

전철선로 임피던스계산에 관한 연구

A Study on Electrified Railway Traction System Impedance Calculation

이준애¹⁾ 김왕관²⁾ 이종우³⁾
LEE Heeyong KIM Wangoon LEE Jongwoo

ABSTRACT

Impedance calculations of electric railway traction systems is essential to define characteristics and to design it. The self impedance is defined voltage drop rate per unit length, the mutual impedance is represented as a voltage induced to transmission line from transmission line. The self and the mutual impedance are influenced by ground return currents. The earth is considered as a semi-infinitely extended non-ideal conductor. The current of transmission line produces earth current induced magnetically and it flow through a path having minimum impedance. Carson proposed the impedance calculation formula using wave equations and magnetic field equations. Though the formula have an improper equation, that is still used as a standard impedance calculation method. This paper introduced an impedance calculation method that the complex depth of earth return method assumes that the current in conductor returns through an imagined earth depth path located directly under original conductor at a depth of $\sqrt{2}$. In this paper, we showed that this proposed method has a closed form and is easier than Carson's.

1. 서 론

전철의 전력전송라인의 임피던스 측정은 시스템의 설계와 특성을 정의하는 매우 중요한 요소 중의 하나이다. 전송선 임피던스는 자기임피던스와 상호임피던스 등 2개의 요소로 나누어지며, 자기임피던스는 전송선을 통하여 대지류에 대한 단위 길이당 전압강하 비율이며, 상호임피던스는 도체의 전류에서 도체에 유겨되는 전압 비율을 의미한다. 자기임피던스와 상호임피던스는 대지귀환전류에 영향을 받는다. 대지는 반 무한대 비 이상적인 도체로 간주된다. 전송선에 흐르는 전류는 전송선 아래에 퍼져있는 자기적 유도된 대지 귀환전류를 발생시키며, 가장 낮은 임피던스 경로로 흐른다. Carson은 전류의 흐름을 파동식과 사장을 이용하여 임피던스를 구하였으며, 이 식에는 closed form를 가지고 있지 않으나, 아직까지 임피던스 계산에 표준방법으로 사용되고 있다.

길이가 짧은 수 10km 정도의 도선은 저항과 임피던스만을 고려해도 충분하다. 전송라인의 완벽하고 정확한 분석은 에너지의 전달이 필드를 통해서 이루어지기 때문에 선로근처의 완벽한 전자기장 해석이 필요하다. 임피던스의 해석은 일반적으로 분포 회로망에서 한 선로의 특성은 선로에 따라서 평면파로 진행한다는 가정에 따라 단순화시킬 수 있다. 이러한 가정은 쪽에 비해서 선로의 길이가 긴 철도 급전선과 같은 시스템에 적절하다. 급전회로에서 정확한 임피던스의 계산은 보호 계층 설정하거나, 전압강하 및 전류량 등의 측정에 필요하다. Carson 방법에 의한 선로의 임피던스 계산은 복소수 항목을 갖는 부정적분을 포함하는 식이다. 무한급수에 의해 Carson의 식을 계산하는 방식이 제안되었으며, 이 방식을 적주파 및 고주파에 대해서 적절한 값을 얻을 수 있다. 반면에 각 주파수에 대해서 무한급수의 주어진 범위 내에서만 값이 유효하다.

본 논문에서는 가공선의 바로 지표아래 아래 가장 귀환 전류도선을 가상하여 임피던스를 구하는 방법을 소개하였다. 이 방법은 Carson 식에서 나타나는 improper 적분형태를 피할 수 있으며, Carson의 방법보다 임피던스를 구하는 것이 용이하다는 것을 보였다.

2. Carson Method

임피던스의 계산식은 Carson에 의해서 제안된 대지 임피던스 계산 방법이 가장 널리 사용되고 있다[1]. 대지 귀로에서 Carson은 대지의 매체가 도전율을 갖는 점을 고려하여 대지 임피던스를

- 1 서울산업대학교 철도전문대학원
- 2 서울산업대학교 철도전문대학원
- 3 한국철도기술연구원 전기신호연구본부 책임연구원

구하였다. 대기 임피던스를 구하기 위해 매질에서 전기장이 파동특성을 갖는 것을 고려하고, 파동 방정식의 일반 해 및 경계 조건을 이용하여 모델링하여 대기권으로 임피던스를 구하였다.

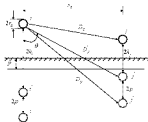


그림 1 전송도체 i 및 j 와 전송도체 i' 및 j' , skin depth p

Carson은 자기임피던스 및 상호임피던스를 $Z_{ii} = Z_{ii}^0 + Z'_{ii}$ 와 $Z_{ij} = Z_{ij}^0 + Z'_{ij}$ 로 나타내었다. Z_{ii}^0 와 Z_{ij}^0 는 대지가 완전한 도체라는 것을 고려하여 구한 임피던스이며, Z'_{ii} 와 Z'_{ij} 는 대지가 유한도체라는 것을 고려한 항목이다. Carson의 식에서 Z_{ii} 와 Z_{ij} 는 다음과 같이 정의된다.

$$Z_{ii} = z + j2\omega \ln((h_i + h'_i)/r_d) + 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + j - \mu}) e^{-2h_i \mu} d\mu \quad (1)$$

$$Z_{ij} = j2\omega \ln(D'_{ij}/D_{ij}) + 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + j - \mu}) e^{-(h_i + h'_j)\mu} \cos x'_{ij} \mu d\mu \quad (2)$$

단

$$D_{ij} = \sqrt{(h_i - h'_j)^2 + x_{ij}^2}$$

$$D'_{ij} = \sqrt{(h_i + h'_j)^2 + x_{ij}^2}$$

$$h'_i = h_i \sqrt{\alpha}$$

$$h'_j = h_j \sqrt{\alpha}$$

$$x_{ij} = x_{ij} \sqrt{\alpha}$$

앞 절로 부터, 대기권한 직렬 자기임피던스는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Z_{ii} = Z^0 + Z' \quad (3)$$

상호임피던스는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z_{ij} = Z_{ij}^0 + Z'_{ij} \quad (4)$$

단 Z^0 와 Z_{ij}^0 는 대지가 완전도체라는 가정하여 각각 자기와 상호임피던스이다.

$$Z' = J_{ii} = 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i - \mu}) e^{-2h_i \mu} d\mu \quad (5)$$

$$Z'_{ij} = J_{ij} = 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i - \mu}) e^{-(h_i + h'_j)\mu} \cos x'_{ij} \mu d\mu \quad (6)$$

유전체에서 회로상수와 전자기장의 계산은 다음과 같은 무한적분을 계산을 하여야 한다.

$$K(p, q) = J = \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i - \mu}) e^{-\mu q} \cos \mu p d\mu \quad (7)$$

Carson의 식을 목적에 맞게 변형을 시키면 다음과 같이 된다. 다음의 식 (8)과 (9)는 대지의 부자율 $\mu = \mu_0$ 에 대해서 Carson이 유도해낸 식이다.

$$Z_{ii} = j2 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(2h_i / r_d) + \omega \frac{\mu}{\pi} J_{ii} \quad (8)$$

$$Z_{ij} = j2\omega \ln(D'_{ij} / D_{ij}) + \omega \frac{\mu}{\pi} J_{ij} \quad (9)$$

단

$$J_{\#} = \int_0^{\infty} \frac{j e^{-2h_i \lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma}} a \lambda = R_g + jX_g \quad (10)$$

$$R_g = 4\omega \times 10^{-7} \left(\frac{\pi}{8} - b_1 k + b_2 \left((C_2 - \ln k) k^2 \right) + b_3 k^3 - d_4 k^4 - \dots \right) \quad (11)$$

$$X_g = 4\omega \times 10^{-7} \left(\frac{1}{2} (0.6159315 - \ln k) + b_1 k - d_2 k^2 + b_3 k^3 - b_4 \left((C_4 - \ln k) k^4 \right) + \dots \right) \quad (12)$$

$$J_{ij} = \int_0^{\infty} \frac{j e^{-\lambda(h+k)\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma}} \cos \lambda a \lambda = R_{gm} + jX_{gm} \quad (13)$$

$$R_{gm} = 4\omega \times 10^{-7} \left(\frac{\pi}{8} - b_1 k_m \cos \theta + b_2 \left((C_2 - \ln k_m) k_m^2 \cos 2\theta + \theta k_m^2 \sin 2\theta \right) + b_3 k_m^3 - d_4 k_m^4 \cos 4\theta + \dots \right) \quad (14)$$

$$X_{gm} = 4\omega \times 10^{-7} \left(\frac{1}{2} (0.6159315 - \ln k_m) + b_1 k_m \cos \theta - d_2 \left((C_2 - \ln k_m) k_m^2 \cos 2\theta + \theta k_m^2 \sin 2\theta \right) + b_3 k_m^3 - b_4 \left((C_4 - \ln k_m) k_m^4 \cos 4\theta + \theta k_m^4 \sin 4\theta \right) + \dots \right) \quad (15)$$

단

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad b_2 = \frac{1}{16}, \quad b_i = b_{i-2} \frac{\text{sign}}{k(i+2)}$$

$$C_i = C_{i-2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+2}, \quad C_2 = 1.3659315,$$

$$d_i = \frac{\pi}{4} b_i$$

h, h_i, h_j : 지상으로부터 도체의 높이

b_i 의 부호인 "sign"은 4개 모든 항목에서 변하며, 그 부호는 $i=1, 2, 3, 4$ 경우에는 $\text{sign}=+1$ 이 되고, $i=5, 6, 7, 8$ 인 경우에는 $\text{sign}=-1$ 이 된다. 식 (11), (12), (13) 및 (14)은 주파수에 관련된 것이며, 상수들은 다음과 같이 나타내어진다.

$$k = 4\pi\sqrt{5} \times 10^{-4} \quad 2h_i \sqrt{j\omega\rho}, \quad k_m = 4\pi\sqrt{5} \times 10^{-4} \quad D_{ij} \sqrt{j\omega\rho}$$

단 j 는 주파수이며, ρ 는 대지 저항률이다. θ 는 $i-i'$ 와 $i-j'$ 의 사이 각으로서 그림 3에서 나타낸 것과 같으며, 다음과 같이 정의된다.

$$\theta = \sin^{-1}(x_{ij}/D_{ij})$$

이 식은 무한 직분의 형태 혹은 급수의 형태를 가지고 있어, 보다 간단한 식을 유도해내는 것이 필요하다.

3. 연속적 복층 대지방법

3.1 대지귀환 모델링

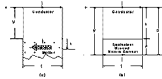


그림 2 대지귀환전류의 모델링 (a)는 전류가 대지 전체를 퍼져 흘러가는 것 경우 (b)는 대표값 동로

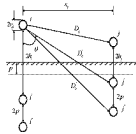


그림 3 전송도체 i 및 j 와 전송도체 i' 및 j' , skin depth ρ

Carson식의 대지귀환 값에 관련된 보정항을 Z'_i 과 Z'_j 은 그림 2의 (a)를 나타낸 것으로 무한 직분항을 포함하고 있다. 따라서 그림 2의 (a)의 면적을 무게 중심을 그림 2(b)와 같이 나타내면은 Carson의 식을 간단하게 할 수 있다. 그림 2(b)는 대지류 공기 층에 해당하는 조건으로 변환하면은 그 조건에 해당하는 p 에서 상응한 도체가 있는 것으로 나타낼 수 있다.

$$Z_i = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2(h_i + p)}{r_i} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(h_i + h_j + 2p)^2 + x_{ij}^2}}{\sqrt{(h_i - h_j)^2 + x_{ij}^2}} \\ &= j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{ij}'}{D_{ij}} \end{aligned} \quad (17)$$

윗 식은 대지귀환 전류를 귀선 도체가 공기 층에 있는 것으로 모델링을 하여 구한 식이다. 따라서 대지 깊이 p 를 구하는 것이 중요한 문제 중 하나이다.

3.2 균일 대지 모델링

그림 2에서 1는 단위 길이 당 전류를 나타낸다면 기술후다면, 그 때에는 $H_0 = H(0) = i$ 이다. 단 $H(x)$ 는 깊이 x 에서 자기장 세기이다. 관련된 미분방정식은 방정식을 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= -j\omega\mu_0 H \\ \frac{dH}{dx} &= -\sigma E \end{aligned} \quad (18)$$

$k-1$ 층과 k 층의 관계는 그림 4에서 나타낸 것과 같이 나타낼 수 있다. 모델링은 층간($k-1$, k)의 전·자기장의 세기(E_{k-1} , H_{k-1} 및 E_k , H_k)의 관계를 공기층의 투자율 μ_0 , 도전율 σ_k 표피의 깊이 P_k 층간깊이와 피오프와 감쇄율의 관계 θ_k 전장과 자장과의 계는 ζ_k 로 나타내었다.

그림 3을 참조하여 k 층에 대한 것은 그림 3을 참조하면은 해가 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} E_k \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k-1} \\ H_{k-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$A_k = D_k = \frac{\theta_k - \theta_k^{-1}}{2} = \cosh \frac{\Delta k}{P_k} \quad (20)$$

$$B_k = \zeta_k (\theta_k - \theta_k^{-1}) / 2 = \zeta_k \sinh \Delta k / P_k \quad (21)$$

$$C_k = \frac{1}{\zeta_k} \frac{\theta_k - \theta_k^{-1}}{2} = \frac{1}{\zeta_k} \sinh \frac{\Delta k}{P_k} \quad (22)$$

단

$$P_k = 1/\sqrt{j\omega\mu_0\sigma_k}, \quad \zeta_k = \sqrt{j\omega\mu_0/\sigma_k}, \quad \theta_k = e^{-\frac{\Delta k}{P_k}}$$

이러한 식은 리킬 혹은 파동방정식을 이용하여 얻을 수 있다. F 를 전전파 및 B 를 후전파 라고 할 때, 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} E &= E_F + E_B \\ H &= H_F + H_B \end{aligned} \quad (23)$$

$$E_F = \zeta_k H_F = E_{F_1} e^{-\frac{z}{P_k}} \quad (24)$$

$$E_B = -\zeta_k H_B = E_{B_1} e^{\frac{z}{P_k}} \quad (25)$$

$$H_F = H_{F_1} e^{-\frac{z}{P_k}} \quad (26)$$

$$H_B = H_{B_1} e^{\frac{z}{P_k}} \quad (27)$$

마지막 층 $n+1$ 층에서는 후진파가 소멸된다. 따라서

$$E_n/H_n = \zeta_{n+1} \quad (28)$$

$$E_0/H_0 = \zeta_1 = \zeta \quad (29)$$

식 (20)의 경우에는 다음과 같은 식을 나타낸다.

$$H = H_0 e^{-\frac{x}{p}} \quad (30)$$

대지에서 전체 플럭스는 다음과 같다.

$$\phi = \mu_0 \int_0^{\infty} Hax = p\mu_0 H_0 \quad (31)$$

복합길이 p 에서 같은 플럭스 ϕ 으로부터 그림 2(b)에서 정의된 것과 같다. 따라서, 균일한 대지와 $\mu = \mu_0$ 에서 복합대지 침투 깊이는

$$p = 1/\sqrt{j\omega\mu_0 c} \quad (32)$$

이며

$$\delta = 1/\sqrt{\pi j\omega\mu_0 c} \quad (33)$$

이 된다.

그리고

$$1/p = (1+j)/\delta \quad (34)$$

3.3 복층 대지 모델링

복층의 경우에, 식(19)는 다음과 같이 적용할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} E_k \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k0} & B_{k0} \\ C_{k0} & A_{k0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

특히, $k=n$ 에 대해서, 식 (26)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} E_n \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n0} & B_{n0} \\ C_{n0} & A_{n0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

식(21)을 이용하여 다시 전개하면

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n0} & -B_{n0} \\ -C_{n0} & A_{n0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix} H_n \quad (37)$$

H_n 을 제거를 하면

$$E_0 = (\zeta_{n+1}A_{n0} - B_{n0})H_0 / (A_{n+1} - \zeta_{n+1}C_{n0}) \quad (38)$$

$H_0 = i$ 이기 때문에, E_0 는 식(27)로부터 구할 수 있다. 따라서 k 층에서의 플럭스는 식(31)을 적분함으로써 얻어질 수 있다.

$$\phi_k = \mu_0 \int_0^{2k} Hax = \frac{1}{j\omega} (E_{k-1} - E_k) \quad (39)$$

전체 플럭스는

$$\phi = \sum \phi_k \quad (40)$$

이식은 식(23)은 복합길이를 계산이 가능하도록 한다.

$$p = \sum \phi_k / \mu_0 H_0 \quad (41)$$

3.4 연속적 변하는 대지 모델링

복층 대지의 경우를 조건에 의한 절차에 의해서 연속문제에 간략화 할 수 있다.

식(19)은 식(18)을 간략화 시킬 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j\omega\mu_0 \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \quad (42)$$

식 (18)의 적분은 c 가 x 의 함수이기 때문에, 폐쇄형 해석적인 형태로 적분이 불가능하다. 그러나 수치적 적분은 초기조건 $E(0) = E_0$, $H(0) = H_0$ 값을 가지고는 간단하게 할 수 있다. E_0 를 모르므로, x 가 무한히 큰 값(x_{∞})에서 다음에 오는 조건을 만족할 때까지 반복적인 방법에 의해서 해를 구하여야 한다. 반향파

$$E_B = \frac{1}{2}(E(x_\infty) - \zeta(x_\infty)H(x_\infty)) \quad (43)$$

는 소멸되어야 한다.

그 때에는 식(18)로부터,

$$\phi = \int_0^{x_\infty} \mu_0 H dx = \frac{1}{j\omega}(E_0 - E_{x_\infty}) = \frac{E_0}{j\omega} \quad (44)$$

양극적으로, 복합층 깊이는 다음 관계로부터 얻을 수 있다.

$$p = \frac{-\phi}{\mu_0 H_0} \quad (45)$$

복합층 깊이 p 를 고려하여 보이면, p 는 귀환전류의 무게중심을 나타낸다.

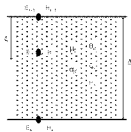


그림 4 k층의 모델링

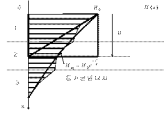


그림 5 $H(x)$ 무게중심으로서의 복합층 깊이 p

그림 3에서 보는 것과 같이 $H(x)$ 의 부분은 빗금이 쳐있다. 등가 균일 대지로 하면은

$H_{eq} = H_0 e^{-\frac{x}{p}}$ 으로된다. $H(x)$ 의 형태와 상관이 없이 무게중심을 구하면은 깊이 p 에 해당하는 사각형과 동일하게 된다.

따라서 식(8)과 (9)를 식(16) 및 식(17)으로 간편하게 표현할 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 Carson의 임피던스 계산방법을 대지/도체 귀환전류를 이용하여 하게 하였다. 이 방법의 이점은 간편성과 간단한 컴퓨터 프로그램을 이용하여 쉽게 정확한 값을 얻을 수가 있다. Carson의 접근식을 쉽게 계산할 수 있다 할지라도, 특정 주파수 대역에서는 검증이 필요하다. 반면에 복합층 깊이 방법은 간단하면서 넓은 대역에서 임피던스 계산이 가능하다. 본 논문에서는 Carson의 식을 간단하게 하게 표시할 수 있는 해석적인 방법을 시도하여 식을 도출하였다.

* 참고문헌

1. Yaw-Juen Wang and Shi-Jie LIU " A Review of Method for Calculation of Frequency-dependent Impedance of Overhead Power Transmission Lines", Proc. Natl. Conc. ROC(A) Vol. 25, No. 6, 2001, pp. 329-338
2. Sergey L. Loyka, "On Calculation of the Ground Transient Resistance of Overhead Lines", IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility, vol. 41, pp. 193-195, August 1999.
3. A. Deri et al. "The Complex Ground Return Plane - A Simplified Model For Homogeneous And Multi-Layer Earth Return", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 100(8), 3686-3693, 1981
4. 장길수, "도시철도표준화 연구개발사업 (PSCAD/EMTDC를 이용한 도시철도 교류 급전시스템 해석모델 개발 및 적용), 한국철도기술연구원, 2002
5. 이준배의 1인, "전기철도에서 급전선로의 Line Impedance 계산에 관한연구", 춘계철도학회 학술대회, 2004
6. 이준배의 2인, "Modified Carson's Method에 의한 전차선로 임피던스계산", 하계전기학회 학술대회, 2004(to be published)