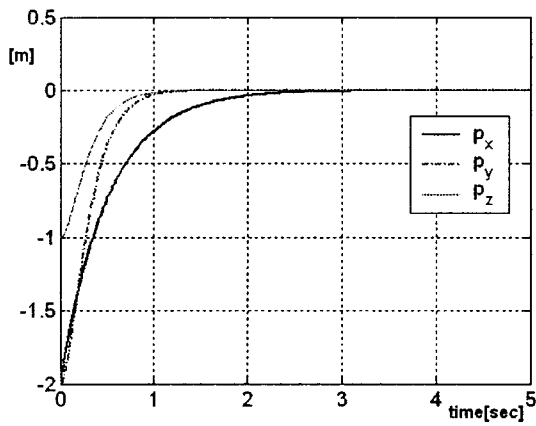


Fig. 2 (b) Time evolution of state variables ( $p$ ).

Fig.3 (a), Fig.3 (b)는 각각 수중 이동체 회전축의 단위벡터와 회전축을 중심으로 하는 회전각을 나타내고 있다.

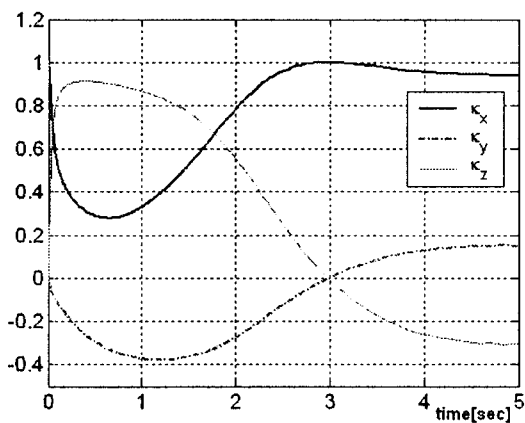


Fig. 3 (a) Time evolution of unit vector( $\kappa$ ).

Fig. 4(a), Fig. 4(b)는 각각 제어입력  $v_x, u_x, u_y, u_z$ 을 나타내고 있으며 Fig.5는 시뮬레이션 결과를 3차원에서의 애니메이션으로 나타내고 있다.

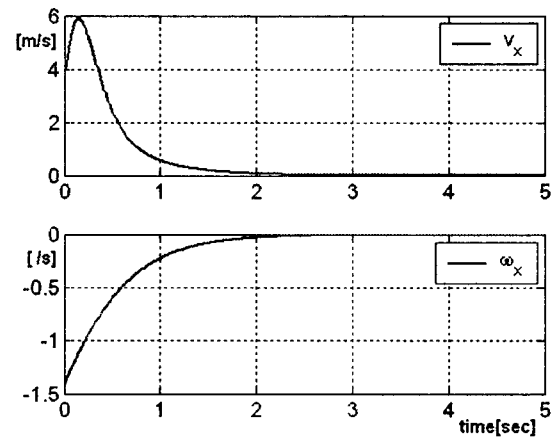


Fig. 4 (a) Time evolution of the control inputs( $v_x, u_x$ ).

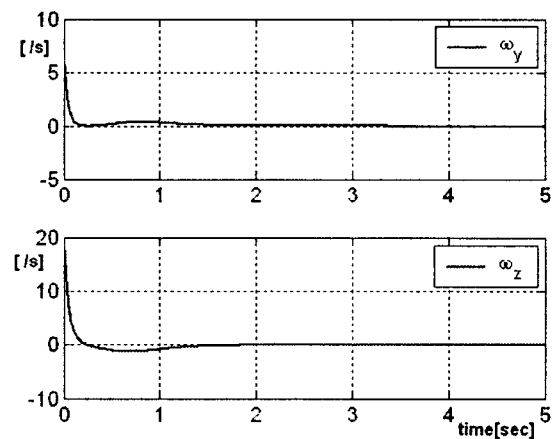


Fig. 4 (b) Time evolution of the control inputs( $u_y, u_z$ ).

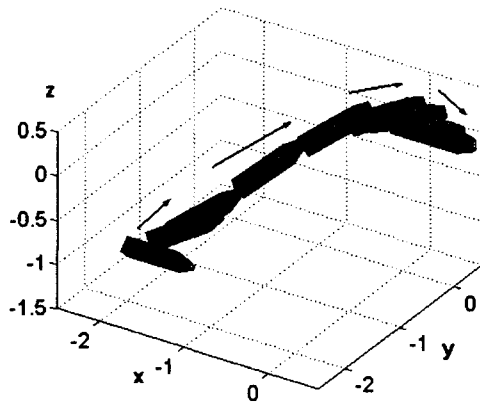


Fig. 5 Animation of simulation result.

상기 시뮬레이션을 통하여 수중 이동체의 초기위치 및 자세가 원하고자 하는 목적위치 및 자세에 수렴되고 있음을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 비 홀로노믹 구속조건을 가지는 수중 이동체의 위치·자세제어에 대해 살펴보았다. 6개의 자유도와 4개의 제어입력으로 구성되는 수중 이동체의 구속조건으로부터 얻어지는 다중 체인드폼에 대해 백스테핑 제어기법을 적용하여 초기위치·자세로부터 목적위치·자세로의 점근안정 제어를 행하였다. 제안한 제어기법을 3차원의 수중 이동체에 적용하였고 수치시뮬레이션을 통하여 제어기법의 유용성을 확인하였다.

## 참 고 문 헌

- [1] M. Reyhanoglu, A. van der Schaft, et. al(1996), Nonlinear control of a class of underactuated systems, pp. 1682-1687.
- [2] M. W. Spong, M. Vidyasagar (1989), Robot dynamics and control, Jon Wiley, New York.
- [3] N. E. Leonard (1997), Stabilization of underwater vehicle dynamics with symmetry-breaking potentials, Systems & Control Letters, Vol. 32, pp. 35-42.
- [4] N. E. Leonard (1997), Stability of a bottom-heavy underwater vehicle, Automatica, Vol. 33, No. 3, pp. 331-346.
- [5] O. Egeland, M. Dalsmo, O. J. Sordalen (1996), Feedback control of a nonholonomic underwater vehicle with a constant desired configuration, International Journal of robotics research, pp. 24-35.
- [6] O. Egeland, E. Berglund, O. J. Sordalen (1994),

Exponential stabilization of a nonholonomic underwater vehicle with constant desired configuration, IEEE Int. conf on robotics and automation, pp. 20-25.

- [7] P. C. Huges (1994), Spacecraft attitude dynamics, John Wiley.
- [8] R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry (1994), A mathematical introduction to robotic manipulation, CRC Press.
- [9] R. W. Brockett (1983), Asymptotic stability and feedback stabilization, Differential geometric control theory, pp. 181-208.
- [10] T. Fossen (1994), Guidance and control of ocean vehicles, John Wiley & Sons.
- [11] Y. Nakamura, S. Savant (1991), Nonholonomic motion control of an autonomous underwater vehicles, Proc. of IROS'91, pp. 1254-1259.