무요소절점법을 이용한 부유식 구조물의 회절 및 방사문제 해석

Element-Free Galerkin Method for the Analysis of Diffraction and Radiation Problems of Floating Breakwaters

이정우*, 조원철**

Jeongwoo Lee, Woncheol Cho

요 지

본 연구에서는 요소를 사용하지 않고 절점들만을 이용하여 해석이 가능한 수치기법인 무요소절점법(element-free Galerkin method)의 개념을 선형파의 회절 및 방사문제에 적용하는 방법에 대해 연구하였다. 파동장에 놓인 부유식 구조물에 의한 연직 2차원 경계치 문제를 해석 대상으로 하였고, 파랑과 구조물의 상호작용을 해석함에 있어 구조물에 작용하는 동유체력과 이로 인한 구조물의 동적응답을 계산하기 위해서 무요소절점법을 이용하였다. 무요소절점법의 수식화과정을 체계적으로 정리하였으며, 무요소절점법의 타당성 및 적용성을 입증하기 위해서 직사각형 부유체에 대한 수치해석을 실시하여 타 논문의 결과와 비교하였다. 또한 해의 정확도에 직접적으로 영향을 미치는 절점간격과 파수와의 관계에 대한 기준 설정을 위한 수치실험도 수행하였다.

핵심용어 : 무요소절점법, 부유식 구조물, 회절, 방사

1. 서 론

부유식 구조물로 인한 파랑의 회절 및 방사문제를 해석하기 위해서 Green 함수를 이용하는 경계적분방정식법과 유한요소법을 오래 전부터 많이 사용해왔다. 그러나, 전자는 유일해가 존재하지 않는 특이진동수가 존재하는 것으로 알려져 있고 날카로운 모서리를 갖는 구조물을 모형화하는데 문제점이 있으며, 후자의 경우에는 해석 영역 및 구조체의 기하학적 형상을 구현하기 위해서 계산과정 이전에 격자망을 구성하는 선처리 작업이 상당량 요구된다. 특히 본 연구에서와 같이 부유식 구조물의 동적응답거동은 폭이나 흘수, 그리고 단면형상 등에 크게 좌우되므로, 기하학적 형상을 쉽게 바꿀 수 있는 수치기법을 이용하면 수치해석을 위한 이산화과정을 보다 용이하게 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 요소를 사용하지 않고 절점들만을 이용하여 해석이 가능한 수치해석기법인 무요소절점법 중 하나인 EFG법(element-free Galerkin method)을 이용하여 선형파의 회절 및 방사문제를 해석할 수 있는 전산프로그램을 개발하였다. EFG법은 Nayroles 등(1992)에 의해서 처음으로 고안되었으며 초창기에는 DEM(diffuse element method)로 불리웠다. Belytschko 등(1994)이 형상함수의 도함수를 고려하여 수치해의 정도를 높여 Nayroles 등(1992)의 방법을 개선함으로써 본격적으로 EFG 수치기법이 부각되기 시작하였다. 이 방법의 주된 장점은 요소가 필요없고, 선후처리 작업이 용이한 점이다. 이와 같은 잇점 때문에 균열전진해석 등 고체역학 분야에서 활발히 이용되고 있다(Belytschko 등 1994, 1996). 본 논문에서는 부유식 구조물과 파랑간 상호작용해석을 위해 EFG법을 도입하여 수치모형을 개발하였으며, 이 모형의 타당성 및 적용성을 입증하기 위해서 연직 2차원 부유식 구조물의 동수역학적 거동에 관한 수치해석을 수행하였다. 또한, 해의 정확도에 직접적으로 영향을 미치는 영향영역의 크기, 절점간격과 파수와의 관계에 대한 수치실험을 수행하여 정도 높은 해를 얻기 위한 기준을 제시하였다.

* 정회원・연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정・E-mail : ljw007@yonsei.ac.kr
** 정회원・연세대학교 사회환경시스템공학부 토목전공 교수・E-mail : woncheol@yonsei.ac.kr

2. 지배방정식 및 경계조건

파고가 H, 진동수가 ω인 규칙파가 수심 d에 위치한 부유체에 β의 입사각을 가지고 입사할 경우의 회절 및 방사문제를 수식화하기 위하여 원점이 정수면에 위치하고 z축을 연직상향으로 하는 직교좌표계를 사용하였다. 유체의 성질을 비점성, 비압축 그리고 유체입자의 운동을 비회전으로 가정하면, 유동장은 다음과 같이 Lacplace 방정식을 만족하는 속도포텐셜 Φ로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2\Phi(x,y,z,t)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

또한 구조물의 운동을 좌우운동(sway), 상하운동(heave) 및 횡동요(roll) 등 세 방향의 조화운동으로 나타내고, 입사파고 및 구조물의 거동이 미소하다는 가정을 하면 선형중첩원리의 의해 다음 식(2)와 같이 속도포텐셜은 입사파 성분 Φ_0, 회절파 성분 Φ_4, j방향 운동과 관련된 방사파 성분 Φ_j의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\Phi=\Phi_0+\Phi_4+\sum_{j=1}^{3}\Phi_j \tag{2}$$

x,y 방향으로 정현함수형태의 규칙파가 입사할 경우의 각 성분파는 식(3)~(5)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\Phi_0(x,y,z,t) &= \mathrm{Re}\left[-\frac{\mathrm{i}gH}{2\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh(kd)}\exp\mathrm{i}(kx\cos\beta+ky\sin\beta-\omega t)\right]\\ &= \mathrm{Re}\left[-\frac{\mathrm{i}gH}{2\omega}\phi_0(x,z)\exp\mathrm{i}(\nu y-\omega t)\right]\end{aligned} \tag{3}$$

$$\Phi_4(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[-\frac{\mathrm{i}gH}{2\omega}\phi_4(x,z)\exp\mathrm{i}(\nu y-\omega t)\right] \tag{4}$$

$$\Phi_j(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[-\mathrm{i}\omega\xi_j\phi_j(x,z)\exp\mathrm{i}(\nu y-\omega t)\right], \qquad j=1,2,3 \tag{5}$$

여기서 Re는 실수부, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, k는 파수, t는 시간, ϕ_i는 복소수 형태의 무차원 성분파(단, $i=1,2,3,4$), ξ_j는 물체의 j 방향 복소진폭, 그리고 $\nu=k\sin\beta$ 이다. 각 성분파는 Laplace 방정식을 만족하므로, 회절파 및 방사파에 의한 유동장은 식(6)과 같이 수정 Helmholz 방정식에 의해 지배된다.

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_i}{\partial z^2}-\nu^2\phi_i=0\ , \qquad i=1,2,3,4 \tag{6}$$

정수면(S_F), 유동장의 바닥면(S_D), 물체의 표면(S_B), 그리고 무한경계면(S_R)에서의 경계조건은 다음과 같이 부여하였다.

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial z}=\frac{\omega^2}{g}\phi_i \qquad i=1,2,3,4 \qquad \text{on}\ \ S_F \tag{7}$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial z}=0 \qquad i=1,2,3,4 \qquad \text{on}\ \ S_D \tag{8}$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial n}=n_i\ (i=1,2,3), \qquad \frac{\partial\phi_i}{\partial n}=-\frac{\partial\phi_0}{\partial n}\ \ (i=4) \qquad \text{on}\ \ S_B \tag{9}$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial x}=\pm\mathrm{i}k\cos\beta\phi_i \qquad i=1,2,3,4 \qquad \text{on}\ \ S_R \tag{10}$$

여기서 n_i는 유체내부로 향하는 법선벡터의 각 방향 성분과 관련된 값으로 n_1, n_2는 x,z 방향 성분이고 $n_3=(z-e)n_1-x\,n_2$이며 $(0,e)$는 물체의 횡동요 중심점이다. 물체 표면 및 유동장 임의의 위치에서의 동압력은 선형화된 Bernoulli 방정식으로부터 계산되며, 구조물에 작용하는 전파력은 물체 표면에서의 압력을 적분함으로써 구할 수 있다. 물체의 좌우, 상하, 횡동요로 인한 각 성분별 변위는 운동방정식(equation of motion)을 풀어 구하였으며 이 때 운동방정식에 포함된 부가질량, 감쇄계수, 기진력은 EFG법으로 경계치 문제를 해석하여 산정하였고, 계류선의 복원력은 선형스프링으로 모형화하여 Sannasiraj 등 (1998)이 제시한 계류선의 강성행렬을 사용하였다.

3. 회절 및 방사문제 해석을 위한 무요소법의 정식화

3.1 EFG법에 의한 근사속도포텐셜함수

EFG법에서는 이동최소제곱근사법(Moving Least Square Approximation)을 사용하여 형상함수를 유도한다. 이동최소제곱근사법에 의한 근사속도포텐셜함수 ϕ^h는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\phi^h(\boldsymbol{x}) = \sum_j^{n_{sn}} \sum_i^m p_i(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))_{ij}\phi_j^h = \sum_j^{n_{sn}} N_j(\boldsymbol{x})\phi_j^h \tag{11}$$

여기서, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_j^n w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_j)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_j), \cdots, w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_n)$이며, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$는 m개의 항을 갖는 다항식 벡터, 가중함수 $w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)$는 기준점 $\boldsymbol{x}$를 중심으로 일정한 크기의 영향영역내에 포함된 n_{sn}개 절점 $\boldsymbol{x}_j$가 갖게 되는 거리에 따른 가중치를 결정해 주는 가중함수이며, ϕ_j^h는 절점 $\boldsymbol{x}_j$의 속도포텐셜값이다. 따라서 어느 기준점 $\boldsymbol{x}$를 중심으로 일정한 크기의 영향영역내에 위치하는 임의의 j 번째 절점의 형삼함수 $N_j(\boldsymbol{x})$은 식 (12)와 같이 정의된다.

$$N_j(\boldsymbol{x}) = \sum_i^m p_i(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))_{ij} \tag{12}$$

3.2 영향영역과 가중함수의 설정

EFG법을 이용하여 수치해를 구할 때, 해의 정도를 좌우하는 중요한 요소는 영향영역과 가중함수를 결정하는 일이다. 영향영역은 일반적으로 원이나 사각형의 형태를 취하며, 영향영역내에는 적절한 갯수의 절점이 포함되도록 해야 수치해의 정도를 보장하면서 동시에 빠른 계산을 수행할 수 있다. 무요소법의 정식화를 위한 또 하나의 중요한 요소는 가중함수를 결정하는 일이다. 가중함수 $w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)$는 임의의 절점 $\boldsymbol{x}_j$가 기준점 $\boldsymbol{x}$에 가까울수록 커지고 반대로 멀어질수록 작아지며, 영향영역밖에 위치할 경우에는 그 값이 0이 되는 특성을 갖고 있다. 본 연구에서는 지수함수형태인 Gaussian 가중함수를 사용하였으며 절점의 밀도에 따라 크기를 적절히 변화시킬 수 있는 원형형태의 영향영역과 함께 선형다항함수를 사용하여 EFG법에 의한 정식화 과정을 수행하였다.

3.3 이산방정식 구성

EFG법에서도 유한요소법의 경우와 마찬가지로 지배방정식을 약형식(weak form)으로 표현한 뒤 이를 이산화하여 Galerkin에 따라 선형시스템방정식을 유도해낸다. 다만 필수경계조건의 처리를 위해 추가의 구속조건식이 추가되기 때문에 정식화과정을 통한 최종 시스템방정식의 구성은 유한요소법과 다소 다른 형태를 갖게 된다. 그러나, 본 연구의 경우 경계조건에서 필수경계조건이 없기 때문에 위와 같은 추가적인 구속조건은 필요 없다. 지배방정식 (6)을 약형식으로 표현하면 식(13)과 같으며, Ω는 해석영역, S는 경계부 그리고 $\delta\phi$는 test 함수이다.

$$\int_\Omega (\partial_i\phi\,\partial_i\delta\phi + \nu^2\phi\,\delta\phi)\,d\Omega - \int_{S_F}\phi\,\delta\phi\,dS \mp ik\cos\beta\int_{S_R}\phi\,\delta\phi\,dS = \int_{S_B}\frac{\partial\phi}{\partial n}\delta\phi\,dS \tag{13}$$

$$\phi^h = \sum_{i=1}^n = N_i\phi_i = \boldsymbol{N}^T\boldsymbol{\phi} \tag{14}$$

식(13)에 식(14)로 표현된 근사속도포텐셜을 대입하면 식(15)과 같은 선형대수방정식을 얻게 된다.

$$[\boldsymbol{K}^1 + \boldsymbol{K}^2 + \boldsymbol{K}^3]\{\boldsymbol{\phi}\} = \{\boldsymbol{P}\} \tag{15}$$

여기서 $[\boldsymbol{K}^1] = \int_\Omega \{(\nabla\boldsymbol{N})(\nabla\boldsymbol{N})^T + \nu^2\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^T\}d\Omega$, $[\boldsymbol{K}^2] = -\frac{\omega^2}{g}\int_{S_F}\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^T dS$,

$[\boldsymbol{K}^3] = \mp ik\cos\beta\int_{S_\infty}\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^T dS$, $\{\boldsymbol{P}\} = -\int_{S_B}\boldsymbol{N}\frac{\partial\phi_0}{\partial n}dS$ 또는 $\{\boldsymbol{P}\} = -\int_{S_B}\boldsymbol{N}n_j\,dS$

이다.

위의 행렬식에서 적분을 수행하기 위해서 대상영역을 가상의 셀로 나누고, 각 셀별로 Gauss 적분

점을 분포시켜 수치적분을 수행한다. 각 적분점을 기준으로 한 영향영역내의 절점을 이용하여 적분점별 형상함수를 구하고 다시 셀별로 조합하여 전체영역의 형상함수를 구할 수 있다.

4. 수치해석 및 결과분석

4.1 수치모형의 검증

EFG 기법을 이용한 수치모형의 타당성을 검증하기 위해서 Sannasiraj 등(1998)의 연구결과와 비교하였다. 수심이 2.35m인 파동장에 놓인 부유식 구조물은 폭이 0.4 m이고, 흘수가 0.1m인 직사각형 단면형을 가지고 있으며 길이 4.7m인 4개의 계류라인에 의해 구속된 상태이다. 파랑조건으로서 파고가 0.05m, 진동수는 0.3~1.5 Hz를 부여하였다. 파동장 계산을 위한 대상영역내 절점은 등간격으로 분포된 3,616개의 내부 절점과 258개의 경계부 절점을 사용하였고, 절점사이 간격은 0.05m로 하였다. 그림 2 ~ 그림 5에서는 본 연구에서 개발한 수치모형을 이용하여 계산한 각방향 응답진폭인 RAO(responses of amplitude operators)와 파랑의 투과계수(K_T)를 Sannasiraj 등(1998)의 실험 및 수치해석 결과와 함께 보여주고 있다. 그림에서 보이는 바와 같이 수치해석값은 실험값을 비교적 잘 반영하고 있으며, 특히 수치해석 결과는 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

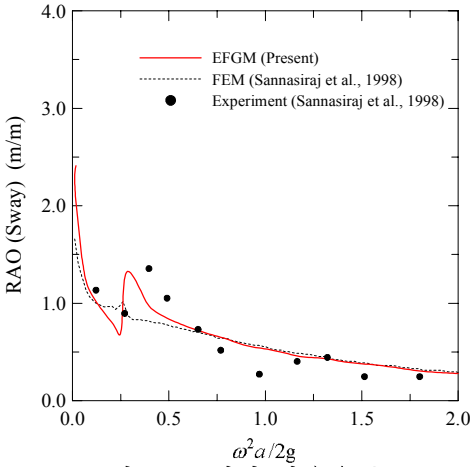


그림 2. 물체의 좌우운동 RAO

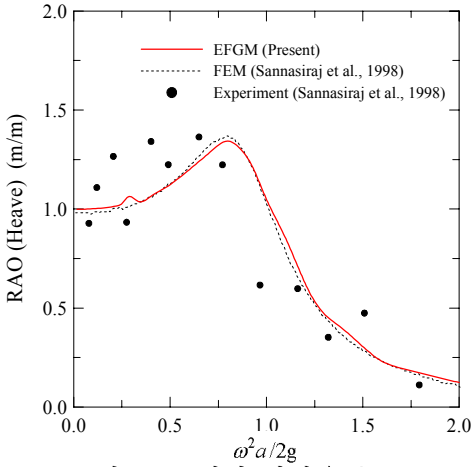


그림 3. 물체의 상하운동 RAO

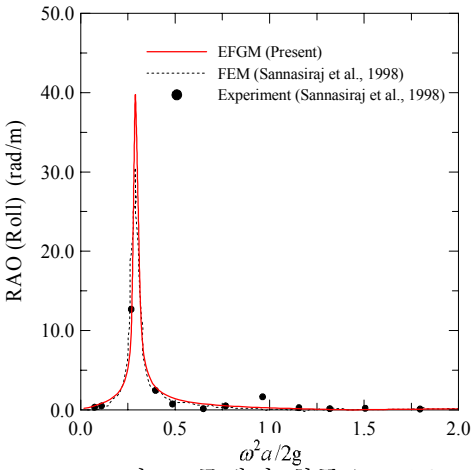


그림 4. 물체의 횡동요 RAO

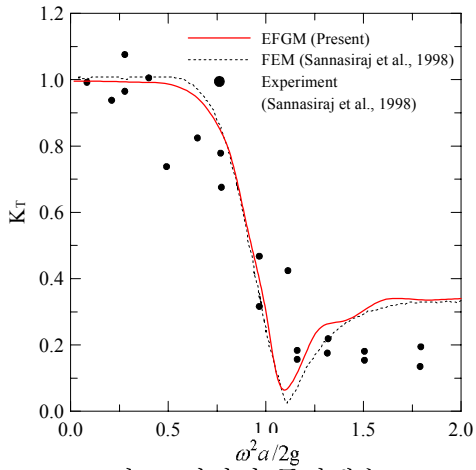
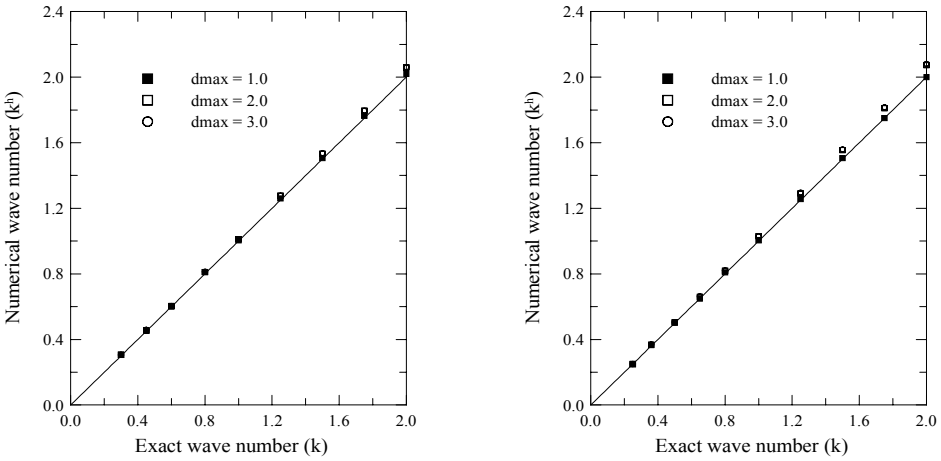


그림 5. 파랑의 투과계수

4.2 EFG 이산화의 영향분석

EFG법에서는 영향영역의 크기나 절점의 간격 및 분포 등을 적절하게 설정해 주어야 정확해에 가까운 수치해를 얻을 수 있다. 따라서 본 절에서는 EFG 이산화 정도가 해의 정확도에 미치는 영향을 시험하기 위해서 폭 2m, 흘수 1m, 폰툰간격이 2m인 두 개의 사각형 단면을 가진 이중 폰툰식 부유체를 대상으로 수치실험을 수행하였다. 파랑조건으로서 파고 1m, 파수(k)는 0.3~2.0m^{-1}인

규칙파가 수심 5m에 위치한 고정된 부유체에 직각으로 입사하는 조건을 부여하였다. 해석영역내에 절점을 등분포시키고 절점간격, 영향영역크기, 그리고 파수를 변화시켜가면서 속도포텐셜 및 자유수면을 계산하였다. 수치해로부터 공간에 따른 자유수면(wave profile)을 도시하고 이로부터 수치해의 파수(k^h, numerical wave number)를 계산하여 주어진 정확한 파수(k, exact wave number)와 비교하여 그림 6에 도시하였다. 그림에서 $d_{\max}$는 영향영역의 크기를 조절하는 파라메터이다. 영향영역이 클수록 그리고 파수가 증가할수록 이산화로 인한 수치오차로 인해서 정확해와 수치해 사이에 편차가 점차 증가하는 것을 볼 수 있다. 또한 절점간격이 작은 경우가 이산화로 인한 수치오차가 상대적으로 작았으며, 그림 6(a)에서 파수가 약 $1.0\mathrm{m}^{-1}$, (b)에서 약 $0.5\mathrm{m}^{-1}$ 인 경우와 같이 각각의 경우 수치오차가 거의 발생하지 않은 한계점이 존재하였다. 따라서 영향영역의 크기에 관계없이 정도가 높은 수치해를 얻기 위한 타당한 조건을 절점간격과 파수를 곱하여 $kh \cong 0.25$ 이하의 값을 유지하도록 이산화과정을 수행해야 할 것으로 판단된다.



(a) $h = 0.25\,\mathrm{m}$ (b) $h = 0.5\,\mathrm{m}$

그림 6. 이산화가 해의 정도에 미치는 영향

5. 결 론

본 연구에서는 무요소절점법(EFG법)을 이용하여 부유식 구조물로 인한 선형파의 회절 및 방사 문제를 해석할 수 있는 전산프로그램을 개발하고 그 타당성을 입증하였으며, 예제해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) EFG법의 파라메타인 영향영역의 크기, 절점간격 등은 수치해의 정도에 민감한 영향을 미치는 것으로 분석되었고, 수치실험을 통하여 EFG 이산화로 인한 수치오차를 줄이기 위하여 적절한 파수와 절점간격의 관계에 대한 기준을 $kh \cong 0.25$로 제시하였다.

(2) 부유식 구조물로 인한 파의 회절 및 방사 경계치문제를 해석하기 EFG법 기반의 수치모형은 구조물의 설계단계에서 형상, 폭, 흘수 등의 구조물의 최적형상을 결정하기 위한 모의실험에서 기존의 수치기법의 대안으로 활용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Belytschko, T., Lu. Y.Y., and Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37: 229-256.
2. Belytschko, T., and Tabbara, M. (1996). Dynamic fracture using element-free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39: 923-938.
3. Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics, 10: 307-318.

4. Sannasiraj, S.A., Sundar, V., and Sundaravadivelu, R. (1998). Mooring forces and motion responses of pontoon-type floating breakwaters. Ocean Engineering, 25 (1): 27-48.