

비비례 진동감쇠를 갖는 선형 동역학계의 스펙트럴 해석법

Spectral Analysis Method for the Multi-DOFs Dynamic Systems with Non-Proportional Damping

조주용¹⁾
Cho, Jooyong

김성환¹⁾
Kim, Sunghwan

이우식²⁾
Lee, Usik

ABSTRACT

This paper introduces a fast Fourier transform (FFT)-based spectral analysis method for the transient responses as well as the steady-state responses of linear dynamic systems with non-proportional damping. The force vibration of a non-proportionally damped three-DOF system is considered as the illustrative numerical example. The proposed spectral analysis method is evaluated by comparing with the numerical solution obtained by the Runge-Kutta method

1. 서 문

FFT를 활용하는 스펙트럴 해석법에서는 DFT (discrete Fourier transform)를 사용하여 종속 변수를 시간영역에서 주파수영역으로 변환시킴으로써 주어진 상미분방정식을 주파수를 매개변수로 하는 대수방정식으로 변환시키고, 이와 같이 유도된 대수방정식을 풀어서 각각의 이산주파수에 의한 푸리에계수(Fourier coefficient)를 구한 후, IDFT (inverse discrete Fourier transform)를 사용하여 시간영역에서의 응답을 계산한다. 실제 계산에서는 DFT 또는 IDFT를 연산하는데 FFT가 사용된다. FFT는 매우 효율적인 컴퓨터 알고리즘이기 때문에 컴퓨터 연산시간을 단축시켜줄 뿐만 아니라 해의 정확도도 높여준다[1, 5].

FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 (1) 가진력이 너무 복잡하여 수치적분법을 사용하고자 할 때, (2) 실험 측정시 아날로그-디지털변환기를 사용하여 디지털 형태로 데이터를 저장하는 실험계 측정비를 사용할 때, (3) 재료의 구성방정식(constitutive equation)이 시간영역 보다는 주파수영역에서 측정하기에 더 적합할 때, (4) 주파수에 종속적인 스펙트럴요소(spectral element)모형을 구조 해석에 적용할 때 매우 유용하다.

기존의 문헌에서 보면[1-4], FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 비례 진동감쇠를 갖는 경우에 대하여 정상상태응답 (steady-state response) 뿐만 아니라, 가진력에 의한 과도응답(transient response)을 구하는 방법도 잘 개발되어 있으나, 비비례 진동감쇠를 갖는 경우에 대하여 과도응답을 구하는 방법은 아직까지 소개되지 않고 있는 것으로 판단된다.

따라서, 본 연구의 목적은 초기조건이 0이 아니며 비비례 진동감쇠를 갖는 경우 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법을 이용하여 과도응답을 구하는 방법을 개발하는 것이다. 본 연구에서 제안한 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법을 검증하기 위해서, 수치 예제로 비비례점성감쇠가 있는 3자유도 강제진동계의 응답을 구하였다.

2. 스펙트럴 해석법

FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 먼저 다자유도 동역학계를 위하여 개발된 것이다. 다자유도 동역학계의 선형적인 예로서, 비례점성감쇠가 있는 m 자유도 선형 동역학계의 운동방정식을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$[M]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [C]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [K]\{\mathbf{u}\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

식 (1)의 초기조건은 아래와 같다.

$$\{\mathbf{u}(0)\} = \{\mathbf{u}_0\}, \quad \{\dot{\mathbf{u}}(0)\} = \{\dot{\mathbf{u}}_0\} \quad (2)$$

여기서, $\{\mathbf{u}(t)\}$ 는 절점자유도 벡터이고 $\{f(t)\}$ 는 절점에 작용하는 외력 벡터이다. $[M]$ 은 질량행렬, $[C]$ 는 감쇠행렬, $[K]$ 는 강성행렬이다. 식 (1)의 일반해는 다음과 같이 정상상태응답 부분인 $\{\mathbf{u}_p(t)\}$ 와 과도응답 부분인 $\{\mathbf{u}_h(t)\}$ 의 합으로 구할 수 있다.

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \{\mathbf{u}_p(t)\} + \{\mathbf{u}_h(t)\} \quad (3)$$

3. 정상상태응답

외력벡터 $\{f(t)\}$ 와 정상상태응답 $\{\mathbf{u}_p(t)\}$ 를 DFT를 사용하여 스펙트럴 형태(spectral form)로 나타내면 다음과 같다.

$$\{f(t_r)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{F_n\} e^{i\omega_n t_r}, \quad \{\mathbf{u}_p(t_r)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{P_n\} e^{i\omega_n t_r} \quad (4)$$

식 (4)를 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{P_n\} &= [[K] + i\omega_n [C] - \omega^2 [M]]^{-1} \{F_n\} \\ &\equiv [D(\omega_n)]^{-1} \{F_n\} \quad (n=0, 1, 2, \dots, N/2) \quad (5) \\ \{P_{N-n}\} &= \{P_n^*\} \end{aligned}$$

여기서 $[D(\omega)]$ 는 동적강성행렬(dynamic stiffness matrix)을 나타낸다. 식 (4b)를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\dot{\mathbf{u}}_p(t_r)\} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (i\omega_n) \{P_n\} e^{i\omega_n t_r} \quad (v=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6) \\ &\equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{\overline{P}_n\} e^{i\omega_n t_r} \end{aligned}$$

여기서 $\{\overline{P}_{N-n}\} = \{\overline{P}_n^*\}$ ($n=0, 1, \dots, N/2$)이다. 우선 식 (5)에서 푸리에계수 $\{P_n\}$ 을 구한 후, 시간영역에서의 정상상태응답은 IFFT (inverse fast Fourier transform)를 사용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\mathbf{u}_p(t)\} \leftarrow IFFT\{P_n\} \quad (7)$$

4. 과도응답

다음과 같이 외력이 없는 경우의 운동방정식을 고려해 보자.

$$[M]\{\ddot{\mathbf{u}}_h\} + [C]\{\dot{\mathbf{u}}_h\} + [K]\{\mathbf{u}_h\} = \{0\} \quad (8)$$

여기서 $\{\mathbf{u}_h(t)\}$ 는 과도응답벡터이다. 식 (8)의 해 $\{\mathbf{u}_h(t)\}$ 는 다음과 같은 형태로 가정할 수 있다.

$$\{\mathbf{u}_h(t)\} = \{A\} e^{\lambda t} \quad \text{또는} \quad \mathbf{u}_{hh} = a_k e^{\lambda t} \quad (9)$$

식 (8)에 식 (9)를 대입하여 다시 쓰면, 다음과 같다.

$$(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]) \{a\} = \{0\} \quad (10)$$

식 (10)이 비자명해(non-trivial solution)를 갖기 위해서는 다음의 조건을 만족시켜야 한다.

$$\det(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]) = 0 \quad (11)$$

식 (11)은 m 자유도 계에 대하여 미지수를 λ 로 하는 $2m$ 차 대수 방정식이다. 식 (11)의 해는 m 개의 짝을 이루는 공액복소수이며 이는 다음과 같다.

$$\lambda \rightarrow \lambda_j, \lambda_j^* \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (12)$$

비비례 진동감쇠를 갖는 시스템의 운동방정식은 모드해석법을 이용하여 비연계(decoupled)된 방정식을 얻을 수 없다. 따라서 식 (11)을 다음과 같이 일반적인 형태로 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} m_{11}\lambda^2 + c_{11}\lambda + k_{11} & \cdots & m_{1m}\lambda^2 + c_{1m}\lambda + k_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1}\lambda^2 + c_{m1}\lambda + k_{m1} & \cdots & m_{mm}\lambda^2 + c_{mm}\lambda + k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (13)$$

식 (13)에 $\lambda = \lambda_j$ 를 대입하면 a_k 사이의 비례 구할 수 있고, 이로부터 다음과 같이 j 번째 감쇠 모드가 결정된다.

$$\frac{a_1}{C_{j1}} = \frac{a_2}{C_{j2}} = \cdots = \frac{a_m}{C_{jm}} = z_j \quad (14)$$

여기서, C_{jk} 는 특정 λ_j 에 대한 식 (11)의 행렬식의 j 번째 행 여인자(cofactor)이고, z_j 는 임의의 복소수이다. 따라서 λ_j 모드에 대한 과도응답은 다음과 같다[6].

$$x_k^j = a_k e^{\lambda_j t} = z_j C_{jk} e^{\lambda_j t} \quad (15)$$

이러한 관계식이 모두 $2m$ 개 존재하며, 식 (15)으로부터 다음과 같이 총 과도응답이 계산된다.

$$\begin{aligned} u_{hk}(t) &= \sum_{j=1}^m B_j C_{jk} e^{\lambda_j t} + \sum_{j=1}^m \overline{B}_j \overline{C}_{jk} e^{\lambda_j^* t} \quad (k=0, 1, 2, \dots, m) \\ \dot{u}_{hk}(t) &= \sum_{j=1}^m B_j C_{jk} \lambda_j e^{\lambda_j t} + \sum_{j=1}^m \overline{B}_j \overline{C}_{jk} \lambda_j^* e^{\lambda_j^* t} \end{aligned} \quad (16)$$

이것서, 상수 B_j 와 \overline{B}_j 는 초기조건을 만족하도록 결정해야 한다.

$u_{hk}(t)$ 와 $\dot{u}_{hk}(t)$ 를 스펙트럴 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_{hk}(t, \tau) &= \frac{1}{N} \sum_{\gamma=0}^{N-1} H_{k\gamma} e^{i\omega_\gamma t, \tau} \quad (\gamma=0, 1, 2, \dots, N-1) \\ \dot{u}_{hk}(t, \tau) &= \frac{1}{N} \sum_{\gamma=0}^{N-1} \overline{H}_{k\gamma} e^{i\omega_\gamma t, \tau} \end{aligned} \quad (17)$$

이산 푸리에 변환 정의를 이용하며, 푸리에 계수 $H_{k\gamma}$ 과 $\overline{H}_{k\gamma}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H_{k\gamma} &= \sum_{\tau=0}^{N-1} u_{hk}(t, \tau) e^{-i\omega_\gamma t, \tau} \\ \overline{H}_{k\gamma} &= \sum_{\tau=0}^{N-1} \dot{u}_{hk}(t, \tau) e^{-i\omega_\gamma t, \tau} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (16)을 식 (18)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_{k\gamma} &= \sum_{j=1}^m [B_j X_{jk\gamma} + \overline{B}_j Y_{jk\gamma}] \\ \overline{H}_{k\gamma} &= \sum_{j=1}^m [B_j \lambda_j X_{jk\gamma} + \overline{B}_j \lambda_j^* Y_{jk\gamma}] \end{aligned} \quad (19)$$

여기서,

$$X_{jk\gamma} = C_{jk} \frac{1 - e^{(\lambda_j - i\omega_\gamma)DN}}{1 - e^{(\lambda_j - i\omega_\gamma)D}} \quad Y_{jk\gamma} = C_{jk} \frac{1 - e^{(\lambda_j^* - i\omega_\gamma)DN}}{1 - e^{(\lambda_j^* - i\omega_\gamma)D}} \quad (20)$$

식 (19)를 식 (17)에 대입하고, $k=1, 2, \dots, m$ 에 대하여 벡터형식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{u}_h(t, \tau) \} &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \{ \mathbf{H}_n \} e^{j\omega_r t, \tau} \\ \{ \dot{\mathbf{u}}_h(t, \tau) \} &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \{ \overline{\mathbf{H}}_n \} e^{j\omega_r t, \tau} \end{aligned} \quad (21)$$

식 (3)의 일반해를 식 (2)의 초기조건에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{u}_0 \} &= \{ \mathbf{u}_\rho(0) \} + \{ \mathbf{u}_h(0) \} \\ \{ \dot{\mathbf{u}}_0 \} &= \{ \dot{\mathbf{u}}_\rho(0) \} + \{ \dot{\mathbf{u}}_h(0) \} \end{aligned} \quad (22)$$

식 (6)과 (21)을 식 (22)에 대입하면

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{u}_0 \} &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} (\{ \mathbf{P}_n \} + \{ \mathbf{H}_n \}) \\ \{ \dot{\mathbf{u}}_0 \} &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} (\{ \overline{\mathbf{P}}_n \} + \{ \overline{\mathbf{H}}_n \}) \end{aligned} \quad (23)$$

식 (19)에서 H_{kn} 와 \overline{H}_{kn} 을 $k=1, 2, \dots, m$ 에 대하여 벡터형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{H}_n \} &= [\mathbf{X}_n] \{ \mathbf{B} \} + [\mathbf{Y}_n] \{ \overline{\mathbf{B}} \} \\ \{ \overline{\mathbf{H}}_n \} &= [\mathbf{X}_n] [\mathbf{A}] \{ \mathbf{B} \} + [\mathbf{Y}_n] [\mathbf{A}^*] \{ \overline{\mathbf{B}} \} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서

$$[\mathbf{X}_n] = \begin{bmatrix} X_{11n} & \cdots & X_{m1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1mn} & \cdots & X_{mmn} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{Y}_n] = \begin{bmatrix} Y_{11n} & \cdots & Y_{m1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1mn} & \cdots & Y_{mmn} \end{bmatrix} \quad (25)$$

이고

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{B} \} &= \{ B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_m \} \\ \{ \overline{\mathbf{B}} \} &= \{ \overline{B}_1 \ \overline{B}_2 \ \cdots \ \overline{B}_m \} \\ [\mathbf{A}] &= \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_m] \\ [\mathbf{A}^*] &= \text{diag}[\lambda_1^* \ \lambda_2^* \ \cdots \ \lambda_m^*] \end{aligned} \quad (26)$$

으로 표현된다.

식(24)를 식(23)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [\overline{\mathbf{X}}] \{ \mathbf{B} \} + [\overline{\mathbf{Y}}] \{ \overline{\mathbf{B}} \} &= \{ \mathbf{d} \} \\ [\widetilde{\mathbf{X}}] \{ \mathbf{B} \} + [\widetilde{\mathbf{Y}}] \{ \overline{\mathbf{B}} \} &= \{ \mathbf{v} \} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [\overline{\mathbf{X}}] &= \sum_{n=0}^{N-1} [\mathbf{X}_n], \quad [\overline{\mathbf{Y}}] = \sum_{n=0}^{N-1} [\mathbf{Y}_n] \\ [\widetilde{\mathbf{X}}] &= [\overline{\mathbf{X}}] [\mathbf{A}], \quad [\widetilde{\mathbf{Y}}] = [\overline{\mathbf{Y}}] [\mathbf{A}^*] \\ \{ \mathbf{d} \} &= N \{ \mathbf{u}_0 \} - \sum_{n=0}^{N-1} \{ \mathbf{P}_n \} \\ \{ \mathbf{v} \} &= N \{ \dot{\mathbf{u}}_0 \} - \sum_{n=0}^{N-1} \{ \overline{\mathbf{P}}_n \} \end{aligned} \quad (28)$$

식 (27)을 상수벡터 $\{ \mathbf{B} \}$ 또는 $\{ \overline{\mathbf{B}} \}$ 에 관하여 연립하여 풀면 $\{ \mathbf{B} \}$ 와 $\{ \overline{\mathbf{B}} \}$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{ \mathbf{B} \} = ([\widetilde{\mathbf{X}}] - [\widetilde{\mathbf{Y}}][\overline{\mathbf{Y}}]^{-1}[\overline{\mathbf{X}}])^{-1} (\{ \mathbf{v} \} - [\widetilde{\mathbf{Y}}][\overline{\mathbf{Y}}]^{-1} \{ \mathbf{d} \}) \quad (29)$$

우선 식 (29)으로부터 초기조건을 이용하여 $\{ \mathbf{B} \}$ 와 $\{ \overline{\mathbf{B}} \}$ 를 구한 후, 식 (24)을 이용하여 $\{ \mathbf{H}_n \}$ 을 구한다. 그리고 나서 다음과 같이 IFFT를 사용하여 $\{ \mathbf{u}_h(t) \}$ 를 구한다.

$$\{ \mathbf{u}_h(t) \} \leftarrow \text{IFFT} \{ \mathbf{H}_n \} \quad (30)$$

식 (30)와 식 (7)을 이용하여 시스템의 초기조건을 고려한 동적응답을 식 (3)과 같이 구할 수 있

다.

5. 수치예제

본 연구에서 제안한 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법을 검증하기 위해 다음과 같은 3자유도의 강제진동계를 예제로 들었다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -2c & c \\ -2c & 3c & -c \\ c & -c & 3c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{Bmatrix} \quad (31)$$

식 (31)에서 $m = 10 \text{ kg}$, $c = 40 \text{ Ns/m}$, $k = 1000 \text{ N/m}$ 이고, $f(t) = 4 [1 \text{ s}t \ 1.2]$ N 이며, $s(t)$ 는 단위계단함수이다. 시스템의 초기변위와 초기속도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{u_1 \ u_2 \ u_3\} &= \{1 \ 0 \ 0\} \quad (\text{mm}) \\ \{\dot{u}_1 \ \dot{u}_2 \ \dot{u}_3\} &= \{0 \ 1 \ 0\} \quad (\text{mm/s}) \end{aligned} \quad (32)$$

강제진동계의 동적응답 $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ 를 스펙트럴해석법과 Runge-Kutta법으로 구하여 그림. 1에서 비교하였다. 시간영역에서의 평균오차가 0.05% 이내의 정확도를 가진 해를 얻기 위하여, 스펙트럴해석법에는 DFT의 주기가 $T = 6$ 초, 샘플 개수(sampling number)는 $N = 2048$ 개를 사용하였으며, Runge-Kutta법에서의 시간간격은 0.001초를 사용하였다. 그림. 1에서는 스펙트럴해석법으로 구한 결과가 Runge-Kutta법에 의한 해에 충분히 수렴함을 보여주고 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 초기조건이 0이 아니며 비비례 진동감쇠를 갖는 선형 이산계의 동적응답을 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법을 사용하여 구하는 방법을 소개하였다. 본 연구에서 제안한 스펙트럴해석법은 스펙트럴요소모델로 표현된 분포계까지 적용할 수 있다. FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 비비례점성감쇠가 있는 3자유도 강제진동계를 예제로 하여 검증하였고, Runge-Kutta법으로 구한 해와 비교해 볼 때 매우 높은 정확도를 보여주었다.

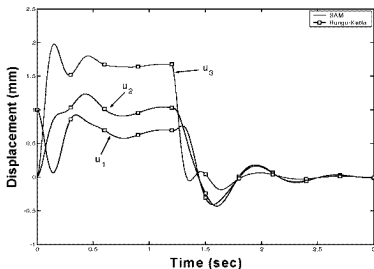


그림. 1 동적 응답

후 기

이 논문은 2004년도 부처한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

1. Doyle, J. F., Wave Propagation in Structures, Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms, 2nd, Springer, New York, 1997.
2. Lee, U., Kim, J. and Leung, A.Y. T., "The Spectral Element Method in Structural Dynamics," The Shock and Vibration Digest, Vol. 32, No. 6, 2000, pp. 451~465.
3. Ginsberg, J. H., Mechanical and Structural Vibrations, Theory and Applications, John Wiley & Sons, New York, 2001.
4. Lee, U., Kim, S. and Cho, J., "Spectral Analysis Method for Linear Dynamic Systems," 45th AIAA SDM. Conference, April 2004, Palm Spring, CA, AIAA-2004-1532.
5. Newland, D. E., Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis, 3rd, Longman, New York, 1993.
6. Sun, C. T. and Bai, M. J., "Vibration of Multi-Degree-of-Freedom Systems with Non-Proportional Viscous Damping," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 37, No. 4, 1995, pp. 441~455.