# 하천 오염물질 이송확산 모의에서의 프랙탈 계산기법

## Fractal calculus for water pollutant diffusion modeling

김상단* / 송미영**

Sangdan Kim, Mee Young Song

요 지

프랙탈 이송확산방정식은 정수 차수의 미분연산자로 구성된 고전적인 이송확산방정식과 비교하여 프랙탈 차수의 미분연산자로 구성된 보다 상위개념의 방정식으로써 정의된다. 지금까지의 프랙탈 이송확산방정식은 추계학적인 기법을 동원하여 푸리에-라플라스 공간에서 주로 해석되었으나, 본 연구에서는 실제 공간에서 유한차분개념을 도입하여 보다 직접적으로 하천에서의 오염물 이송확산에 관한 지배방정식을 유도하였다. 이러한 개념의 유도방법은 프랙탈 차수 및 관련 확산계수의 물리적인 추정에 관한 실마리를 제공할 수 있다. 고전적인 이송확산방정식과는 달리 프랙탈 이송확산방정식은 실제 하천에서 관측되는 오염물의 시간-농도 분포곡선의 왜곡현상과 분포곡선의 전후방부 농도를 보다 실제에 가깝게 모의할 수 있을 것으로 기대되어진다.

**핵심용어**: 수질, 이송확산, 프랙탈

## 1. 서론

Taylor(1954)는 확산연구에서 다음과 같은 1차원 Fick의 이송확산방정식(Fick, 1855)을 처음 소개하였다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\nu C + \frac{\partial}{\partial x}K\frac{\partial C}{\partial x} \qquad (1)$$

여기서 $C$는 오염물질의 농도, $\nu$는 유속, $K$는 확산계수이다. 이러한 1차원 Fick의 확산방정식에 의해 모의된 결과는 정규분포의 형태를 보이고 있는 반면에, 대부분 자연하천에서의 실측된시간-농도 분포곡선은 왜곡된 분포형태를 보이고 있으며, 또한 모의된 시간-농도 분포곡선은 전방부 또는 후방부의 농도가 실제하천에서의 값보다 작은 값을 주는 것으로 알려져 있다. 이에 본 연구는 문제해결의 일차적 과제로서 프랙탈 차원의 미분방정식을 도입하여 실제하천에서 적용 가능한 Fick의 법칙을 일반화하여 새로운 개념의 이송확산방정식의 수학적 유도를 목적으로 한다.

## 2. 유한차분의 측면에서 본 Fick의 법칙

오염물 입자의 플럭스 $J$는 농도구배에 비례한다는 Fick의 법칙의 수식 표현은 다음과 같다.

$$J = -K\frac{\partial C}{\partial x} \qquad (2)$$

여기서 $J$는 단위시간당 단위면적당 오염물질량의 플럭스이다. Fick의 법칙에 따른 오염물 입자의 운동은 그림 1과 같은 인접 셀 사이에서의 오염물 입자의 확산을 위한 유한차분기법을 이용하여 살펴볼 수 있다. 먼저 상자 $i$ 안에 있는 오염물 입자의 수를 $M_i$라 하면 각각의 상자의 농도는 아래와 같이 쓸 수 있다.

* 정회원, 경기개발연구원 환경정책연구부, 책임연구원, E-mail: skim@kri.kr.kr

** 정회원, 경기개발연구원 환경정책연구부, 연구위원, E-mail: mysong@kri.kr.kr

$$C_i = \frac{M_i}{\Delta V} \tag{3}$$

여기서 $\Delta V = A\Delta x$로서 상자의 부피를 의미하며 $A$는 흐름 단면적이다. 하천흐름에 의한 유속은 일단 무시하고 상자 안의 오염물 입자들 중에서 단위시간당 총 $R$의 비율로 입자들이 전방으로 확률 $p$, 후방으로 확률 $q$를 보이며 점프한다(여기서 $p+q=1$)고 가정하면, 상자 $i$에서 단위시간 $\Delta t$ 동안에 상자 $i+1$과 $i-1$로 점프하는 입자들의 총 수는 $M_i R\Delta t$가 되며, 상자 $i$에서 단위시간 $\Delta t$동안의 플럭스 $J_i$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J_i = \frac{R}{A}\left(pM_i + pM_{i-1} - qM_i - qM_{i+1}\right)$$

$$= -R\Delta x^2\left\{p\cdot\frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} - q\cdot\frac{C_i - C_{i+1}}{\Delta x}\right\} + 2R\Delta x\,(p-q)\,C_i \tag{4}$$

이 때 극한 $\Delta x \rightarrow 0$을 취한 후, $p=q=1/2$, $K = R\Delta x^2$이라 하면

$$J_i = -R\Delta x^2\left(p\cdot\frac{\partial C}{\partial x} + q\cdot\frac{\partial C}{\partial x}\right) = -K\cdot\frac{\partial C}{\partial x} \tag{5}$$

## 3. 프랙탈 계산법

연속함수 $C(x)$의 Taylor급수를 고려하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C(x+\tau) = C(x) + \tau DC(x) + \frac{\tau^2}{2!}D^2C(x) + \cdots + \frac{\tau^n}{n!}D^nC(x) + \cdots \tag{6}$$

여기서 $D$는 미분연산자이며, 상방향연산자 $E_\tau^{+1}$을 $E_\tau^{+1}C(x) = C(x+\tau)$와 같이 정의하면 $E_\tau^{+1}C(x) = e^{\tau D}C(x)$이 된다. 따라서, 미분연산자와 상방향연산자는 서로 $E_\tau^{+1} = e^{\tau D}$와 같은 관계를 맺고 있음을 알 수 있다. 우측차분연산자는 $\Delta_-^1 = 1 - E_\tau^{+1} = 1 - e^{\tau D}$과 같이 정의할 수 있으며, 이러한 개념으로부터 우측미분연산자를 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\frac{dC(X)}{dx} = -D_-^1 C(x) = -\lim_{\tau\rightarrow 0}\frac{\Delta_-^1 C(x)}{\tau} \tag{7}$$

한편, 하방향연산자는 $E_\tau^{-1}C(x) = C(x-\tau)$ , 좌측차분연산자는 $\Delta_+^1 = 1 - E_\tau^{-1} = 1 - e^{-\tau D}$로 정의할 수 있으며, 좌측미분연산자는 다음과 같다.

$$\frac{dC(x)}{dx} = D_+^1 C(x) = \lim_{\tau\rightarrow 0}\frac{\Delta_+^1 C(x)}{\tau} \tag{8}$$

이 때, 식 (7)과 (8)은 수학적으로 같은 연산자를 표기하므로 좌우측미분연사자들은 $D_+^1 = -D_-^1$이 됨을 알 수 있다.

다음 과정으로, 위와 같은 정수차수 미분의 경우를 바탕으로 하여 다음과 같이 프랙탈 차수의 미분을 정의할 수 있다.

$$\Delta_+^\alpha C(x) = (1 - E_\tau^{-1})^\alpha C(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-1)^k C(x-k\tau)$$

$$= W_0^\alpha C(x) - W_1^\alpha C(x-\tau) - W_2^\alpha C(x-2\tau) - \cdots \tag{9}$$

여기서 $W$는 프랙탈 가중함수로서 $W_0^\alpha = 1,\ W_k^\alpha \geq 0\ \ (k \geq 1)$이다. 이 때, $0 < \alpha \leq 1$이다. 마찬가지로 우측차분연산자에 대해서는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta_-^\alpha C(x) = C(x) - \sum_{k=1}^{\infty} W_k^\alpha C(x + k\tau) \tag{10}$$

이로부터 프랙탈 차수의 미분연산자는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$D_+^\alpha C(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} C(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\Delta_+^\alpha}{\tau^\alpha} C(x),\ D_-^\alpha C(x) = -\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} C(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\Delta_-^\alpha}{\tau^\alpha} C(x) \tag{11}$$

따라서 $\alpha$가 정수가 아니라면 $D_+^\alpha C(x) \neq -D_-^\alpha C(x)$이 된다. 여기서 프랙탈 차수의 미분연산자는 Samko 등(1993)에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$D_+^\alpha C(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{x} ds\,(x-s)^{n-q-1} C(s) \tag{12}$$

$$D_-^\alpha C(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{x}^{\infty} ds\,(s-x)^{n-q-1} C(s) \tag{13}$$

이 때 $n$은 $\alpha$보다 작지 않은 최소 정수이다. 그림 2는 정수 차수의 일반적인 도함수와 프랙탈 차수의 도함수의 비교를 보여주고 있다. 어떤 점 $x = s$에서의 정수 차수 도함수는 $s$ 근방의 기울기로서 정의됨에 따라 도함수가 내포하고 있는 정보는 함수의 국부적인 거동만을 제공하는 반면에, 어떤 점 $x = s$에서의 프랙탈 차수의 도함수는 함수 전체의 정보를 모두 포함하고 있다 (blank, 1996). 그림 3은 $\alpha$가 각각 0.1, 0.5, 0.9일 때, 어떤 주어진 점에 대한 주위 점들의 가중치 $W_k^\alpha$를 보여주고 있다. $\alpha$값이 1에 가까운 값일수록 근방의 점들에 보다 큰 가중치가 주어지며, $\alpha$값이 0에 가까울수록 먼 곳에 있는 점들의 영향이 더 크게 작용하고 있다. 즉, 프랙탈 차수의 미분연산자는 어떤 점에 대한 전체 함수값들의 가중평균이 된다.

## 4. 프랙탈 Fick의 법칙

이제 프랙탈 Fick의 법칙을 유도하기 위하여 그림 4를 고려하도록 하겠다. 그림 4에서 알 수 있듯이 상자 $i$ 안에 있는 오염물 입자들은 그림 1의 경우와는 달리 시간 $\Delta t$ 동안에 상자 $i-1$과 $i+1$ 뿐만 아니라 그보다 더 멀리 이동할 수 있다. 이 때, 상자 $i$에 있는 오염물 입자가 상자 $i+1$ 또는 $i-1$로 이동할 확률은 상자 $i+2$ 또는 $i-2$로 이동할 확률보다 크며, 또한 상자 $i+2$ 또는 $i-2$로 이동할 확률은 상자 $i+3$ 또는 $i-3$로 이동할 확률보다 크다고 가정한다. 따라서 상자 $i$에서 단위시간 $\Delta t$ 동안의 플럭스 $J_i$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} J_i = \frac{R}{A} (&p\omega_1^\alpha C_{i-1} + p\omega_2^\alpha C_{i-2} + p\omega_3^\alpha C_{i-3} + \cdots p\omega_1^\alpha C_i + p\omega_2^\alpha C_i + p\omega_3^\alpha C_i + \cdots \\ &- q\omega_1^\alpha C_{i+1} - q\omega_2^\alpha C_{i+2} - q\omega_3^\alpha C_{i+3} - \cdots - q\omega_1^\alpha C_i - q\omega_2^\alpha C_i - q\omega_3^\alpha C_i - \cdots) \\ = R\Delta x &\left( p\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^\alpha C_{i-k} + p\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^\alpha C_i - q\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^\alpha C_{i+k} - q\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^\alpha C_i \right) \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 $w_k^\alpha$는 상자 $i$로부터 $k$개만큼 떨어진 인근 상자(즉, 상자 $i-k$ 또는 상자 $i+k$)에 있는 오염물 입자가 상자 $i$로 점프할 확률로서 $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^\alpha = 1$이며 $\omega$는 $k$에 대하여 감소함수이다. 이 때 $\alpha$는 $k$에 대한 $\omega$

의 감소 정도를 나타내는 매개변수이다. 만약 가중치 $w_k^\alpha$를 아래와 같이 각각 정의할 수 있다면 이는 곧 프랙탈 가중함수를 적용할 수 있게 됨을 의미한다.

$$\omega_k^\alpha = \frac{W_k^\alpha}{\sum_{k=1}^{\infty} W_k^\alpha} = \frac{W_k^\alpha}{T} \tag{15}$$

여기서 $W_k^\alpha$는 식 (9)에서 정의한 프랙탈 가중함수이며, 만약 $\alpha = 1$이면 $T = 1$이고, $0 < \alpha < 1$이면 $0 < T < 1$이 된다. 이제 플럭스 $J_i$ 는 앞서 설명한 프랙탈 계산법에 의해 아래와 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} J_i &= -\frac{R\Delta x}{T}\left\{p\left(C_i - \sum_{k=1}^{\infty} W_k^\alpha C_{i-k}\right) - q\left(C_i - \sum_{k=1}^{\infty} W_k^\alpha C_{i+k}\right) - (1+T)(p-q)C_i\right\} \\ &= -\frac{R\Delta x^{\alpha+1}}{T}\left\{p \cdot \frac{\Delta_+^\alpha C_i}{\Delta x^\alpha} - q \cdot \frac{\Delta_-^\alpha C_i}{\Delta x^\alpha}\right\} + R\Delta x \cdot \frac{T+1}{T} \cdot (p-q)C_i \end{aligned} \tag{16}$$

이 때, 극한 $\Delta \to 0$을 취하고 확산계수를 $K_\alpha = R\Delta x^{\alpha+1}/T$로 정의하면 다음과 같은 프랙탈 Fick의 법칙을 유도할 수 있다.

$$J_i = -K_\alpha\left(p \cdot D_+^\alpha C_i - q \cdot D_-^\alpha C_i\right) \tag{17}$$

여기서 $\alpha$는 프랙탈 차수로서 $0 < \alpha \leq 1$의 범위를 가지며, $D_+^\alpha$와 $D_-^\alpha$는 프랙탈 차수의 미분연산자이고, $K_\alpha$의 단위는 $length^{\alpha+1}/time$이다. 만약 식 (30)에서 $\alpha = 1$이라면 $T = 1$이 되고, 여기에 $p = q = 1/2$라 하면 프랙탈 Fick의 법칙은 기존의 Fick의 법칙과 완전히 같아지게 되므로 기존에 사용되어오던 Fick의 법칙은 프랙탈 Fick의 법칙의 한 가지 특수한 경우로서 설명될 수 있다. 따라서 하천오염물질의 모의를 위한 프랙탈 이송확산방정식은 아래와 같이 된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\nu C + \frac{\partial}{\partial x}\left\{K_\alpha\left(\frac{1+\beta}{2}D_+^\alpha C - \frac{1-\beta}{2}D_-^\alpha C\right)\right\} \tag{18}$$

이 때 통계학적인 설명의 용이성을 위하여 $\beta$는 $p$와 $q$를 대신하여 사용된 매개변수로서 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$p = \frac{1+\beta}{2} \tag{19}$$

$$q = \frac{1-\beta}{2} \tag{20}$$

위와 같은 $\beta$의 정의는 농도분포 곡선의 왜곡도를 나타내는데 매우 용이하다. $\beta$는 $-1 \leq \beta \leq 1$의 범위를 갖고 있으며 $\beta = 0$인 경우는 왜곡도가 0이 되어 농도분포곡선은 왜곡되지 않고 좌우 대칭인 분포곡선을 나타내며, $\beta \to -1$인 경우는 분포곡선의 첨두부가 왼쪽으로 크게 치우친 분포곡선을, $\beta \to 1$인 경우에는 오른쪽으로 크게 치우친 분포곡선을 보여주게 된다.

## 5. 결론

본 연구에서는 하천에서의 오염물질 거동해석을 위한 프랙탈 이송확산방정식을 유도하였다. 유도의 핵심과정은 프랙탈 계산법의 도입이었으며, 이 과정을 유한차분개념을 통하여 해석적으로 설명하고자 하였다. 본 연구에서 제안된 프랙탈 이송확산방정식을 통하여 하천 오염물질의 모의 시 발생되는 시간-농도 분포곡선의 왜곡현상과분포곡선의 전방부 또는 후방부의 농도 과소평가 문제 등을 해결할 수 있을 것으로 기대된다.

## 참 고 문 헌


1. Blank, L. (1996). "Numerical treatment of differential equations of fractional order." Manchester Centre for Computational Mathematics Numerical Analysis Report No. 287.
2. Fick, A. (1855). "On liquid diffusion." Philos. Mag., 294, pp. 30-39.
3. Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1993). "Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications." Gorden & Breach, Amsterdam.
4. Taylor, G.I. (1954). "Conditions under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion."Proc. Roy. Soc. A, 225, pp. 473477.


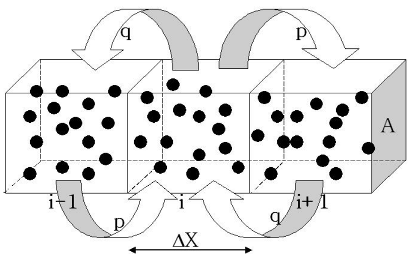


그림1. Fick의 법칙

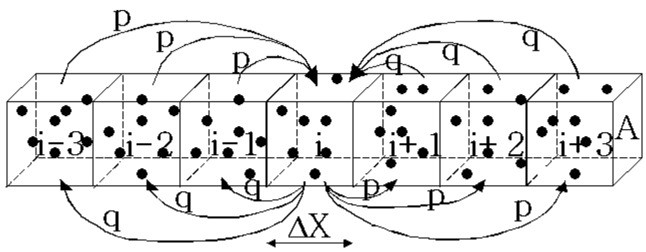


그림 4. 프랙탈 Fick의 법칙

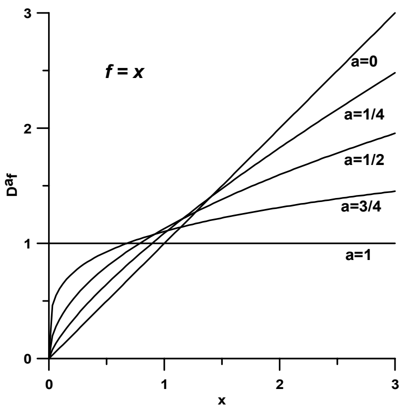


그림 2. 정수차수미분과 프랙탈차수미분

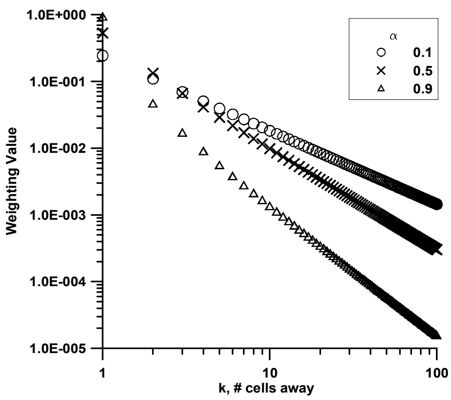


그림 3. 프랙탈 차수 미분의 가중함수