

축하중을 받는 비대칭 박벽 곡선보의 엄밀한 동적강도행렬

Exact Dynamic Stiffness Matrix of Nonsymmetric Thin-walled Curved Beams Subjected to Axial Forces

윤희택*
Yoon, Hee-Taek

박영곤*
Park, Young-Kon

김문영**
Kim, Moon-Young

ABSTRACT

Derivation procedures of exact dynamic stiffness matrices of thin-walled curved beams subjected to axial forces are rigorously presented for the spatial free vibration analysis. An exact dynamic stiffness matrix is established from governing equations for a uniform curved beam element with nonsymmetric thin-walled cross section. Firstly this numerical technique is accomplished via a generalized linear eigenvalue problem by introducing 14 displacement parameters and a system of linear algebraic equations with complex matrices. Thus, displacement functions of displacement parameters are exactly derived and finally exact stiffness matrices are determined using element force-displacement relationships. The natural frequencies of the nonsymmetric thin-walled curved beam are evaluated and compared with analytical solutions or results by ABAQUS's shell elements in order to demonstrate the validity of this study.

1. 서론

구조공학의 다양한 응용분야에서 박벽보는 가장 널리 사용되고 있는 구조 요소이다. 특히 I형, 채널, 영글단면 형태를 가지는 박벽보 구조는 단위중량에 대한 강성이 매우 높아 실무에서 활발히 적용되고 있다. 그러나 비대칭 단면을 갖는 박벽보 요소는 구조의 기동이 복잡하여 단순한 경계조건이 주어지지 않는 한, 고유진동수와 진동모우드 등의 동적 특성과 좌굴하중과 같은 정적 특성에 대한 엄밀한 해석이 매우 어렵다. 이러한 이유로 박벽보 요소의 자유진동 및 안정성 해석을 위한 대부분의 연구^[3-7]에서는 Hermitian다항식 등을 형상함수로 사용함으로써 근사적인 요소 강도행렬을 산정하였다.

본 연구에서는 박벽보 구조의 동적해석을 위하여 경계조건에 제약을 받지 않으며, 엄밀한 해를 얻을 수 있는 일관된 정식화 기법을 제시한다. 변분법을 이용하여 도실에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지를부터 운동방정식과 힘-변위 관계식을 유도한다. 이러한 지배방정식은 고차의 연립미분방정식이므로 14개의 변위 파라미터를 도입하여 1차 연립미분방정식으로 변환하고, 미분방정식에 대응하는 선형 고유치 문제를 풀어 엄밀한 치점함수를 얻는다.

* 한국철도기술연구원, 선철연구원, 정희원

** 성균관대학교 교수

여기에 세단력-변위 관계식을 적용함으로써 엄밀한 동적 14×14 요소강도행렬을 유도한다. 이러한 요소 강도행렬은 해석해로서 요소의 수와 계산시간을 대폭 줄일 수 있으며, 다양한 하중과 경계조건에 대한 엄밀해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 본 연구에서 개발한 수치해석 기법의 타당성을 검증하기 위하여 비대칭 단면을 가지는 단순지지, 캔틸레버 박벽보 구조에 대한 고유진동수를 산정하고, 해석해, 혹은 ABAQUS⁽¹¹⁾의 쉘요소를 이용한 결과와 비교한다.

2. 비대칭 박벽보의 운동방정식과 힘-변위 관계식

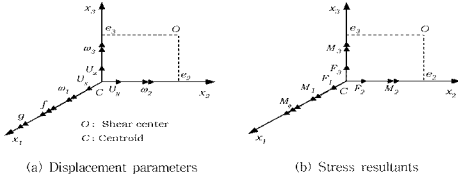


그림 1. Notation for displacement parameters and stress resultants

그림 1.(a)는 도상에서 정의한 7개의 변위파라미터를 나타낸다. U_x , U_y , U_z 와 $\omega_1 (= \theta)$, $\omega_2 (= -U_x' + \frac{1}{R} U_x)$, $\omega_3 (= U_y')$ 는 각각 x_1 , x_2 , x_3 방향으로의 강제이동변위와 강제회전변위를 나타내며, $f (= -\theta' - \frac{1}{R} U_y')$ 는 x_1 방향으로의 뒹(warping)을 정의하는 파라미터이다. 그리고 그림 1.(b)는 비대칭 박벽보의 세단력을 나타낸다. 여기서 F_1 , F_2 , F_3 는 각각 x_1 방향의 축력과 x_2 , x_3 방향의 전단력이다. 또한 M_2 , M_3 는 x_2 , x_3 방향의 휨모멘트, M_1 , M_5 는 x_1 방향의 비틀모멘트와 바이모멘트(bimoment)를 나타낸다. 문헌⁽¹¹⁾에 의하면, 전단변형효과를 무시하는 비대칭 단면을 갖는 박벽보의 총포텐셜에너지 Π 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G - \Pi_M - \Pi_{ext} \quad (1a)$$

여기서, Π_E , Π_G , Π_M , Π_{ext} 는 각각 단상변형에너지, 초기단면력에 의한 포텐셜에너지, 운동에너지, 부재단부의 증분부재력에 의한 에너지를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \Pi_E = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EA \left(U_x' + \frac{U_x}{R} \right)^2 + E\hat{I}_2 \left(U_z'' + \frac{U_z}{R^2} \right)^2 + E\hat{I}_3 \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right)^2 \right. \\ \left. + E\hat{I}_4 \left(\theta' + \frac{U_y''}{R} \right)^2 + G \left(\theta' + \frac{U_y''}{R} \right)^2 + 2E\hat{I}_{23} \left(U_z'' + \frac{U_z}{R^2} \right) \left(\theta' + \frac{U_y''}{R} \right) \right. \\ \left. + 2E\hat{I}_{34} \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \left(\theta' + \frac{U_y''}{R} \right) + 2E\hat{I}_{25} \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \left(U_z'' + \frac{U_z}{R^2} \right) \right\} ax_1 \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ {}^oF_1 \left(U_y''^2 + \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right) + {}^oM_5 \left(\theta' + \frac{U_y''}{R} \right)^2 - {}^oF_3 (U_y' \theta) \right. \\ \left. + {}^oM_2 \left(\left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \theta - U_y' \left(\theta' + \frac{U_y''}{R} \right) \right) + \frac{2}{R} {}^oM_4 \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left(\theta' + \frac{U_y''}{R} \right) \right. \\ \left. + {}^oM_3 \left(\theta \left(U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) - \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left(\theta' + \frac{U_y''}{R} \right) \right) + {}^oF_2 \theta \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \right. \\ \left. + {}^oM_1 \left\{ \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left(U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) - U_y' \left(U_z'' - \frac{U_y''}{R} \right) \right\} \right\} ax_1 \end{aligned} \quad (1c)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_M = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^L \left\{ A(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) + \tilde{I}_0 \theta^2 + \tilde{I}_2 \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 - 2 \frac{I_2}{R} U_y \theta \right. \\
& - 2 \frac{I_0}{R} U_x \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) + \tilde{I}_3 U_y'^2 + \tilde{I}_3 \left(\theta' + \frac{U_y'}{R} \right)^2 + 2 \tilde{I}_{3\theta} U_y' \left(\theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \\
& + 2 \tilde{I}_{2\theta} \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left(\theta' + \frac{U_y'}{R} \right) - 2 \frac{I_{2\theta}}{R} U_x \left(\theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \\
& \left. + 2 \frac{I_{2z}}{R} U_y' \left(U_z' - \frac{U_x}{R} \right) + 2 I_{23} \left(U_y' U_z' - \frac{2}{R} U_x U_y' + \frac{1}{R} U_z \theta \right) \right\} \alpha x,
\end{aligned} \tag{1d}$$

$$\Pi_{ext} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_e^T \mathbf{F}_e \tag{1e}$$

여기서 E 는 탄성계수, G 는 전단탄성계수, A 는 단면적, I, \tilde{I}, \hat{I} 등은 도심에서 정의되는 단면 상수들이며, 구체적인 계산식은 참고문헌¹⁾을 참조할 수 있다. J 는 비틀림상수를 나타내며, ρ, ω 는 각각 부재의 밀도와 진동수를 나타낸다. ()'은 x 에 대한 미분을 표시낸다. $\mathbf{U}_e, \mathbf{F}_e$ 는 각각 부재 양단의 절점변위 및 절점력벡터를 나타낸다. 이제 U_x, U_y, U_z 와 θ 에 대하여 식 (1)의 변분을 취하면 아래와 같이 비대칭 박막 곡선보의 운동방정식과 힘-변위 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
& -EA \left(U_x'' + \frac{1}{R} U_z' \right) - \rho \omega^2 \left(A + \frac{1}{R^2} I_2 \right) U_x + \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(\tilde{I}_2 + I_2 \right) \left(U_z' - \frac{1}{R} U_x \right) \\
& + \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(\tilde{I}_{2\theta} + I_{2\theta} \right) \left(\theta' + \frac{1}{R} U_y' \right) + \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} I_{2z} + 2I_{23} \right) U_y' \\
& - \frac{1}{R} {}^o F_1 \left(U_z' - \frac{1}{R} U_x \right) = 0
\end{aligned} \tag{2a}$$

$$\begin{aligned}
& E \hat{I}_3 \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) + \frac{1}{R} E \hat{I}_3 \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) - \frac{1}{R} G J \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\
& + \frac{1}{R} E \hat{I}_{2\theta} \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_x'' \right) + E \hat{I}_{3\theta} \left\{ \frac{1}{R} \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) + \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) \right\} \\
& + E \hat{I}_{23} \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_x'' \right) - \rho \omega^2 A U_y + \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(I_2 + \tilde{I}_3 + \frac{1}{R} \tilde{I}_{3\theta} \right) \theta \\
& + \rho \omega^2 \left(\tilde{I}_3 + \frac{1}{R} \tilde{I}_{3\theta} \right) \left(U_y - \frac{1}{R} \theta \right) + \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R} \tilde{I}_3 + \tilde{I}_{3\theta} \right) \left(\theta' + \frac{1}{R} U_y' \right) \\
& + \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R} \tilde{I}_{2\theta} + \frac{1}{R} I_{2z} + I_{23} \right) \left(U_z'' + \frac{1}{R} U_x' \right) + \rho \omega^2 \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{R} I_{2\theta} + I_{23} \right) U_x \\
& - \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \tilde{I}_{2\theta} + \frac{1}{R} I_{2\theta} + \frac{1}{R} I_{2z} + 2I_{23} \right) \left(U_x' + \frac{1}{R} U_z \right) \\
& - {}^o F_1 U_y'' - \frac{1}{R} {}^o M_y \left(\theta' + \frac{1}{R} U_y' \right) + {}^o M_2 \left(\theta' + \frac{1}{R} U_y' \right) = 0
\end{aligned} \tag{2b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R} EA \left(U_x' + \frac{1}{R} U_z \right) + E \hat{I}_2 \left\{ \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_x'' \right) + \frac{1}{R^2} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_x \right) \right\} \\
& E \hat{I}_{2\theta} \left\{ \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) + \frac{1}{R^2} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \right\} + E \hat{I}_{23} \left\{ \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{R^2} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) \right\} - \rho \omega^2 \left(A - \frac{1}{R^2} I_2 \right) U_x + \rho \omega^2 \tilde{I}_2 \left(U_x'' + \frac{1}{R^2} U_x \right) \\
& - \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(\tilde{I}_2 + I_2 \right) \left(U_x' + \frac{1}{R} U_z \right) + \rho \omega^2 \tilde{I}_{2\theta} \left(\theta' + \frac{1}{R} U_y' \right) + \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R} I_{2z} + I_{23} \right) \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) \\
& + \rho \omega^2 \frac{1}{R^2} I_{2z} \theta - {}^o F_1 \left(U_z'' - \frac{1}{R} U_x' \right) = 0
\end{aligned} \tag{2c}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{R} E\widehat{I}_3 \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) + E\widehat{I}_\phi \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) - GJ \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\
& + E\widehat{I}_{2\phi} \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_z'' \right) + E\widehat{I}_{3\phi} \left(\left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) - \frac{1}{R} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \right) \\
& - \frac{1}{R} E\widehat{I}_{23} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) - \rho\omega^2 \left(\widehat{I}_\phi - \frac{1}{R} \widehat{I}_{3\phi} \right) \theta + \rho\omega^2 \frac{1}{R} I_2 U_y \\
& + \rho\omega^2 \widehat{I}_\phi \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) + \rho\omega^2 \widehat{I}_{3\phi} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) + \rho\omega^2 \widehat{I}_{2\phi} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) \\
& - \rho\omega^2 \frac{1}{R} \left(\widehat{I}_{2\phi} + I_{2\phi} \right) \left(U_x' + \frac{1}{R} U_x \right) + \rho\omega^2 \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} I_{2\phi} - I_{23} \right) U_z \\
& - {}^c M_\theta \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) + {}^c M_2 \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) = 0
\end{aligned} \tag{2d}$$

그리고,

$$\begin{aligned}
F_1 = EA \left(U_x' + \frac{1}{R} U_x \right) + \frac{1}{R} E\widehat{I}_2 \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) + \frac{1}{R} E\widehat{I}_{2\phi} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\
+ \frac{1}{R} E\widehat{I}_{23} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right)
\end{aligned} \tag{3a}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = -E\widehat{I}_3 \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) - \frac{1}{R} E\widehat{I}_\phi \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) + \frac{1}{R} GJ \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\
- \frac{1}{R} E\widehat{I}_{2\phi} \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_z'' \right) - E\widehat{I}_{3\phi} \left(\frac{1}{R} \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) + \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \right) \\
- E\widehat{I}_{23} \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_z'' \right) - \rho\omega^2 \left(\widehat{I}_3 + \frac{1}{R} \widehat{I}_{3\phi} \right) U_y'' - \rho\omega^2 \left(\frac{1}{R} \widehat{I}_\phi + \widehat{I}_{3\phi} \right) \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\
- \rho\omega^2 \left(\frac{1}{R} \widehat{I}_{2\phi} + \frac{1}{R} I_{223} + I_{23} \right) \left(U_x' - \frac{1}{R} U_x \right) + \rho\omega^2 \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} I_{2\phi} + I_{23} \right) U_x \\
+ {}^c F_1 U_y'' + \frac{1}{R} {}^c M_\theta \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) - {}^c M_2 \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right)
\end{aligned} \tag{3b}$$

$$\begin{aligned}
F_3 = -E\widehat{I}_2 \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_z'' \right) - E\widehat{I}_{2\phi} \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) - E\widehat{I}_{23} \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) \\
- \rho\omega^2 \widehat{I}_2 \left(U_z'' - \frac{1}{R} U_x \right) + \rho\omega^2 \frac{1}{R} I_2 U_x - \rho\omega^2 \widehat{I}_{2\phi} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) \\
- \rho\omega^2 \left(\frac{1}{R} I_{223} + I_{23} \right) U_y'' + {}^c F_1 \left(U_x' - \frac{1}{R} U_x \right)
\end{aligned} \tag{3c}$$

$$\begin{aligned}
M_1 = -E\widehat{I}_\phi \left(\theta'''' + \frac{1}{R} U_y'''' \right) + GJ \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) - E\widehat{I}_{2\phi} \left(U_z'''' + \frac{1}{R^2} U_z'' \right) \\
- E\widehat{I}_{3\phi} \left(U_y'''' - \frac{1}{R} \theta'' \right) - \rho\omega^2 \widehat{I}_\phi \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) - \rho\omega^2 \widehat{I}_{3\phi} U_y'' \\
- \rho\omega^2 \widehat{I}_{2\phi} \left(U_x' - \frac{1}{R} U_x \right) + \rho\omega^2 \frac{1}{R} I_{2\phi} U_x + {}^c M_\theta \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) - \frac{1}{2} {}^c M_2 U_y''
\end{aligned} \tag{3d}$$

$$M_2 = E\widehat{I}_3 \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) + E\widehat{I}_{2\phi} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) + E\widehat{I}_{23} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) \tag{3e}$$

$$M_3 = E\widehat{I}_3 \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) + E\widehat{I}_{3\phi} \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) + E\widehat{I}_{23} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) + \frac{1}{2} {}^c M_2 \theta \tag{3f}$$

$$M_\phi = E\widehat{I}_\phi \left(\theta'' + \frac{1}{R} U_y'' \right) + E\widehat{I}_{2\phi} \left(U_z'' + \frac{1}{R^2} U_z \right) + E\widehat{I}_{3\phi} \left(U_y'' - \frac{1}{R} \theta \right) \tag{3g}$$

이렇게 도식에서 변위장을 정의한 비대칭 박막 곡선보의 운동방정식은 원과 비틀의 연계효과로 인하여 식 (2)과 같이 4개 연립 상미분방정식의 형태를 나타내며, 단순한 하중이나 경계조건이 주어지지 않는 한 엄밀해를 구하는 것은 매우 어렵다.

3. 박막보의 동적 요소강도행렬(dynamic element stiffness matrix)

3.1 엄밀한 변위함수의 유도

박막 곡선보의 동적 요소강도행렬을 산정하기 위하여 먼저 운동방정식 (2)과 1계 연립미분방정식 형태로 전환하기 위하여, 14개의 변위성분으로 구성되는 변위벡터를 다음과 같이 도입한다.

$$d(\mathbf{x}) = \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14} \rangle^T \quad (4)$$

여기서,

$$\begin{aligned} d_1 &= U_x, & d_2 &= U_x' + \frac{1}{R} U_x, \\ d_3 &= U_y, & d_4 &= U_y', & d_5 &= U_y'' - \frac{1}{R} \theta, & d_6 &= U_y''' - \frac{1}{R} \theta', \\ d_7 &= U_z, & d_8 &= U_z' - \frac{1}{R} U_x, & d_9 &= U_z'' + \frac{1}{R^2} U_x, & d_{10} &= U_z''' + \frac{1}{R^2} U_x', \\ d_{11} &= \theta, & d_{12} &= \theta' + \frac{1}{R} U_y', & d_{13} &= \theta'' + \frac{1}{R} U_y'', & d_{14} &= \theta''' + \frac{1}{R} U_y''' \end{aligned}$$

이제 식 (4)를 식 (2)에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 14개의 미분방정식을 얻는다.

$$d_1' = d_2 - \frac{1}{R} d_7 \quad (5a)$$

$$-EA d_2' = \rho \omega^2 \left(A + \frac{1}{R^2} I_2 \right) d_1 - \left\{ \rho \omega^2 \frac{1}{R} (\tilde{I}_2 + I_2) - \frac{1}{R} {}^o F_1 \right\} d_8 \quad (5b)$$

$$- \rho \omega^2 \frac{1}{R} (\tilde{I}_{2\phi} + I_{2\phi}) d_{12} - \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} I_{223} + 2I_{23} \right) d_4$$

$$d_3' = d_4, \quad d_4' = d_5 + \frac{1}{R} d_{11}, \quad d_5' = d_6 \quad (5c-e)$$

$$\begin{aligned} & \left(E\tilde{I}_3 + \frac{1}{R} E\tilde{I}_{3\phi} \right) d_6' + \left(\frac{1}{R} E\tilde{I}_4 + E\tilde{I}_{3\phi} \right) d_{11}' + \left(\frac{1}{R} E\tilde{I}_{2\phi} + E\tilde{I}_{23} \right) d_{10}' \\ &= \left\{ \frac{1}{R} GJ - \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R} \tilde{I}_\phi + \tilde{I}_{3\phi} \right) + \frac{1}{R} {}^o M_\phi - {}^o M_2 \right\} d_{13} + \rho \omega^2 A d_3 \\ & - \left\{ \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(I_2 + \tilde{I}_3 + \frac{1}{R} \tilde{I}_{3\phi} \right) - \frac{1}{R} {}^o F_1 \right\} d_{11} - \left\{ \rho \omega^2 \left(\tilde{I}_3 + \frac{1}{R} \tilde{I}_{3\phi} \right) - {}^o F_1 \right\} d_5 \\ & - \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R} \tilde{I}_{2\phi} + \frac{1}{R} I_{223} + I_{23} \right) d_9 + \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \tilde{I}_{2\phi} + \frac{1}{R} I_{2\phi} + \frac{1}{R} I_{223} + 2I_{23} \right) d_2 \\ & - \rho \omega^2 \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{R} I_{2\phi} + I_{23} \right) d_7 \end{aligned} \quad (5f)$$

$$d_7' = d_8 + \frac{1}{R} d_1, \quad d_8' = d_9 - \frac{1}{R} d_2, \quad d_9' = d_{10} \quad (5g-i)$$

$$\begin{aligned} & E\tilde{I}_2 d_{10}' + E\tilde{I}_{2\phi} d_{14}' + E\tilde{I}_{23} d_6' \\ &= - \left\{ \frac{1}{R} EA - \rho \omega^2 \frac{1}{R} (\tilde{I}_2 + I_2) + \frac{1}{R} {}^o F_1 \right\} d_2 - \left\{ \frac{1}{R^2} E\tilde{I}_2 + \rho \omega^2 \tilde{I}_2 - {}^o F_1 \right\} d_9 \\ & - \left\{ \frac{1}{R^2} E\tilde{I}_{2\phi} + \rho \omega^2 \tilde{I}_{2\phi} \right\} d_{13} - \left\{ \frac{1}{R^2} E\tilde{I}_{23} + \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R} I_{223} + I_{23} \right) \right\} d_5 \\ & + \rho \omega^2 \left(A - \frac{1}{R^2} I_2 \right) d_7 - \rho \omega^2 \frac{1}{R^2} I_{223} d_{11} \end{aligned} \quad (5j)$$

$$d_{11}' = d_{12} - \frac{1}{R} d_4, \quad d_{12}' = d_{13}, \quad d_{13}' = d_{14} \quad (5k-m)$$

$$\begin{aligned}
& E\widehat{T}_6 d_{14}' + E\widehat{I}_{26} d_{10}' + E\widehat{I}_{36} d_6' \\
& = \left\{ \frac{1}{R} E\widehat{T}_3 - \rho\omega^2 \widehat{I}_{36} - {}^oM_2 \right\} d_5 + \left\{ \left(GJ + \frac{1}{R} E\widehat{T}_{36} \right) - \rho\omega^2 \widehat{I}_6 + {}^oM_6 \right\} d_{13} \\
& \quad + \left\{ \frac{1}{R} E\widehat{I}_{23} - \rho\omega^2 \widehat{I}_{26} \right\} d_9 + \rho\omega^2 \left(\widehat{I}_6 - \frac{1}{R} \widehat{I}_{36} \right) d_{11} - \rho\omega^2 \frac{1}{R} I_2 d_3 \\
& \quad + \rho\omega^2 \frac{1}{R} (\widehat{I}_{26} + I_{26}) d_2 - \rho\omega^2 \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} I_{24} - I_{23} \right) d_7
\end{aligned} \tag{5n}$$

결과적으로 식 (5)는 상수계수를 가지는 1계 연립방정식이며, 행렬관계식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A d' = B d \tag{6}$$

여기서, A, B 의 각 요소는 참고문헌 (13)에 자세히 표현되어 있다. 식 (6)의 일반해를 구하기 위하여 다음과 같은 비대칭행렬에 대한 일반적인 고유치 문제를 생각한다.

$$\lambda A Z = B Z \tag{7}$$

A 와 B 는 비대칭 행렬이므로 이러한 고유치 문제를 풀기 위해서는 복소수 영역에서 고유치와 고유벡터를 구할 수 있어야 한다. 본 연구에서는 IMSL subroutine DGVCGR^[22]를 적용하여 식 (7)의 해를 구하며, 결국 다음과 같이 복소수 영역에서 14개의 고유치 및 고유벡터를 얻을 수 있다.

$$(\lambda_i, Z_i), \quad i = 1, 2, \dots, 14 \tag{8}$$

여기서 $Z_i = \langle z_{1i}, z_{2i}, z_{3i}, z_{4i}, z_{5i}, z_{6i}, z_{7i}, z_{8i}, z_{9i}, z_{10i}, z_{11i}, z_{12i}, z_{13i}, z_{14i} \rangle^T$

이제 식 (8)의 일반해는 고유치해석 결과를 이용하여 복소 지수함수의 일차결합(linear combination)으로 표시할 수 있다.

$$d(x) = \sum_{i=1}^{14} a_i Z_i e^{\lambda_i x} = X(x) a \tag{9}$$

여기서 X 와 a 는 각각 14개의 고유치 해를 이용하여 x 에 관한 복소 지수함수로 이루어진 14×14 행렬함수 및 적분상수벡터를 나타낸다.

$$\begin{aligned}
X(x) = & [Z_1 e^{\lambda_1 x}; Z_2 e^{\lambda_2 x}; Z_3 e^{\lambda_3 x}; Z_4 e^{\lambda_4 x}; Z_5 e^{\lambda_5 x}; Z_6 e^{\lambda_6 x}; Z_7 e^{\lambda_7 x}; \\
& Z_8 e^{\lambda_8 x}; Z_9 e^{\lambda_9 x}; Z_{10} e^{\lambda_{10} x}; Z_{11} e^{\lambda_{11} x}; Z_{12} e^{\lambda_{12} x}; Z_{13} e^{\lambda_{13} x}; Z_{14} e^{\lambda_{14} x}]
\end{aligned} \tag{10a}$$

$$a = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \rangle^T \tag{10b}$$

복소계수 a 를 그림 2에 보이는 박백보 요소 당량의 14개의 절점변위성분으로 표시할 필요가 있다. 이를 위하여 다음과 같이 절점변위벡터를 정의한다. 그림에서 첨자 p, q 는 각각 보의 당량 ($x = 0, l$)을 의미한다.

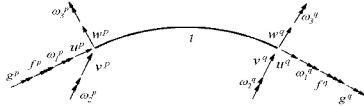


그림 2. Nodal displacement vector of curved beam element

$$U_e = \langle U^p, U^q \rangle^T \quad (11a,b)$$

$$U^a = \langle u^a, v^a, w^a, \omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, f^a \rangle^T, \quad a = p, q \quad (11c)$$

여기서

$$U^p = \langle U_x(0), U_y(0), U_z(0), \theta(0), -\left(U'_x - \frac{1}{R} U_x\right)(0), U'_y(0), -\left(\theta' + \frac{1}{R} U'_y\right)(0) \rangle^T \quad (12a)$$

$$U^q = \langle U_x(l), U_y(l), U_z(l), \theta(l), -\left(U'_x - \frac{1}{R} U_x\right)(l), U'_y(l), -\left(\theta' + \frac{1}{R} U'_y\right)(l) \rangle^T \quad (12b)$$

부재양단의 좌표 ($x = 0, l$)를 식 (11)에 대입하여 정리하면, 질점변위 벡터 U_e 는 적분상수 벡터 a 로 나타낼 수 있다.

$$U_e = E a, \quad a = E^{-1} U_e \quad (13a-b)$$

여기서 E 의 각 요소는 참조(문헌 (13)에 자세히 표현되어 있으며, $X(x)$ 로부터 부재양단의 x 좌표를 대입하여 쉽게 구할 수 있다. 이때 복소수 형태의 역행렬은 IMSL subroutine DLJNCG⁽¹⁰⁾를 이용하여 구한다. 식 (13b)를 식 (9)에 대입하여 복소계수 a 를 소거하면, 최종적으로 14개의 변위성분으로 구성되는 임의한 변위 벡터를 얻을 수 있다.

$$d(x) = X(x) E^{-1} U_e \quad (14)$$

3.2 동적 요소강도행렬의 산정

2장에서는 변분법을 이용하여 비대칭 박막 곡선보 요소의 힘-변위 관계식 (3)을 유도하였다. 이 식에 식 (4)와 같은 14개의 변위 파라미터를 도입하여 정리하면 다음과 같다.

$$F_1 = E A d_2 + \frac{1}{R} E \widehat{I}_{2\phi} d_9 + \frac{1}{R} E \widehat{I}_{2\phi} d_{13} + \frac{1}{R} E \widehat{I}_{23} d_5 \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & -\left(E \widehat{I}_3 + \frac{1}{R} E \widehat{I}_{3\phi}\right) d_6 - \left(\frac{1}{R} E \widehat{I}_\phi + E \widehat{I}_{3\phi}\right) d_{11} \\ & + \left\{ \frac{1}{R} G J - \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R} \widehat{I}_\phi + \widehat{I}_{3\phi} \right) + \left(\frac{1}{R} {}^o M_p - {}^o M_2 \right) \right\} d_{12} \\ & - \left(\frac{1}{R} E \widehat{I}_{2\phi} + E \widehat{I}_{23} \right) d_{10} - \left\{ \rho \omega^2 \left(\widehat{I}_3 + \frac{1}{R} \widehat{I}_{3\phi} \right) - {}^o F_1 \right\} d_4 \\ & - \rho \omega^2 \left(\frac{1}{R} \widehat{I}_{2\phi} + \frac{1}{R} \widehat{I}_{223} + \widehat{I}_{23} \right) d_8 + \rho \omega^2 \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \widehat{I}_{2\phi} + \widehat{I}_{23} \right) d_1 \end{aligned} \quad (15b)$$

$$F_3 = -E\widehat{I}_2d_{10} - E\widehat{I}_{29}d_{14} - E\widehat{I}_{23}d_6 \\ - (\rho\omega^2\widehat{I}_2 - {}^cF_1)d_8 + \rho\omega^2\frac{1}{R}I_2d_1 - \rho\omega^2\widehat{I}_{29}d_{12} - \rho\omega^2\left(\frac{1}{R}I_{223} + I_{23}\right)d_4 \quad (15c)$$

$$M_1 = -E\widehat{I}_4d_{14} + (GJ - \rho\omega^2\widehat{I}_\phi + {}^cM_9)d_{12} - E\widehat{I}_{29}d_{10} - E\widehat{I}_{39}d_6 \\ - \left(\rho\omega^2\widehat{I}_{39} + \frac{1}{2}{}^cM_2\right)d_4 - \rho\omega^2\widehat{I}_{29}d_8 + \rho\omega^2\frac{1}{R}I_{29}d_1 \quad (15d)$$

$$M_2 = E\widehat{I}_2d_9 + E\widehat{I}_{29}d_{13} + E\widehat{I}_{23}d_5 \quad (15e)$$

$$M_3 = E\widehat{I}_3d_5 + E\widehat{I}_{39}d_{13} + E\widehat{I}_{23}d_9 + \frac{1}{2}{}^cM_2d_{11} \quad (15f)$$

$$M_4 = E\widehat{I}_4d_{13} + E\widehat{I}_{23}d_9 + E\widehat{I}_{39}d_5 \quad (15g)$$

이 식은 다음과 같이 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$f(x) = S d(x) \quad (16)$$

$f = \langle F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3, M_4 \rangle^T$ 이고, 7×14 행렬인 S 의 각 요소는 참고문헌 (13)에 자세히 표현되어 있다. 요소의 집적번위를 나타내는 식 (14)를 식 (16)에 대입하면, 다음과 같이 임의의 x 에 서 박벽보 요소에 대한 단면력과 변위파라미터 관계식을 구할 수 있다.

$$f(x) = S X(x) E^{-1} U_e \quad (17)$$

한편 부재양단의 집적력벡터는 다음과 같이 정의한다.

$$F_e = \langle F^p, F^q \rangle^T \quad (18a)$$

여기서

$$F^a = \langle F_1^a, F_2^a, F_3^a, M_1^a, M_2^a, M_3^a, M_4^a \rangle^T, \quad a = p, q \quad (18b)$$

이제 식 (17)을 이용하여 부재 양단($x = 0, l$)의 부재력을 구하면 다음과 같다.

$$F^p = -f(0) = -S X(0) E^{-1} U_e, \quad F^q = f(l) = S X(l) E^{-1} U_e \quad (19a-b)$$

마지막으로 박벽 직선보의 엄밀한 동적 요소강도행렬 $K(\omega)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_e = K(\omega) U_e \quad (20a)$$

여기서,

$$K(\omega) = \begin{bmatrix} -S X(0) E^{-1} \\ S X(l) E^{-1} \end{bmatrix} \quad (20b)$$

박벽보 구조의 고유진동수는 동적 강도행렬의 행렬식이 영이 되는 조건으로 산정할 수 있다.

$$\det |K(\omega)| = 0 \quad (21)$$

4. 수치해석

본 연구에서 제안한 수치해석 기법의 정확성을 검증하기 위하여 단순지지, 캔틸레버 박벽 보구조에 대한 고유진동수를 산정하고, 해석해나 ABAQUS⁽¹¹⁾를 사용한 유한요소법의 결과와 비교한다.

4.2 비대칭단면을 갖는 박벽 캔틸레버보의 고유진동수

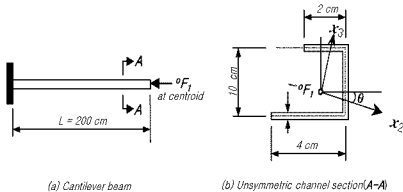
일반적으로 비대칭 단면을 가지는 캔틸레버 박벽보의 고유진동수에 대한 해석해는 이용할 수 없으므로 ABAQUS의 쉘요소를 이용한 이항 유한요소 해석결과와 비교한다. 캔틸레버보의 단면 제원은 아래에 제시하였으며, 캔틸레버와 비대칭단면의 형상은 그림 3에 나타내었다.

$$E = 30000.0 \text{ N/cm}^2, G = 11500.0 \text{ N/cm}^2, A = 8.0 \text{ cm}^2, t = 0.5 \text{ cm}$$

$$I_2 = 114.812 \text{ cm}^4, I_3 = 7.6048 \text{ cm}^4, I_6 = 70.9687 \text{ cm}^6, J = 0.6667 \text{ cm}^4,$$

$$e_2 = 1.5894 \text{ cm}, e_3 = -2.5723 \text{ cm}, \beta_2 = 5.6617, \beta_3 = 11.0599, \beta_6 = -0.5586,$$

$$\theta = 0.10906 \text{ rad}, L = 200.0 \text{ cm}$$



(a) Cantilever beam (b) Unsymmetric channel section(A-A)

그림 3. Cantilever beam with unsymmetric channel section

표 1은 본 연구의 엄밀한 동작강도행렬과 ABAQUS⁽¹¹⁾의 쉘요소를 이용한 가장 작은 10개의 고유진동수를 비교한 것이다. 보는 바와 같이 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

표 1. Flexural-torsional natural frequency [radian/sec²]

mode	ω^2	
	Present Study	ABAQUS
1	0.028	0.028
2	0.336	0.331
3	0.706	0.696
4	1.081	1.074
5	4.858	4.766
6	7.187	7.083
7	18.25	17.95
8	20.11	19.36
9	24.48	23.58
10	46.94	46.52

5. 결 론

비대칭 단면을 가지는 직선 박벽보의 3차원 자유진동해석을 위한 엄밀한 요소강도행렬을 산정하는 수치해석기법을 개발하였다. 14개의 변위파라미터를 도입하여 고차의 연립미분방정식의 형태로 표현되는 비대칭 직선 박벽보 요소의 지배방정식을 1차 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 계단력-변위 관계식을 이용하여 엄밀한 동적강도행렬을 유도하였다. 요소강도행렬을 이용하여 단순지지, 캔틸레버 보구조에 대한 고유진동수와 좌굴하중을 산정하고, 해석해나 유한요소해석의 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다.

Hermitian다항식과 같은 형상함수를 도입하여 요소강도행렬을 산정하는 기존의 방법과는 달리, 본 연구에서 구한 요소강도행렬은 경계조건에 제약이 받지 않는다. 또한, 기존의 유한요소해석과 비교할 때, 엄밀해이므로 요소의 수를 대폭 감소시킬 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

1. Vlasov, V. Z.(1961), *Thin Walled Elastic Beams*, 2nd ed., Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem
2. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M.(1961) *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York
3. Argyris, J. H., Hilpert, O., Malejannakis, G. A. and Scharpf, D. W.(1979), 'On the geometrical stiffness of a beam in space - a consistent v. w. approach', *Comp. Meth Appl. Mech. Engng.*, **20**, 105-131
4. Barsoum, R. W. and Gallagher, R. H.(1970), 'Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems', *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **2**, pp335-352
5. Bradford, M. A. and Cuk, P. E.(1988), 'Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams', *J. Struct. Eng. ASCE*, **114**(5), 977-995
6. Chang, S. P., Kim, S. B. and Kim, M. Y.(1986), 'Stability of shear deformable thin-walled space frames and circular arches', *J. Eng. Mech. ASCE*, **112**(9), 844-854
7. Kim, S. B. and Kim, M. Y.(2000), 'Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames', *Engineering Structures*, **22**(5), 446-458
8. Banerjee, J. R.(1989), 'Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements', *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **28**, 1283-1298
9. Banerjee, J. R. and Williams, F. W.(1994), 'Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix of an axially loaded Timoshenko beam element', *Int. J. Solids Structures*, **31**(6), 749-762
10. Banerjee, J. R., Guo, S. and Howson, W. P.(1996), 'Exact dynamic stiffness matrix of a bending-torsion coupled beam including warping', *Computers & Structures*, **59**(4), 613-621
11. ABAQUS(1992), *User's Manual* Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.
12. Microsoft(1995), *Fortran PowerStation Programmer's Guide*, Microsoft Corporation
13. 윤희택(2001), 비대칭 박벽거더의 개선된 자유진동, 좌굴 및 응력해석, 공학박사 학위논문, 성균관대학교 대학원