

불확실성을 고려한 비선형 수문현상의 해석

The Analysis of Nonlinear Hydrologic Phenomenon with Uncertainty

장수형*, 김상단**, 윤용남***

Su Hyung Jang, Sangdan Kim, Yong Nam Yoon

요 지

본 연구에서는 비선형적인 메커니즘을 갖는 수문현상의 불확실성을 해석하고자 하는 목적으로 새로운 개념의 지배방정식이 유도된다. 제안된 모형의 불확실성은 토양 특성치의 공간적 변동성에 기인하고 있는 것으로 가정하여, 유도된 방정식은 Fokker-Planck 방정식의 형태를 가지고 있다. 실제 유역단위에서 토양 내 수분 흐름의 연직방향 흐름을 모의하기 위해 미소단위에서 유도된 Richards 방정식은 토양의 공간적 변동성으로 말미암아 불확실한 매개변수를 갖는 비선형 추계학적 편미분방정식의 형태를 갖게 된다. 이는 먼저 수직 방향적분을 통하여 단순화된 비선형 추계학적 상미분방정식으로 전환되고, 이렇게 전환된 비선형 추계학적 상미분방정식은 다시 추계학적 Liouville 방정식을 이용하여 선형 추계학적 편미분방정식으로 전환되어진다. 최종적으로 cumulant 급수방법을 이용하여 상기 방정식을 선형 결정론적 편미분방정식으로 전환시킴으로써, 강우 시 토양 내 수분 침투현상을 모형화할 경우 유역단위에서 토양의 공간적 변동성을 설명할 수 있는 지배방정식을 유도할 수 있다.

핵심용어 : 단위상승, 침투, Cumulant 급수, Fokker-Planck 방정식

1. 서 론

지금까지 수문현상 모형화의 주된 흐름은 결정론적 방법에 입각하여 자연계를 각각의 균질한 입자들로 구성된 시스템으로 정의한 후 모의를 수행하는 방향으로 이루어져 왔다. 이는 Newton 이래로 정립된 현대 물리학의 기본 토대가 균질한 입자 혹은 균질한 매질에서의 지배방정식으로서 미분방정식을 구성한 후, 이를 푸는 방향으로 발전해왔기 때문이기도 하다. 그러나, 실제 자연계, 특히 수문학자들이 관심을 기울이고 있는 유역단위의 시스템은 균질하다기보다는 오히려 혼돈상태에 가까울 정도의 이질성을 보여주고 있으며, 이러한 이질성은 수문현상의 해석에 불확실성을 내재시키고 있다. 수문현상의 입력자료인 강우는 대표적인 시공간적 변동성을 갖고 있는 변수이며, 강우에 대한 반응이 일어나는 시스템인 유역은 공간적으로 상이한 토양특성을 보이고 있기 때문에 유역평균적인 수문현상의 예측을 더욱 어렵게 하고 있다. 또한 상기 설명한 이질성으로 인한 수문 모형화의 어려움에 덧붙여서, 수문현상의 비선형성은 적절한 유역 평균적인 수문현상의 예측을 더 더욱 어렵게 만들고 있다. 실제로 유역의 이질성을 고려한 수문해석을 시도한 여러 연구논문들의 대부분은 수학적 해석의 어려움 때문에 수문현상을 선형적으로 가정하여 연구를 수행하여 왔다 (예를 들어 Indelman 과 Dagan, 1993 외 다수논문). 이러한 선형화 가정은 당연히 자연현상을 과도하게 단순화시키게 되며, 이에 따라 고안된 모형의 적용 범위가 한정적일 수밖에 없다는 한계에 도달하게 된다.

* 정회원·고려대학교 사회환경시스템공학과 박사과정수료·E-mail : angel452@korea.ac.kr

** 정회원·경기개발연구원 환경정책연구부 책임연구원·E-mail : skim@kri.re.kr

** 정회원·고려대학교 사회환경시스템공학과 교수·E-mail : ynyoon@korea.ac.kr

이에 본 연구에서는 비선형적인 메커니즘을 갖는 수문현상의 이질성으로 인한 불확실성을 해석하는 것을 목적으로 하는 새로운 개념의 지배방정식을 도출해 보고자한다. 즉, 기존에 범용되고 있는 균질한 매질의 미소단위에서 유도된 기본 지배방정식을 바탕으로 이를 이질적인 매질의 유역단위에서 적용 가능한 지배방정식으로 단위상승하는 기법을 유도한 후, 침투현상을 단위상승된 지배방정식의 적용 예로서 나타내고자 한다.

2. 지배방정식의 단위상승

균질한 매질의 미소단위에서 유도된 지배방정식의 기본 형태는 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\frac{\partial H(x, t)}{\partial t} = n(H, A, f, x, t) \quad (1)$$

여기서, H 는 시스템의 상태 벡터이고, A 는 시스템의 매개변수 벡터, f 는 시스템에 주어지는 외력벡터, x 와 t 는 각각 공간 및 시간 좌표계를 의미한다. 그리고, 함수 n 는 수문현상을 지배하는 모형이라고 할 수 있으며, 선형인 경우도 있고 또한 비선형인 경우도 가능하다. 예를 들어, 하천에서 오염물질이 이송 확산되는 수문현상의 미소단위 기본 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d}{dx}(vc) + \frac{d}{dx}\left(D\frac{dc}{dx}\right) \quad (2)$$

여기서, $c(x, t)$ 는 오염물질 농도로서 식 (1)의 H 에 대응하며, $v(x, t)$ 와 $D(x, t)$ 는 각각 유속 및 확산계수로서 식 (1)의 A 에 대응한다. 따라서, 이 경우 함수 n 는 다음과 같이 표현된다.

$$n(c, v, D, x, t) = \frac{d}{dx}(vc) + \frac{d}{dx}\left(D\frac{dc}{dx}\right) \quad (3)$$

식 (2)의 경우에는 특별한 외력 항 f 를 갖고 있지 않으며, 함수 n 는 선형임을 알 수 있다. 실제 하천에서 오염물질이 이송 확산되는 수문현상을 모의하고자 할 때, 즉 편미분방정식 (2)을 풀고자 할 때, 모형의 매개변수 $v(x, t)$ 와 $D(x, t)$ 는 사전에 반드시 추정되어야 한다. 이 때, 하천의 유속 및 확산계수는 계측의 시공간적 한계 및 자연현상의 불확실성으로 말미암아 단일한 값으로 추정될 수 없으며, 따라서 우리가 얻을 수 있는 최대한의 정보는 시간 t 및 위치 x 에서 유속 및 확산계수의 평균(유속의 경우 $\langle v(x, t) \rangle$, 여기서 $\langle \cdot \rangle$ 는 평균연산자)은 얼마이며, 또한 평균을 중심으로 한 불확실성은 대략 얼마인지에 관한 정도 일 것이다. 이러한 경우와 같이 자연현상을 모의하고자 할 때, 모형 매개변수의 불확실성 때문에 전통적인 편미분방정식의 해법으로는 자연현상을 올바르게 해석할 수 없으며 따라서 새로운 해석 방법이 필수적으로 요구된다고 말할 수 있다. 불확실한 매개변수 값을 갖는, 다시 말해서 매개변수가 단일한 값을 갖지 않고 어떤 확률분포의 형태로 주어지는 경우의 문제를 해결하기 위해 본 연구에서 착안한 기본개념은 실제공간상에서 문제의 해법에 접근하는 것이 아니라 확률공간상에서 해를 구하는 방법이라고 할 수 있다. 즉, 추계학적 Liouville 방정식(Kubo, 1963)을 사용하여 식 (1)은 다음과 같이 전환될 수 있다.

$$\frac{\partial \rho(H, x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial H_i} n_i(H, A, f, x, t) \cdot \rho(H, x, t) \quad (4)$$

여기서, ρ 는 확률공간상에서 H 의 밀도이다. 여기서 아래첨자 i 는 Einstein 표시법을 의미한다. 여기서 주목할 사항으로 식 (4)에는 어떠한 비선형성도 포함되어 있지 않다는 점이다. 즉, 식 (1)이 비선형 추계학적 편미분방정식의 형태를 가지고 있다 하더라도, 추계학적 Liouville 방정식을 이용한 해 공간의 전환(실제 공간 \Rightarrow 확률공간)을 통하여 상태변수가 H 에서 ρ 로 바뀔 때 따라 식 (4)은 선형 추계학적 편미분방정식의 형태를 갖게되는 것이다. 식의 구조의 선형성은 수문현상의 확률적 거동의 해석을 매우 용이하게 하는 장점이 주게 된다. 그 다음, Van Kampen의 보조정리(Van Kampen, 1976)를 이용하여 ρ 의 평균을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\langle \rho(H, x, t) \rangle = P(H, x, t) \quad (5)$$

여기서, P 는 시간에 따라 변동하는 수문현상의 상태 벡터 H 의 확률밀도함수로 정의된다. 마지막으로, 확

률분포를 갖는 매개변수를 단일한 값을 갖는 매개변수로 전환하기 위하여 Cumulant expansion 이론(Kavvas와 Karakas, 1996)을 적용하면 식 (4)는 다음과 같은 선형 대류-확산 방정식의 구조를 가진 Fokker-Planck 방정식의 형태로 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(H, x, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial H_j} (\langle n_j(H, A, f, x, t) \rangle - \int_0^t Cov_o[n_j(H, A, f, x, t); \frac{\partial n_i(H, A, f, x, t-s)}{\partial H_i}]) \\ & \cdot P(H, x, t) \\ & + \frac{\partial}{\partial H_j} ([\int_0^t Cov_o[n_j(H, A, f, x, t); n_i(H, A, f, x, t-s)]) \\ & \cdot \frac{\partial P(H, x, t)}{\partial H_i}] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $Cov_o[\cdot]$ 는 Van Kampen(1974)에 의해 다음과 같이 정의되는 시간 의존적인 공분산이다.

$$Cov_o[n_j(x, t_1); n_i(x, t_2)] = \langle n_j(x, t_1)n_i(x, t_2) \rangle - \langle n_j(x, t_1) \rangle \cdot \langle n_i(x, t_2) \rangle \quad (7)$$

식 (6)은 어떠한 불확실한 매개변수도 포함되어 있지 않기 때문에 전통적인 편미분방정식 계산 기법을 사용한 해의 도출이 가능하게 된다. 따라서, 수문현상의 지배방정식이 식 (1)과 같은 형태로 표현된다면, 그리고 식에 포함된 매개변수들의 불확실성 정도를 추정할 수 있다면, 적절한 초기 및 경계조건하에서의 Fokker-Planck 방정식 (6)의 해 $P(H; x, t)$ 는 대상 수문현상의 상태 벡터 H 의 확률밀도함수를 제공함을 알 수 있다.

3. 침투모형

본 절에서는 본 연구에서 제안한 모형화 기법의 실제 적용 예를 살펴보기 위한 일환으로 강우발생 시 토양 속으로의 수분 침투현상에 관한 단위상승 지배방정식을 유도한 후, 이에 대한 수치실험결과를 도시하고자 한다. 먼저 침투현상을 규정하는 미소단위 지배방정식으로는 현재 미국에서 가장 범용적으로 사용되고 있는 Green-Ampt 모형(Green과 Ampt, 1911)을 선택하였다. Green-Ampt 모형은 모형구조가 실제 물리현상을 잘 반영하고 있으며, 따라서 모형을 구성하고 있는 모든 매개변수들의 실측이 가능하다는 장점을 가지고 있다. 모든 침투모형이 그러하듯이, Green-Ampt 모형도 토양 내의 수분 양에 따라 크게 두 가지 단계로 나누어 침투현상을 모의한다. 첫 번째 단계로 강우발생 시 토양표면의 공극이 수분으로 모두 채워지는데 걸리는 시간(포화시간, t_p) 이전의 경우, 지면에 내리는 모든 강우는 토양 속으로 침투되는 것으로 본다. 두 번째 단계로 일단 토양표면의 공극이 수분으로 모두 채워지고 나면, 일부 강우는 계속 토양 속으로 스며들면서 그 외의 토양의 침투능을 초과하는 잉여강우는 지면으로 흐르게 되어 지표면 유출현상이 발생하게 된다. Green-Ampt 모형의 포화시간 전후의 지배방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\frac{dV_t}{dt} = q_o, \quad \text{for } t \leq t_p \quad (8)$$

$$\frac{dV_t}{dt} = K_s \left(W + \frac{Z}{V_t} \right), \quad \text{for } t > t_p \quad (9)$$

여기서, V_t 는 강우발생 시 토양 속으로 침투된 물의 양이며, q_o 는 강우강도, K_s 는 포화투수계수이고, W 및 Z 는 강우발생 전 토양 속에 이미 함유되어 있는 물의 양과 토양의 특성에 따라 결정되는 상수이다. 식 (9)의 형태로부터 침투현상은 비선형적인 거동을 보이고 있음을 아울러 알 수 있다. 기존의 연구 결과들에 따르면 여러 가지 토양특성치들 가운데 포화투수계수의 공간적 이질성이 침투현상의 불확실성을 결정적으로 증대시킨다(Russo와 Bresler, 1982 외 다수논문)는 점에 착안하여 본 연구에서는 포화투수계수를 제외한 모든 토양특성치들은 공간적으로 균질하다고 가정하였다. 또한, 본 연구에서는 유역 내 포화투수계수의 공간적 분포가 대수정규 확률분포를 가진다고 가정하였으며, 대수정규 확률분포 가정은 이미 많은 선행 연구를 통하여 적절한 것으로 알려져 있다 (Zhu와 Mohanty, 2002 외 다수논문). 유역 내에 포화투수계수가 불확실성을 내포하면서 어떠한 확률분포를 가지고 있기 때문에 본 연구에서는 다음과 같은 특성함수를 유도하였으며 그

의미는 아래와 같다.

$$K_s^*(t) = \frac{q_o^2 t}{q_o t + Z} \quad (10)$$

강우발생 t 시간에 유역 내 어떤 지점의 포화투수계수가 식 (10)에 의해 계산되는 값보다 작다면 그 지점의 토양표면은 이미 포화되어 있는 것이며 따라서 식 (9)이 침투현상을 모의하기 위해 사용된다. 반대로 강우발생 t 시간에 유역 내 어떤 지점의 포화투수계수가 식 (10)에 의해 계산되는 값보다 크다면 그 지점의 토양표면은 아직 포화되어 있지 않은 것이며 따라서 식 (8)이 침투현상을 모의하기 위해 사용된다. 유역 내 포화투수계수가 확률분포를 가지기 때문에 유역 내 각 지점의 토양표면이 포화되는데 걸리는 시간 또한 공간적으로 다양하게 분포됨을 알 수 있다. 이 때, 토양표면이 포화되기 전 단계의 모형 (식 (8))에는 어떤 불확실한 매개변수도 가지고 있지 않으므로 이 경우에는 단위상승의 필요성이 없다고 말할 수 있겠으나, 일단 토양표면이 포화되고 난 후의 경우인 식 (9)은 확률분포를 갖는 매개변수 K_s 를 가지고 있으므로, 단위상승 지배방정식을 유도할 필요가 있게 된다. 따라서, 침투현상을 설명하는데 사용되는 상태 벡터(이 경우는 상태 변량)는 침투량 V_t 이며, 매개변수 벡터는 K_s, W, Z 로 구성되고, 함수 n 는 다음과 같이 표현된다.

$$n(V_t, t) = K_s \left(W + \frac{Z}{V_t} \right) \quad (11)$$

식 (11)으로부터 2절에서 유도한 절차를 수행하면 단위상승된 침투모형을 획득할 수 있게 된다. 침투모형에 대한 제안된 모형화 기법의 적용성을 알아보기 위하여 단위상승된 지배방정식으로부터의 결과와 Monte-Carlo 모의발생기법을 이용한 결과의 비교분석이 수행되어졌다. 다음과 같은 네 가지 모형이 비교를 위해 사용되어진다; pGA, mcGA, pRC, mcRC. 모형 pGA는 단순히 시스템의 매개변수인 포화투수계수 K_s 의 유역평균값만을 사용하여 Green-Ampt 모형에 적용한 후 수분 침투량을 모의하는 모형이며, mcGA는 Monte-Carlo 모의발생기법으로 대수정규분포를 따르는 K_s 를 무작위 발생시킨 후 발생된 각각의 K_s 에 대하여 pGA를 실행시켜 그 평균적인 결과를 얻는 모형이다. 모형 pRC는 포화투수계수 K_s 의 유역평균값만을 사용하여 가장 복잡한 식의 구조를 가지고 있지만 또한 가장 정확하게 실제 침투현상을 반영하는 것으로 알려진 Richards 방정식(Richards, 1931)을 푸는 모형이며, mcRC는 무작위 발생된 각각의 K_s 에 대하여 pRC를 실행시켜 그 평균적인 결과를 얻는 모형이다.

이때, 한가지 주목할 사항은 모형 pGA, pRC, 그리고 제안된 모형(그림 1~3의 UPSCALE)을 계산하는데 걸리는 시간은 일반적으로 사용되는 개인용 컴퓨터에서 2분 미만으로 조사되었으나, 비슷한 결과를 얻기 위해 mcGA나 특히 mcRC를 계산하는데 걸리는 시간은 1시간을 넘는 것으로 파악되었다. 제안된 모형화 방법의 비교적 짧은 소요계산시간은 제안된 모형화 방법의 중요한 장점 중 하나로 볼 수 있다. 사실 이러한 유역 평균값을 계산하기 위한 시간의 단축은 지면-대기 접합모형과 같은 수문기상모형에의 적용성을 결정적으로 증대시키는 측면이 있다. 비교를 위한 포화투수계수의 공간적 변동성은 변동계수 Cv 로 정량화될 수 있으며, 본 연구에서는 Cv 값으로 2.0을 사용하였다. 이는 포화투수계수가 공간적으로 평균의 두 배 정도의 표준편차를 보이는 공간적 변동성을 갖는다는 의미이다. 포화투수계수의 평균값은 4mm/hr가 사용되었다. 그 외에 공간적으로 균질하다고 가정한 토양특성치인 W 와 Z 값은 각각 1.00 및 19.47mm가 사용되었고, 이는 미국 캘리포니아 대학 서부시험유역의 토양특성치에 근거한 값이다. 또한, 모의를 위한 강우강도는 10mm/hr가 적용되었으며 강우는 10시간동안 지속되는 것으로 모의하였다.

그림 1은 제안된 단위상승 지배방정식의 해인 강우발생 후 토양 속으로 침투된 물의 양에 대한 확률밀도함수의 시간적 거동을 보여주고 있다. 그림에서 보이는 확률밀도함수의 불연속적인 꼬리부 침투치는 식 (8)에 의해 계산된 포화시간 이전의 침투량에 대한 확률밀도함수 상에서의 값으로써, 강우발생 5시간인 경우와 10시간인 경우를 비교해 볼 때 침투현상에 있어서의 입력인자인 강우와 모형 매개변수인 포화투수계수 사이의 시간에 따른 상대적 역할변경이 일어나고 있음을 알 수 있다. 즉, 강우 초기에는 강우량이 토양 내 수분 침투량의 공간적 패턴을 좌우하고 있으나 시간이 지나면서 토양 시스템의 매개변수가 토양 내 수분 침투량의 공간적 패턴을 결정하는데 점점 더 많은 영향을 미치고 있음을 보여주고 있다. 이로부터 기존의 연구결과

들에서 주로 관측에 의해서 파악되어온 상대적 역할변경에 대한 사실(Famiglietti 등, 1999 외 다수논문)이 정량적으로 모형화될 수 있음을 보여준다고 말할 수 있다. 그림 2는 각각의 모형으로부터 산정된 유역평균 침투량의 시간적 거동을 보여주고 있으며 이러한 결과로부터, 제안된 단위상승 모형화 기법은 Monte-Carlo 모의발생기법의 결과를 잘 재현하고 있는 것으로 보여진다.

그림 3은 각각의 모형으로부터 계산되는 토양 깊이에 따른 수분량의 분포 결과를 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있듯이, 공간적 이질성을 고려하고 있는 모형들(mcGA, mcRC, UPSCALE) 사이의 차이는 아주 미세한 반면에 단지 유역평균 매개변수를 사용한 모형들(pGA, pRC)과는 상당한 차이를 나타내고 있다. 또한, 제안된 단위상승 모형화 기법은 mcRC의 결과에서 모의된 바와 같은 실제 자연현상에서 나타나는 것과 유사한 토양 내 수분량 분포곡선을 우수하게 재현하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 불확실성을 내재하고 있는 수문현상의 확률적인 해법을 제시하기 위하여 새로운 개념의 단위상승 지배방정식의 유도방법을 제시하고, 침투모형을 그 적용 예로 제시하였다. 제안된 방법으로 유도된 단위상승 지배방정식의 수학적 형태가 선형 결정론적 편미분방정식이기 때문에 그 해를 구하기 쉽다는 장점을 갖고 있다. 이를 Monte-Carlo 모의발생기법을 이용하여 유역평균 수문량을 산정하는 방법과 비교해볼 때 제안된 방법의 계산시간 단축효과는 수문기상모형과의 접합을 보다 용이하게 할 수 있다. 또한, 제안된 모형화 기법을 통하여 유도된 지배방정식의 해가 관심 수문량의 확률밀도함수로 주어짐에 따라, 대상 수문량의 기대값을 제공할 수 있을 뿐만 아니라 기대값 주위로 어느 정도의 불확실성이 내재되어 있는지에 관한 설명이 가능할 것이다. 제안된 방법론을 침투현상을 모의하는 모형에 적용한 결과를 요약하면 다음과 같다; 1. 침투현상에 있어서의 입력인자인 강우와 모형 매개변수인 포화투수계수 사이의 시간에 따른 상대적 역할변경이 일어나고 있음을 정량적으로 파악할 수 있다. 2. 제안된 단위상승 모형화 기법은 Monte-Carlo 모의발생기법의 결과를 잘 재현하고 있으며, 특히 실제 자연현상에서 나타나는 것과 유사한 토양 내 수분량 분포곡선을 우수하게 모의하고 있는 것으로 보여진다.

참 고 문 헌

1. Famiglietti, J.S., Devereaux, J.A., Tsegaye, T., Houser, P.R., Jackson, T.J., Graham, S.T., Rodell, M. and van Oevelen, P.J. (1999). "Ground-based investigation of soil moisture variability within remote sensing footprints during the Southern Great Plains 1997 (SGP97) Hydrology Experiment." *Water Resour. Res.*, 35, 1839-1851.
2. Green, W.H. and Ampt. G.A. (1911). "Studies on soil physics." *J. Agric. Sci.*, 4, 1-24.
3. Indelman, P. and Dagan, G. (1993). "Upscaling of permeability of anisotropic heterogeneous formations. 2. General structure and small perturbation analysis." *Water Resour. Res.*, 29, 925-933.
4. Kavvas, M.L. and Karakas, A. (1996). "On the stochastic theory of solute transport by unsteady and steady groundwater flow in heterogeneous aquifers." *J. Hydrol.*, 179, 321-351.
5. Kubo, R. (1963). "Stochastic Liouville equations." *J. Math. Phys.*, 4, 174-183.
6. Richards, L.A. (1931). "Capillary conduction of liquids in porous mediums." *Physics*, 1, 318-333.
7. Russo, D. and Bresler, E. (1982). "A univariate versus a multivariate parameter distribution in a stochastic conceptual analysis of unsaturated flow." *Water Resour. Res.*, 18, 483-488.
8. Van Kampen, N.G. (1974). "A Cumulant expansion for stochastic linear differential equation. II." *Physica*, 74, 239-247.
9. Van Kampen, N.G. (1976). "Stochastic differential equations." *Phys. Rep.*, 24, 171-228.
10. Zhu, J. and Mohanty, B.P. (2002). "Upscaling of soil hydraulic properties for steady state evaporation and infiltration." *Water Resour. Res.*, 38, 1178-1190.

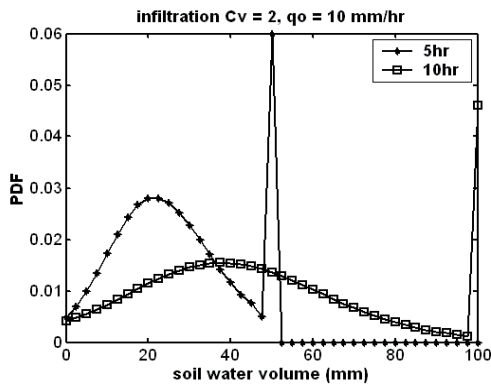


그림 1. 시간에 따른 침투량의 확률밀도함수

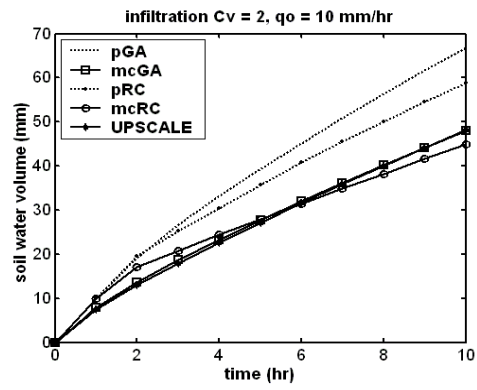


그림 2. 유역평균 침투량의 시간적 거동

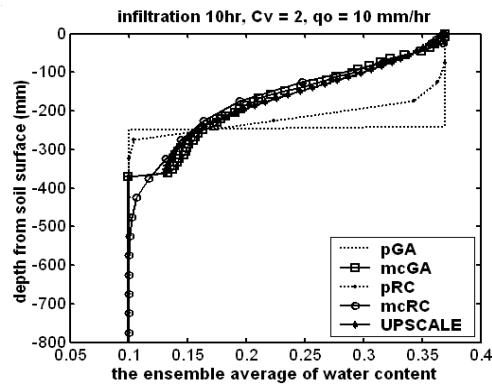
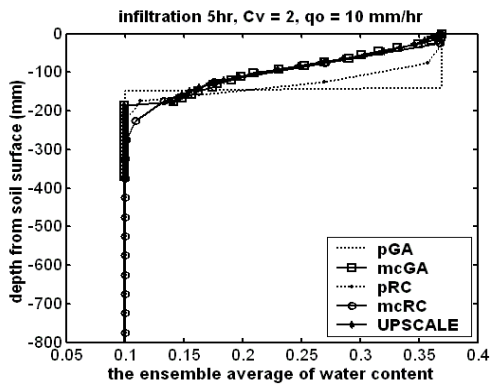


그림 3. 깊이에 따른 유역평균 토양수분량의 분포