

프리 자이로스코프를 이용한 위치결정에 관한 연구

박석주* · 정 태 권**

* 한국해양대학교 해양시스템공학부, ** 한국해양대학교 운항시스템공학부

A Study on Position Fixing by Free Gyroscopes

Sok-Chu Park*

Tae-Gweon Jeong**

Division of Marine Systems Engineering, Korea Maritime University, Pusan 606-791, Republic of Korea

Division of Ship Operation Systems Engineering, Korea Maritime University, Pusan 606-791, Republic of Korea

요 약 : 이 논문은 프리 자이로스코프의 방향보존성을 이용하여 위치를 결정하는 방법을 이론적으로 검토한 것이다. 임의 기준 위치 혹은 출발 위치에 대하여 두 개 이상의 프리 자이로스코프의 자이로축의 경사각을 측정하고 아울러 기준 위치에서 시작한 시간의 경과를 측정한 다음, 이 두 가지의 기본 요소를 이용하여 위치를 구하는 것이다.

핵심용어 : 자이로스코프, 방향보존성, 경사각, 자전각속도

ABSTRACT : This paper is to investigate theoretically position fixing by using gyroscopic inertia of free gyroscope. with respect to a reference position or starting point, the changes of the inclination angle of the spin axes and the elapsed time are taken a measurement. By using the two basic factors like changes of angles a position is fixed.

KEY WORDS : gyroscope, gyroscopic inertia, gyro tilt, angular velocity of the earth's rotation

1. 서 론

지구상에서 위치를 측정하는 것을 항법이라고 할 수 있는데 그 방법은 다양하다. 먼저, 인간이 지구상에서 출현한 이후부터 사용되어 온 지리적, 수리적 특성을 이용한 항법, 천체를 이용한 항법, 전자기술에 따른 전파항법, 위성을 이용한 위성항법, 뉴턴 역학을 이용한 관성항법 등이 있다. 그중 위성항법에서 GPS와 그의 보정시스템인 DGPS는 그 정확도와 편리성으로 나날이 발전하고 있다. 그러나 이런 위성항법은 위성식별코드를 바꾸는 경우에는 전혀 이용할 수가 없게 된다. 그렇다고 자체적으로 위성을 발생하여 이용하기에는 너무 비용이 많이 들게 된다.

이런 점을 고려하여 이 연구에서는 이 GPS 혹은 DGPS에 대한 보조 혹은 대체 항법으로서 3축이 자유로운 자이로스코프 (free gyroscope)(이하 '자유 자이로스코프'라고 함)를 이용한 위치결정시스템을 제시하려고 한다.

이 연구에서는 마찰이 없는 이상적인 자이로스코프를 가정하고 이를 이용한 위치 측정방정식을 유도하는데 목적을 두었다.

2. 자유 자이로스코프의 특성과 위치측정방정식

2.1 자유 자이로스코프의 특성

고속으로 회전하고 있는 3축이 자유로운 자이로스코프에서는 그 회전축의 방향이 그대로 유지하려는 성질이 있다. 이것은 자이로축의 방향보존성(gyroscopic inertia)이라고 한다. 지구는 하루에 한번씩 자전을 하고 있으므로 이 방향보존성에 의하여 자이로축은 운동을 하고 있는 것처럼 보인다. 이것을 자이로축의 시운동이라고 한다. 임의 위도 λ 에서는 지반의 운동은 식(1)로 표현된다[A. Frost, 1982].

$$\begin{aligned} Dg &= \Omega \sin \lambda \\ Tg &= \Omega \cos \lambda \end{aligned} \quad \text{-----(1)}$$

여기서 Ω 는 지구의 자전각속도이며, Dg 는 지반의 선회운동을 표시하고 Tg 는 지반의 경사운동을 의미한다. 한편 지구의 자전각속도 Ω 는 1 항성일(sidereal day)로 표현된 것을 사용하기로 한다[J.B. Scarborough, 1958].

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164.091} = 0.000072921158 \text{ (rad/sec)}$$

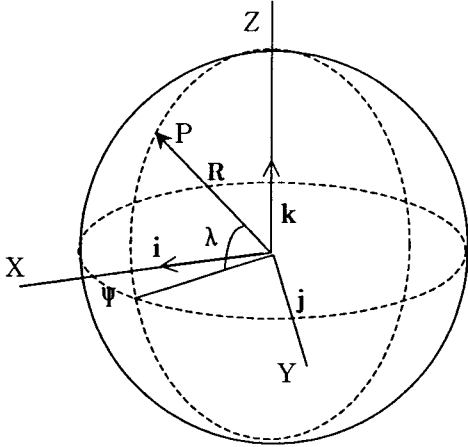
따라서 자유 자이로스코프는 지구상의 어느 위치에서든 위치에서도 식(1)으로 주어지는 시운동을 하게 된다.

* 회원, poscidon@mail.hhu.ac.kr 051)410-4305

** 종신회원, tgjeong@mail.hhu.ac.kr 051)410-4246

2.2 위치측정방정식 유도

지구를 구로 가정하고 지구 중심을 지나는 구 좌표계를 <Fig. 1>과 같이 우수좌표계를 설정한다. 즉, X축은 춘분점을 지나 천구와 만나는 선이고, Y축은 X축과 90°가 되며 천의 적도면을 지나고 선이다. 그리고 Z축은 지구의 회전축으로 천의 북극을 지난다. 각축의 단위벡터를 각각 i, j, k 라고 한다.



<Fig. 1> Spherical Coordinate

그러면 임의 위치 P점을 지나는 위치벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$R = R(i \cos \lambda \cos \psi + j \cos \lambda \sin \psi + k \sin \lambda)$$

단, λ 는 위도(적위)를 표시하며 ψ 는 춘분점으로부터 측정된 적경을 의미하며, 적절한 방법으로 환산하면 바로 경도를 구할 수 있게 된다. 이를 단위벡터로 표시하면 식(2)와 같다.

$$n = \frac{R}{R} \quad \text{---(2)}$$

$$= i \cos \lambda \cos \psi + j \cos \lambda \sin \psi + k \sin \lambda$$

1. 직교하는 두 개의 자유자이로스코프를 이용하는 경우

두 개의 자유 자이로스코프를 설치하는데 우선 한 대는 천구의 북극을 향하게 하고, 다른 한 대는 춘분점을 향하도록 설치한다. 따라서 두 개의 자이로스코프의 회전축(이하 '회전축'이라고 함)이 가리키는 성분의 단위 벡터는 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} g_1 &= k \\ g_2 &= i \end{aligned} \quad \text{---(3)}$$

1-1 지구가 자전하지 않는 경우

지구상 임의의 위치에서 지구 중력은 그 위치에서 위치벡터와 방향이 반대가 된다. 그래서 이 위치벡터와 회전축과의 사이 각, 다른 말로 로터축의 경사각을 구할 수 있다고 가정하고 그것을 각각 θ_1, θ_2 라고 하면 다음 식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= g_1 \cdot n = \sin \lambda \\ \cos \theta_2 &= g_2 \cdot n = \cos \lambda \cos \psi \end{aligned} \quad \text{---(4)}$$

여기서 두 개의 자이로스코프 벡터가 중력과 이루는 각을 알면 식 (4)에서 위도는 곧바로 구할 수 있고, 경도는 적경에 적절한 환산을 통하면 구할 수 있다.

1-2 지구의 자전을 고려한 경우

지구가 Ω 의 각속도로 자전하고 있고, $t = 0$ 에서 경도 0° 선이 춘분점과 DL_0 의 위상각을 가지고 출발한 경우의 임의의 점에서의 단위위치벡터는 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} n &= i \cos \lambda \cos \psi + j \cos \lambda \sin \psi + k \sin \lambda \\ \text{where, } \psi &= L_0 + DL_0 + \Omega t \end{aligned} \quad \text{---(5)}$$

여기서 L_0 는 경도이다.

또, 중력이 두 개의 자이로스코프와 이루는 각은 식 (6)과 같다.

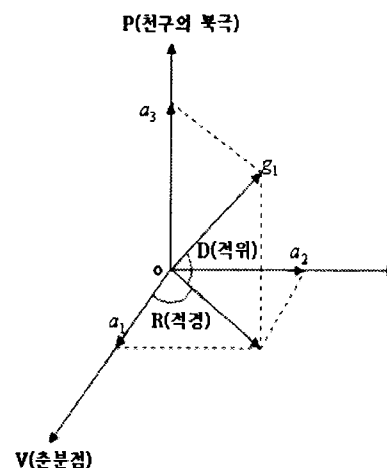
$$\begin{aligned} \cos \theta_3 &= g_1 \cdot n = \sin \lambda \\ \cos \theta_4 &= g_2 \cdot n = \cos \lambda \cos \psi \end{aligned} \quad \text{---(6)}$$

앞의 경우와 마찬가지로 중력과 자이로스코프가 이루는 각을 알면 위도와 경도를 구할 수 있다.

2. 임의의 방향을 가진 자유자이로스코프를 이용한 경우

두 개의 자이로스코프가 서로 다른 임의의 방향을 가리키고 있고, 그들의 단위벡터가 식 (7)과 같이 표시된다고 하자.

$$\begin{aligned} g_1 &= a_1 i + a_2 j + a_3 k \\ g_2 &= b_1 i + b_2 j + b_3 k \end{aligned} \quad \text{---(7)}$$



<Fig. 2> Declination and Right Ascension

이때에는 두 개의 자이로스코프와 중력이 이루는 각은 다음과 같이 된다. 바꾸어 말하면 이 두 개의 벡터는 두 개의 항성과 같은 역할을 하며 그 적위D(천구상에서 천구의 적도를 기준으로 한 별의 위도)와 적경R(천구상에서 춘분점을 기준으로 한 별의 경도)은 <Fig. 2>와 같이 표시할 수 있다.

$$R = \tan^{-1} \frac{a_2}{a_1} \quad \text{-----}(8)$$

$$D = \tan^{-1} \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

그리고 단위위치벡터가 회전축과 이루는 각은 각각 식 (9)로 표시된다.

$$\begin{aligned} \cos \theta_5 &= \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{n} \\ &= a_1 \cos \lambda \cos \psi + a_2 \cos \lambda \sin \psi \\ &\quad + a_3 \sin \lambda \\ \cos \theta_6 &= \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{n} \quad \text{-----(9)} \\ &= b_1 \cos \lambda \cos \psi + b_2 \cos \lambda \sin \psi \\ &\quad + b_3 \sin \lambda \\ &\text{where, } \psi = L_0 + DL_0 + \Omega t \end{aligned}$$

식 (9)에서 회전축의 벡터를 표시하는 a_1, a_2, a_3 와 b_1, b_2, b_3 를 모르기 때문에 이를 먼저 구하여야 한다. 이것은 다음과 같은 방법으로 구한다. 위치를 알고 있는 곳에서 가동중인 자이로스코프가 있다고 하자. 그러면 위도 λ , 경도 L_0 , 춘분점과 경도 0° 사이의 위상각 DL_0 를 알고 있으므로 시간차를 두고 세 번 이상 위치벡터와 회전축벡터와의 사이각 θ_5, θ_6 를 각각 측정한다. 다음에 식 (10)과 (11)의 연립방정식을 풀면 각각 회전축 벡터의 성분 a_1, a_2, a_3 과 b_1, b_2, b_3 를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_{51} \\ \cos \theta_{52} \\ \cos \theta_{53} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \psi_1 & \cos \lambda \sin \psi_1 & \sin \lambda \\ \cos \lambda \cos \psi_2 & \cos \lambda \sin \psi_2 & \sin \lambda \\ \cos \lambda \cos \psi_3 & \cos \lambda \sin \psi_3 & \sin \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{-----}(10)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_{61} \\ \cos \theta_{62} \\ \cos \theta_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda \cos \psi_1 & \cos \lambda \sin \psi_1 & \sin \lambda \\ \cos \lambda \cos \psi_2 & \cos \lambda \sin \psi_2 & \sin \lambda \\ \cos \lambda \cos \psi_3 & \cos \lambda \sin \psi_3 & \sin \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{-----}(11)$$

여기서 적경 ψ_1, ψ_2, ψ_3 과 경사각 $\theta_{51}, \theta_{52}, \theta_{53}$ 그리고 $\theta_{61}, \theta_{62}, \theta_{63}$ 는 각각 시간 t_1, t_2, t_3 에서 측정한 값이다.

이렇게 구한 회전축 벡터는 변하지 않으므로 이번에는 역으로 임의의 시각에서 회전축 사이각이 구해지면 식 (9)가 비록 비선형방정식이지만 이 식에서 그 임의의 점에서의 위치인 위도 λ 는 곧바로 구하고, 경도는 적경 ψ 로부터 구할 수 있다. 그것은

다음과 같은 방법으로 선형화시켜 구한다. 위도와 적경을 식 (12)와 같이 분해한다.

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \Delta \lambda \\ \psi &= \psi_0 + \Delta \psi \quad \text{-----}(12) \end{aligned}$$

그러면 함수 $f(\lambda, \psi)$ 는 함수 $f(\lambda_0 + \Delta \lambda, \psi_0 + \Delta \psi)$ 로 나타낼 수가 있다. 이것을 테일러급수로 전개하면 다음과 같이 표현할 수 있다[G. B. Thomas & R. L. Finney, 1983].

$$\begin{aligned} f(\lambda, \psi) &\equiv f(\lambda_0 + \Delta \lambda, \psi_0 + \Delta \psi) \\ &= f(\lambda_0, \psi_0) + \frac{\partial f(\lambda_0, \psi_0)}{\partial \lambda_0} \Delta \lambda \\ &\quad + \frac{\partial f(\lambda_0, \psi_0)}{\partial \psi_0} \Delta \psi + \dots \end{aligned}$$

이 테일러급수에서 1차항까지 사용하면 근사적으로 선형화시킬 수 있다. 식 (9)를 위도 λ_0 , 적경 ψ_0 의 함수로 바꾸면 식 (13)과 같다.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_0, \psi_0) &= a_1 \cos \lambda_0 \cos \psi_0 + a_2 \cos \lambda_0 \sin \psi_0 + a_3 \sin \lambda_0 \\ f_2(\lambda_0, \psi_0) &= b_1 \cos \lambda_0 \cos \psi_0 + b_2 \cos \lambda_0 \sin \psi_0 + b_3 \sin \lambda_0 \end{aligned} \quad \text{-----}(13)$$

식 (13)을 λ_0, ψ_0 로 각각 편미분하면 식 (14)와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\lambda_0, \psi_0)}{\partial \lambda_0} &= -a_1 \sin \lambda_0 \cos \psi_0 - a_2 \sin \lambda_0 \sin \psi_0 + a_3 \cos \lambda_0 \\ &= a \Lambda \\ \frac{\partial f_1(\lambda_0, \psi_0)}{\partial \psi_0} &= -a_1 \cos \lambda_0 \sin \psi_0 + a_2 \cos \lambda_0 \cos \psi_0 \\ &= a \Psi \\ \frac{\partial f_2(\lambda_0, \psi_0)}{\partial \lambda_0} &= -b_1 \sin \lambda_0 \cos \psi_0 - b_2 \sin \lambda_0 \sin \psi_0 + b_3 \cos \lambda_0 \\ &= b \Lambda \\ \frac{\partial f_2(\lambda_0, \psi_0)}{\partial \psi_0} &= -b_1 \cos \lambda_0 \sin \psi_0 + b_2 \cos \lambda_0 \cos \psi_0 \\ &= b \Psi \end{aligned} \quad \text{-----}(14)$$

그리하여 연립방정식을 구성하면 식 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} \cos \theta_5 - f_1(\lambda_0, \psi_0) &= a \Lambda \cdot \Delta \lambda_0 + a \Psi \cdot \Delta \psi_0 \\ \cos \theta_6 - f_2(\lambda_0, \psi_0) &= b \Lambda \cdot \Delta \lambda_0 + b \Psi \cdot \Delta \psi_0 \end{aligned} \quad \text{-----}(15)$$

이를 다시 행렬로 표시하면 식 (16)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_5 - f_1(\lambda_0, \psi_0) \\ \cos \theta_6 - f_2(\lambda_0, \psi_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \Lambda & a \Psi \\ b \Lambda & b \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \Delta \psi \end{bmatrix} \quad \text{-----}(16)$$

식 (16)으로 몇 차례를 반복하면 정확한 $\Delta \lambda, \Delta \psi$ 를 얻을 수 있으므로 이에 따라 λ_0, ψ_0 도 구해지므로 위도와 적경을 구할 수 있게 된다. 이렇게 구한 적경을 간단히 환산하면 경도를 구할 수 있다.

3. 자유 자이로스코프의 위치측정방정식에 대한 문제점 검토

앞에서 위치 측정방정식의 유도과정을 살펴보았다. 이 방정식으로 위치를 구하려고 하면 다음의 조건을 만족하여야 한다. 우선 위치벡터와 자이로 회전축 사이의 각 즉 경사각을 측정하

는 장치가 있어야 한다. 다행히도 요즘의 개발되는 수직방향 자이로(vertical gyro)를 이용하면 가능할 것이다. 다른 하나는 경도 계산에는 정확한 시계와 함께 지구 자전 각속도의 값을 어느 것으로 사용할 것인가이다. 시계는 통상적인 수정시계라도 그 정확도가 극히 높으니 크게 문제될 것은 없는 것으로 보인다. 지구의 자전 각속도의 경우는 이 연구에서는 항성일을 기준으로 한 것을 제시하고 있지만, 보다 정확한 자전 각속도가 요구된다. 다른 문제로는 위치 측정방정식을 유도할 때 지구를 구라고 가정하였는데 지구의 모습을 보다 잘 표현하고 있는 것이 WGS 84에서 정한 회전타원체이므로 이것에 따라 위치벡터는 수정이 되어야 한다.

가장 큰 문제점으로는 이 연구에서 제안된 위치측정방정식으로는 고도를 측정할 수 없는 점이다. 별도의 고도 측정 방식이 고려되어야 할 것이다.

4. 결론

이 연구에서는 두 개의 자유 자이로스코프의 경사각을 이용하여 위치를 측정하는 방정식을 도출하였는데 그 결과는 다음과 같다.

① 가동 중인 두 자이로스코프 회전축의 단위벡터는 식 (10)과 식 (11)으로 각각 구할 수 있다.

② 일단 자이로 회전축의 단위벡터가 구해지면 식 (16)을 여러 번 반복 계산하면 정확한 위치와 경도를 구할 수 있다.

이 두 개의 자유 자이로스코프를 이용한 위치 측정방식에는 앞에서 말한 언급한 몇 가지 조건을 만족하여야 한다. 아울러 이를 실제에 적용하기 위하여서는 제작하여 그 오차를 검정하여야 할 것이다. 이들에 대하여서는 추후의 연구로 남긴다.

참고문헌

- [1] A. Frost(1982), "Marine Gyro Compasses for Ships' Officers", Brown, Son & Ferguson Ltd, p.10.
- [2] George B. Thomas & Ross L. Finney(1983), "Calculus and Analytic Geometry", Addison-Wesley, p.644.
- [3] James B. Scarborough(1958), "The Gyroscope Theory and Applications", University Press, Cambridge, p124.