

# 오염물질의 이송·확산 모의를 위한 3차원 퍼프모형의 개발

## Development of 3-Dimensional Puff Model for Pollutant Transport Modeling

김영도\*, 서일원\*\*

Young Do Kim, Il Won Seo

### 요지

오염물질의 이송·확산 과정을 해석하기 위하여 계산효율이 높은 3차원 퍼프모형을 개발하였다. 본 연구에서 개발된 퍼프모형은 추적방법에 따라 전방추적모형과 후방추적모형으로 나눌 수 있으며, 이 두 가지 추적방법은 계산효율과 수치오차에 있어서 상이한 특성을 나타내었다. 전방추적 퍼프모형은 일정한 시간간격을 가지므로 정상상태의 연속오염원의 경우에 각각의 퍼프들이 동일한 질량을 갖는다. 그러므로 전방추적 퍼프모형은 각 퍼프들간의 중첩정도가 일정하지 않다. 이에 관한 오차분석을 수행하기 위하여 본 연구에서는 무차원 퍼프중첩계수를 정의하였다. 퍼프중첩계수란 퍼프의 크기에 대하여 퍼프중심간의 거리가 떨어진 정도를 나타내는 무차원수로서 너무 작은 경우에는 정확도가 떨어지고 너무 큰 경우에는 계산효율이 감소한다. 전방추적 퍼프모형의 경우, 중첩계수가 작은 초기구간에는 정확도가 떨어지며, 시간이 지남에 따라 중첩계수가 필요이상으로 증가하여 계산효율이 떨어지는 것으로 나타났다. 이에 비해 일정한 중첩정도를 갖는 후방추적 퍼프모형의 경우에는 전 영역에 걸쳐서 정확도와 계산효율이 높은 것으로 나타났다. 하지만 일정한 시간간격마다 농도장을 계산하고자 할 때, 전방추적법은 단 한번의 전체계산을 통하여 수행가능하지만 후방추적법의 경우에는 매 출력시간마다 초기시점까지 반복해서 계산해야하는 단점이 있다. 경계처리에 있어서 입자추적모형과 상이한 방법을 사용하는 퍼프모형은 폐경계에서는 입자추적모형과 동일한 결과를 나타내지만 개경계에서는 다른 결과를 나타내었다. 또한 오염원이 입자의 공간적 분포를 갖는 경우, 퍼프모형은 입자추적모형보다는 적은 수의 퍼프를 사용할 수 있지만 이에 따른 경계면에서의 수치오차를 발생하였다. 본 연구에서는 개발된 퍼프모형을 검증하고 장·단점을 분석하기 위하여 흐름이 일정한 경우와 전단흐름의 경우에 대하여 이송·확산 수치모의를 수행하였으며, 이를 각각의 경우의 해석해 결과와 비교·분석하였다. 후방추적 퍼프모형은 전방추적 퍼프모형에 비하여 사용된 퍼프수와 관계없이 작은 오차를 발생하였으며, 전체적으로 퍼프모형이 입자모형보다는 훨씬 적은 수의 계산을 통해서도 작은 오차를 나타낼 수 있다는 것을 알 수 있었다. 그러나 Gaussian 분포를 갖는 퍼프모형은 전단흐름에서의 긴 유선형 농도분포를 모의할 수 없었고, 이에 관한 오차는 전단계수가 증가함에 따라 비선형적으로 증가하였다. 향후, 보다 다양한 흐름영역에서 장·단점 분석 및 오차해석을 수행한 후에 각각의 Lagrangian 모형의 장점만을 갖는 모형결합 방법을 제시할 수 있을 것으로 판단된다.

**핵심용어:** 이송·확산 과정, 퍼프모형, 전방추적, 후방추적, Gaussian 분포

### 1. 서론

대표적인 Lagrangian 모형인 무작위 행보(random walk)를 이용한 입자추적모형은 지하수오염(Tompson과 Gelhar, 1990), 연안역오염(Heemink, 1990), 해양오염(Dewey 등, 1997), 그리고 대기오염(Taylor, 1989) 등 여러 대상영역에서의 오염물질의 혼합거동 해석에 사용되어 왔다. 그러나

\* 정회원, 한국수자원공사 수자원연구원 선임연구원 (E-mail: ydkim2002@kowaco.or.kr)  
\*\* 정회원, 서울대학교 지구환경시스템공학부 교수 (E-mail: seoilwon@plaza.snu.ac.kr)

입자추적모형은 모의기간과 투여된 입자수가 증가함에 따라 계산횟수가 비선형적으로 증가되므로 장기간의 연속적인 오염원의 혼합거동해석에는 적합하지 못하다는 단점이 있다. 이와 같은 입자추적모형의 단점을 해결하기 위하여 퍼프추적(puff tracking)모형이 기존 연구자들에 의해 제시된 바 있다(Adams 등, 1986; Roberts, 1999). 퍼프모형은 확산과정을 모의함에 있어서 Gaussian 분포를 갖는 다수의 입자들의 무작위행보를 이용하는 입자추적모형과는 달리 단일퍼프의 크기성장을 이용하는 모형으로서 입자추적모형에 비하여 계산효율이 뛰어난 장점이 있다.

본 연구에서는 전방추적법과 후방추적법을 사용하여 두 가지 3차원 퍼프모형을 개발하여 다양한 조건에서의 수치모의를 수행하였으며, 이를 입자추적모형의 결과와 비교·분석함으로써 각각의 Lagrangian 모형이 갖는 장·단점을 분석하였다. 이와 같은 오차분석을 통하여 각 Lagrangian 모형의 장점만을 부각시킨 결합방법을 제시하고자 하였다.

## 2. 모형의 개발

퍼프모형을 이용하여 연속적인 오염원을 모의하는 경우에 각각의 시간간격에서 부여된 입의 퍼프는 식(1)의 전체질량,  $M$ 을 갖는다.

$$M = \int_t^{t+\Delta t} q(\tau) d\tau \quad (1)$$

여기서,  $q$ 는 단위시간당 부여된 오염원의 질량이다. 퍼프의 질량이 Gaussian 분포를 갖는다고 가정하면, 각각의 퍼프로 인한 특정지점에서의 농도값은 식(2)를 이용하여 계산할 수 있다.

$$C(x, y, z) = \frac{M}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left\{ -\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_c)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-z_c)^2}{2\sigma_z^2} \right\} \quad (2)$$

여기서,  $(x_c, y_c, z_c)$ 는 퍼프의 중심위치이고,  $\sigma$ 는 Gaussian 분포의 표준편차로서, 이를 이용하여 퍼프의 크기를 나타낼 수 있다.

그림 1은 퍼프모형의 추적방법을 개념적으로 나타낸 것이다. 그림 1(a)와 같이 유속이 일정한 흐름에서 연속적으로 부여된 오염원의 해를 구하기 위해서는 입자추적모형은 그림 1(b)와 같이 다수의 입자의 무작위행보를 이용한다. 그러나 퍼프모형에서는 그보다 훨씬 적은 수의 퍼프를 모의함으로써 동일한 해를 얻을 수 있다. 퍼프모형에서 퍼프의 위치는 식(3)에 나타낸 바와 같이 주변 유속장에 의하여 이송되고, 퍼프의 크기는 식(4)에 나타낸 바와 같이 확산과정에 의하여 성장한다.

$$\vec{\Delta x} = \vec{v} \Delta t \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \int_0^t 2E d\tau \quad (4)$$

여기서,  $\vec{v}$ 은 퍼프 중심위치에서의 Lagrangian 유속이고,  $\sigma_0$ 는 퍼프의 초기크기를 나타낸다. 또한 그림 1

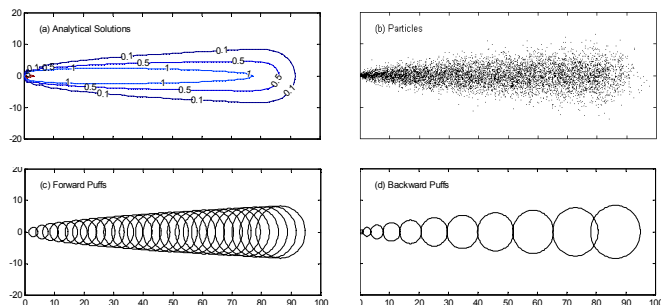


그림 1. 각각의 Lagrangian 모형들에 대한 개념도

의 (c)와 (d)에 나타낸 바와 같이 각 퍼프를 추적하는 방법에 따라 전방추적모형과 후방추적모형으로 나눌 수 있으며, 이 두 가지 추적방법은 계산효율과 수치오차에 있어서 상이한 특성을 나타낸다.

전방추적법은 그림 2(a)에 나타낸 바와 같이 일정한 시간간격을 이용한다. 그러므로 시간에 따라 일정한 연속오염원의 경우에 각각의 퍼프는 동일한 질량을 갖는다. 각각의 시간간격에서 새로운 퍼프가 오염원의 위치에 부여되고 이전의 퍼프들은 이송·확산된다. 이와 같은 과정을 일정한 시간동안 반복함으로써, 임의의 시간에서의 농도 분포를 나타낼 수 있다. 대부분의 경우, 전방추적법에 의한 퍼프모형은 각 퍼프들간의 중첩정도가 일정하지 않다. 이러한 효과를 나타내기 위하여  $x$ 방향의 퍼프중첩에 관한 무차원수,  $\alpha_x$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\alpha_x = \frac{u\Delta t}{\sigma_x(t)} \quad (5)$$

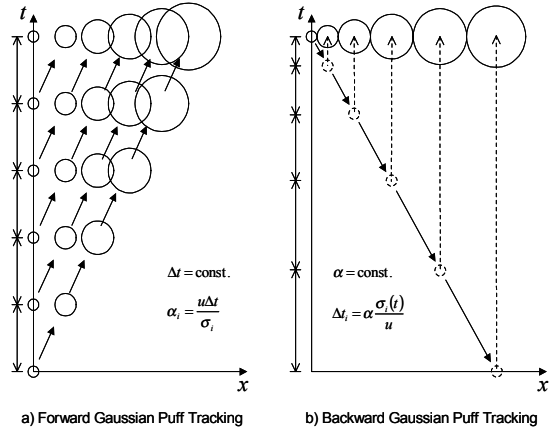


그림 2. 전방추적법과 후방추적법

여기서,  $u$ 는  $x$ 방향 유속이다. 전방추적법의 경우 초기에는 중첩계수가 크므로 정확도가 낮고 점차로 계산효율이 감소되는 단점이 있다. 반면 그림 2(b)에 나타낸 후방추적법의 경우에는 일정한 퍼프중첩계수를 가지므로 정확성과 계산효율이 높다. 하지만 일정한 시간간격마다 농도장을 계산하고자 할 때, 전방추적법은 단 한번의 전체계산을 통하여 수행가능하지만 후방추적법의 경우에는 매 출력시간마다 초기시점까지 반복해서 계산해야하는 단점이 있다.

그림 3은 경계조건 처리방법을 나타낸 것으로서, 퍼프모형은 폐경계에서는 입자추적모형과 동일한 결과를 나타내지만 개경계에서는 다른 결과를 보인다. 또한 그림 4와 같이 퍼프모형이 선오염원을 모의하는 경우에 입자추적모형보다는 적은 수의 퍼프를 사용하지만 이에 따른 경계면에서의 수치오차를 발생할 수 있다.

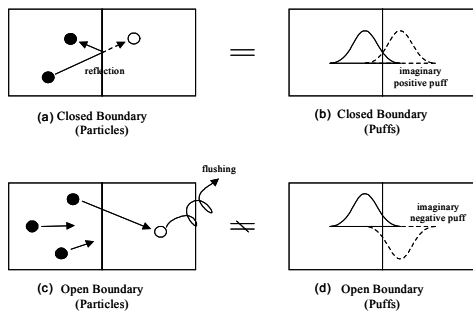


그림 3. 경계조건 부여방법

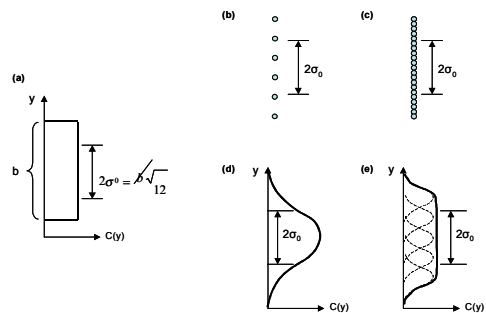


그림 4. 선오염원 부여방법

### 3. 민감도 분석

개발된 퍼프모형을 검증하기 위하여 식(6)과 같은 1차원 이송·확산의 경우에 대하여 수치모의를 수행하였으며, 이를 식(7)의 해석해와 비교하였다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$C = \frac{q' e^{-\frac{xu}{2E_x}}}{2u} \left[ \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{x+ut}{\sqrt{4E_x t}} \right) - 1 \right\} \exp \left( -\frac{xu}{2E_x} \right) - \left\{ \operatorname{erf} \left( \frac{x-ut}{\sqrt{4E_x t}} \right) - 1 \right\} \exp \left( -\frac{xu}{2E_x} \right) \right] \quad (7)$$

여기서,  $q'$ 은 시간에 따라 단위면적당 부하된 오염질량이다. 본 연구에서는 농도 모의결과에 대한 수치오차를 식(8)과 같이 정의하였다.

$$\text{RMS Error (\%)} = \sqrt{\frac{1}{N_G} \sum_{n=1}^{N_G} \left( \frac{C_{m,n} - C_{a,n}}{C_{a,n}} \right)^2} \times 100 \quad (8)$$

여기서,  $C_{m,n}$ 은  $n$ 번째 격자에서 모의결과,  $C_{a,n}$ 는 동일 지점에서의 해석해, 그리고  $N_G$ 는 오차 계산에 사용된 격자점의 수이다.

그림 5는 사용된 퍼프(또는 입자) 수에 대한 Lagrangian 모형의 수치오차를 나타낸 것이다. 후방추적 퍼프모형은 전방추적 퍼프모형에 비하여 사용된 퍼프수와 관계없이 적은 오차를 발생하였다. 또한 전체적으로 퍼프모형이 입자모형보다는 훨씬 적은 수의 계산을 통하여 보다 작은 오차를 나타낼 수 있다는 것을 알 수 있었다.

퍼프모형의 한계점에 관하여 조사하기 위하여 식(9)와 같이  $x$ 방향 유속이 변하는 전단 흐름에 대하여 수치모의를 수행하였으며, 이에 관한 해석해는 식(10)과 같다.

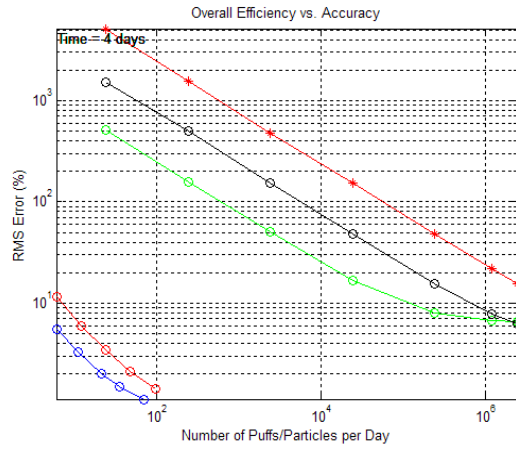


그림 5. 퍼프(입자) 수에 따른 오차

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (u_0 + \lambda y) \frac{\partial C}{\partial x} = E_x \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

$$C = \frac{m'}{4\pi E(1 + \lambda^2 t^2/12)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{\{x - x_0 - u_0 t - 0.5\lambda(y - y_0)t\}^2}{4Et(1 + \lambda^2 t^2/12)^{1/2}} + \frac{(y - y_0)^2}{4Et} \right] \quad (10)$$

여기서,  $m'$ 은 단위수심당 부하된 질량,  $u_0$ 는 중심선 유속, 그리고  $\lambda$ 는 횡방향 유속경사이다. 퍼프모형은 Gaussian 분포를 가정하므로 이와 같은 전단흐름에서의 농도장의 변화를 모의할 수 없다. 이에 대한 오차분석을 수행하고자 식(11)과 같이 전단정도에 대한 무차원수를 정의하였다.

$$S(t) \equiv \frac{\lambda \sigma(t)}{u_0} = \frac{\lambda(\sigma_0 + \sqrt{2Et})}{u_0} \quad (11)$$

그림 6은 전단흐름에서의 농도분포에 관한 해석해를 나타낸 것이다. 전단계수가 증가함에 따라 농도분포는 긴 유선형구조로 변해가는 것을 확인할 수 있다. 그림 7은 Gaussian 분포의 퍼프모형 수치모의 결과와 해석해를 비교하여 전단계수에 따른 수치오차를 나타낸 것이다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 입자추적모형보다 계산효율이 높은 Lagrangian 모형인 3차원 퍼프모형을 개발하였다. 일정한 시간간격을 이용하는 전방추적 퍼프모형은 정상상태의 연속 오염원의 경우에 동일한 질량을 갖는 다수의 퍼프를 이용하여 수치모의를 수행한다. 그러므로 전방추적 퍼프모형은 각 퍼프들간의 중첩정도가 일정하지 않아 일정한 중첩정도를 갖는 후방추적 퍼프모형에 비하여 정확도나 계산효율이 떨어진다. 이러한 효과를 분석하기 위하여 본 연구에서는 무차원 퍼프중첩계수를 정의하였다. 퍼프중첩계수가 큰 경우에는 퍼프의 크기에 비하여 퍼프중심간의 거리가 멀리 떨어져 있으므로 농도분포 모의결과의 정확성은 감소하였다. 개발된 퍼프모형을 검증하고 장·단점을 분석하기 위하여 본 연구에서는 흐름이 일정한 경우와 전단흐름의 경우에 대하여 이송·확산 수치모의를 수행하였으며, 이를 각각의 경우의 해석해 결과와 비교·분석하였다. 후방추적 퍼프모형은 전방추적 퍼프모형에 비하여 사용된 퍼프수와 관계없이 적은 오차를 발생하였으며, 전체적으로 퍼프모형이 입자모형보다는 훨씬 적은 수의 계산을 통하여 보다 작은 오차를 나타낼 수 있다는 것을 알 수 있었다. 그러나 Gaussian 분포의 퍼프모형은 전단흐름에서의 긴 유선형 농도분포를 모의할 수 없었고, 이에 관한 오차는 전단계수가 증가함에 따라 비선형적으로 증가하였다. 향후, 이와 같은 보다 다양한 흐름영역에서 장·단점 분석을 수행한 후에 각각의 Lagrangian 모형의 장점만을 갖는 모형결합 방법을 제시할 수 있을 것으로 판단된다.

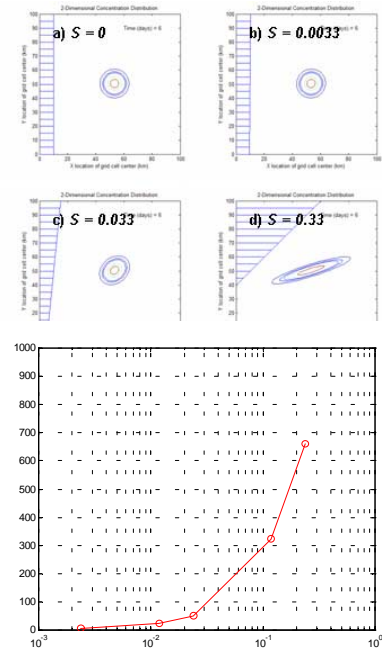


그림 7. 전단흐름 오차분석

#### 감 사 의 글

본 연구는 한국과학재단의 해외 Post-doc. 연수지원에 의하여 수행되었으며, 미국 MIT 토목환경공학과의 E. Eric Adams 교수의 자문과 박사과정에 재학중인 Peter H. Israelson의 도움에 감사드립니다.

#### 참 고 문 헌

1. Adams, E.E., R. Kossik, and Baptista, A.(1986). Source Representation in a Numerical Transport Model, Lisbon.
2. Heemink, A.(1990). Stochastic modeling of dispersion in shallow water, Stochastic Hydrology and Hydraulics, Vol. 4, pp. 161-174.
3. Reynolds, A.M.(2000). On the application of a Lagrangian particle-puff model to elevated sources in surface layers with neutral stability., Journal of Applied Meteorology, Vol. 39, No. 7, pp. 1218-1228.
4. Roberts, P.J.(1999). Modeling Mamala Bay outfall plumes. II: far field, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 125, No. 6, pp. 574-583.

5. Taylor, J.A.(1989). A stochastic Lagrangian atmospheric transport model to determine global CO<sub>2</sub> sources and sinks - a preliminary discussion, *Tellus*, Vol. 41B, pp. 272-285.
6. Tompson, A.F.B. and Gelhar, L.W.(1990). Numerical simulation of solute transport in three-dimensional, randomly heterogeneous porous media, *Water Resources Research*, Vol. 26, No. 10, pp. 2541-2562.