

전기철도에서 급전선로의 line impedance 계산에 관한 연구

A study on the Line impedance calculation method in electrified railway system

이춘배*
LEE Chunbae

이종우**
LEE Jongwoo

ABSTRACT

Transmission line impedance calculation has been tried for obtaining exact value. The method proposed by Carson contains indefinite complex integral. Although the Carson solution is proposed with power series, the solution is limited and valid at special range of frequency. In this paper, we proposed a simplified Carson solution by analytical method using ground transmission line return current. This method calculate the transmission line impedance easily.

1. 서론

전철의 전송라인은 저항, 임피던스 누설컨덕턴스 및 정전용량의 4개의 정수 지닌 연속된 전기 회로로 되어 있어, 전철선로의 전기적 특성을 계산에는 이 4개의 정수 즉 선로정수를 충분히 이해를 하여야 한다. 전송선로는 전압, 전류의 관계, 전압강하, 급전전력 등을 계산하는 경우에, 급전라인 작은 수 10km 정도로 저항과 임피던스만을 고려해도 충분하다. 전송라인의 완벽하고 정확한 분석은 에너지의 전달이 필드를 통해서 이루어지기 때문에 선로근처의 완벽한 전자장 해석이 필요하다. 임피던스의 해석은 일반적으로 분포 회로망에서 한 선로의 특성은 선로에 따라서 평면파로 진행한다는 가정에 따라 단순화시킬 수 있다. 이러한 가정은 폭에 비해서 선로의 길이가 긴 철도 급전선과 같은 시스템에 적절하다. 급전회로에서 정확한 임피던스의 계산은 보호기를 설정하거나, 전압강하 및 전류량 등의 측정에 필요하다.

Carson 방법에 의한 선로의 임피던스 계산은 복소수 항목을 갖는 부정적분을 포함하는 식이다. 무한급수에 의해 Carson의 식을 계산하는 방식이 제안되었으며, 이 방식을 저주파 및 고주파에 대해서 적절한 값을 얻을 수 있다. 반면에 각 주파수에 대해서 무한급수의 주어진 범위 내에서만 값이 유효하다.

본 논문에서는 복층 대지에서의 대지/도체의 귀선 전류의 개념을 이용하여 표피효과를 도입하였으며, 이 결과 간결한 임피던스 계산식을 제시하였다.

1) 서울산업대학교 철도전문대학원
2) 한국철도기술연구원

2. 임피던스 계산식

2.1 자기임피던스

자기임피던스는 선로와 대지가 완벽한 도체라 가정할 때 도체의 외부 및 내부 임피던스와 대지 임피던스의 3개의 임피던스로 구성되어 있다. 도체 i 의 임피던스는 다음과 같이 표시한다.

$$Z_{ii} = j\omega L_{ii} + Z_c + Z_g \quad \text{----- (1)}$$

도체의 외부 임피던스는 다음과 같이 주어진다.

$$L_{ii} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h_i}{r_i} \quad \text{----- (2)}$$

내부 임피던스 Z_c 는 그림 1에서 보여준 실린더형 모델을 이용하여 계산을 한다.

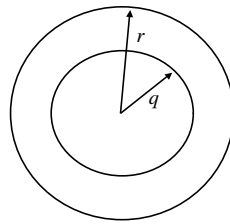


그림 1 실린더형 전선

중실도선의 경우에는 q 가 0이 된다.

도체에 교류전류를 전송할 때, skin effect라는 영향을 받게 된다. 유한도체에서는 내부임피던스라는 항목으로 취급이 된다. 내부임피던스는 도체의 내부필드에서 발생하는 것으로 skin effect라 생각하면 편리하다. 원형단면을 갖는 도체의 DC 임피던스는 단위길이 당 저항으로 다음과 같이 표시된다.

$$R_d = \frac{1}{\pi r_d^2 \sigma} \quad \text{----- (4)}$$

단 σ : 도체재료의 도전율, r_d : 도체의 반지름
매우 낮은 주파수에서 실효 인덕턴스는 식(5)와 같다.

$$L_0 = \frac{\mu}{8\pi} \quad \text{----- (5)}$$

단 μ : 재료의 투자율 비, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

자세한 분석에 의해서 높은 주파수에서의 도체에 대한 단위길이 당 내부 임피던스 Z_c 는 다음과 같이 주어진다.

$$Z_c = R_d \frac{j}{d} mr(1-S^2) \times \frac{(ber\ mr + j\ bei\ mr) + \phi \cdot (\ker\ mr + j\ kei\ mr)}{(ber'\ mr + j\ bei'\ mr) + \phi \cdot (\ker'\ mr + j\ kei'\ mr)} \quad \text{---- (6)}$$

단 $R_d = 1/(\pi\sigma(r^2 - q^2))$ 은 도체의 직류저항성분, $S = q/r$ 는 실린더 도체의 외경과 내경 비를 나타내며, $m = \sqrt{\omega\mu\sigma}$ 로서 주파수에 관계된 변수이며, 표면의 깊이이다. 단 ω : 라디안 주파수, σ : 도전율, μ : 도체의 투자율

식(7)에서는 ϕ 는 다음과 같다.

$$\phi = \frac{ber'\ mq + j\ bei'\ mq}{ker'\ mq + j\ kei'\ mq} \quad \text{----- (7)}$$

단, ber , bei , ker , kei 는 Bessel 함수계열인 Kelvin 함수이며, ber' , bei' , ker' , kei' 는 미분을 나타낸다.

Kelvin함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{ber } x + j \text{ bei } x = I_0(x\sqrt{j}), \text{ker } x + j \text{ kei } x = K_0(x\sqrt{j})$$

단 I_0, K_0 는 각각 1계열 및 2계의 0차의 수정된 Bessel 함수이다.

대지 임피던스

$$Z_g = R_g + jX_g \text{-----} (8)$$

이때 다음절에서 자세하게 다루었다.

2.2 상호임피던스

대지로부터 높이가 각각 h_i 와 h_j 이고 평행인 2개의 도체 i, j 의 상호임피던스 Z_{ij} 는 2개의 성분을 갖는다. 첫 번째 성분은 도체와 대지가 완벽한 도체일 때 2개 도체사이에서의 상호임피던스 L_{ij} 이며, 두 번째 성분은 도체 i, j 의에서 공통전류인 대지귀환통로의 임피던스 Z_{gm} 이다. 상호 임피던스 Z_{ij} 는 다음과 같이 표시된다.

$$Z_{ij} = j\omega L_{ij} + Z_{gm} \text{-----} (9)$$

상호임피던스 L_{ij} 는 다음과 주어진다.

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{ij}'}{D_{ij}} \text{-----} (10)$$

단 D_{ij} : 도체 i, j 간의 거리

D_{ij}' : 도체 i 와 도체 j 의 영상간의 거리

- 대지귀환 임피던스

이상적인 도체 대지임피던스에 맞게 Carson의 식을 변경을 하면은 다음과 같다.

$$Z_{ii} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h}{r} + \omega \frac{\mu}{\pi} J_{ii} \text{-----} (11)$$

$$Z_{ij} = j\omega \frac{\mu_0}{2} \pi \ln \frac{\sqrt{(h_i+h_j)^2 + D_{ij}^2}}{\sqrt{(h_i-h_j)^2 + D_{ij}^2}} + \omega \frac{\mu}{\pi} J_{ij} \text{-----} (12)$$

각각의 J_{ii} 과 J_{ij} 은 에 대한 것은 다음과 같다. 먼저 대지의 자기임피던스 J_{ii} 를 구하여 면 다음과 같다.

단 대지와 관련된 J_{ii} 는 다음과 같은 부정적분 형태를 갖는다.

$$J_{ii} = R_g + jX_g = \int_0^\infty \frac{j e^{-2h\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma_e}} d\lambda \text{-----} (13)$$

$$R_g = 4\omega \times 10^{-7} \left(\frac{\pi}{8} - b_1 k + b_2((C_2 - \ln k)k^2) + b_3 k^3 - d_4 k^4 - \dots \right) \text{-----} (14)$$

$$X_g = 4\omega \times 10^{-7} \left(\frac{1}{2} (0.6159315 - \ln k) + b_1 k - d_2 k^2 + b_3 k^3 - b_4((C_4 - \ln k)k^4) + \dots \right)$$

----- (15)

J_{ij} 도 J_{ii} 와 같이 다음과 같은 부정적분 형태를 갖는다.

$$J_{ij} = R_{gm} + jX_{gm} = \int_0^\infty \frac{j e^{-(h_i+h_j)\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma_e}} \cos \lambda d\lambda \text{-----} (16)$$

마찬가지로 J_{ij} 에 대해서 전개를 하면은 다음과 같다.

$$R_{gm} = 4\omega \times 10^{-7} \left(\frac{\pi}{8} - b_1 k_m \cos \theta + b_2((C_2 - \ln k_m)k_n^2 \cos 2\theta + \theta k_m^2 \sin 2\theta) + b_3 k_m^3 - d_4 k_m^4 \cos 4\theta + \dots \right) \text{-----} (17)$$

$$X_{gm} = 4\omega \times 10^{-7} \left(\frac{1}{2} (0.6159315 - \ln k_m) + b_1 k_m \cos \theta \right. \\ \left. - d_2 ((C_2 - \ln k_m) k_m^2 \cos 2\theta + \theta k_m^2 \sin 2\theta) \right. \\ \left. + b_3 k_m^3 - b_4 ((C_4 - \ln k_m) k_m^4 \cos 4\theta + \theta k_m^4 \sin 4\theta) + \dots \right) \quad (18)$$

단

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad b_2 = \frac{1}{16}, \quad b_i = b_{i-2} \frac{\text{sign}}{i(i+2)} \quad C_i = C_{i-2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+2}, \quad C_2 = 1.3659315, \quad d_i = \frac{\pi}{4} b_i$$

h, h_i, h_j : 지상으로부터 도체의 높이

b_i 의 부호인 “sign”은 4개 모든 항목에서 변화하며, 그 부호는 $i=1, 2, 3, 4$ 경우에는 $\text{sign}=+1$ 이 되고, $i=5, 6, 7, 8$ 인 경우에는 $\text{sign}=-1$ 이 된다. 식 (14), (15), (17) 및 (18)은 주파수에 관련된 것이며, 상수들은 다음과 같이 나타내어진다.

$$k = 4\pi\sqrt{5} \times 10^{-4} \quad 2h_i \sqrt{f/\rho}, \quad k_m = 4\pi\sqrt{5} \times 10^{-4} \quad D_{ij} \sqrt{f/\rho}$$

단 f 는 주파수이며, ρ 는 대지 저항율이다. θ 는 $i-i'$ 과 $i-j'$ 의 사이 각으로서 그림 3에서 나타낸 것과 같으며, 다음과 같이 정의된다.

$$\theta = \sin^{-1}(x_{ij}/D_{ij})$$

식 (13)과 (16)은 대지의 투자율 $\mu = \mu_0$ 에 대해서 Carson이 유도해낸 식이다. 근사식은 다음과 같이 주어진다. 실제대지는 대지 표면에서 복합거리 p 위치한 완전도체로 대체한 것이며, 이상적인 대지/도체의 대지귀환임피던스 식은 다음과 같이 된다.

$$Z_{ii} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h}{r} \quad (19)$$

$$Z_{ij} = j\omega \frac{\mu_0}{2} \pi \ln \frac{\sqrt{(h_i + h_j)^2 + D_{ij}^2}}{\sqrt{(h_i - h_j)^2 + D_{ij}^2}} \quad (20)$$

이 식은 Dubanton 식이라 하며, Carson의 식 (13)과 (16)을 대체하여 넓은 영역에서 거의 정확한 값을 얻을 수 있다.

3. 연속적 복층 대지

3.1 복층대지 모델링

대지에 전류 I가 도통될 때에 $H_o = M(0)$ 이 된다. 단 $M(x)$ 는 깊이 x 에서 자장의 세기이다. 간편한 미분방정식으로 표시를 하면은 다음과 같다.

$$\frac{dE}{dx} = -j\omega\mu_0 H \\ \frac{dH}{dx} = -\sigma E \quad (21)$$

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j\omega\mu_0 \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \quad (22)$$

이 식의 적분은 불가능하므로, 초기 값 $E(0) = E_0, H(0) = H_0$ 을 가지고 수치해석적분을 수행한다. E_0 의 값을 알 수가 없기 때문에 다음에 오는 목적함수가 0이 되는 값을 trial and error방식으로 구한다.

$$E_B = \frac{1}{2} (E(x_\infty) - \zeta(x_\infty)H(x_\infty)) \\ E_B \cong 0 \quad \text{when } x \rightarrow \infty \quad (23)$$

그 때에

$$\phi = \int_0^{x_{\infty}} \mu_0 H dx = \frac{1}{j\omega} (E_0 - E_{x_{\infty}}) = \frac{E_0}{j\omega} \quad \text{----- (24)}$$

복층 깊이 p 는 다음과 같이 얻어진다.

$$p = \frac{\phi}{\mu_0 H_0} \quad \text{----- (26)}$$

계산된 복층 깊이 p 를 고려하여 볼 때, p 는 귀환전류의 무게 중심점을 나타내는 것을 알 수 있다.

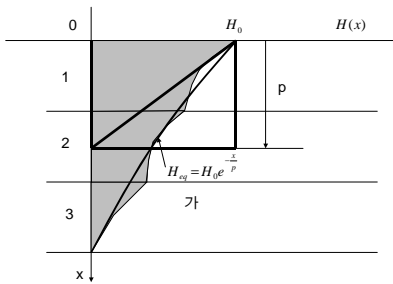


그림 2 $H(x)$ 무게중심으로서의 복층깊이 p

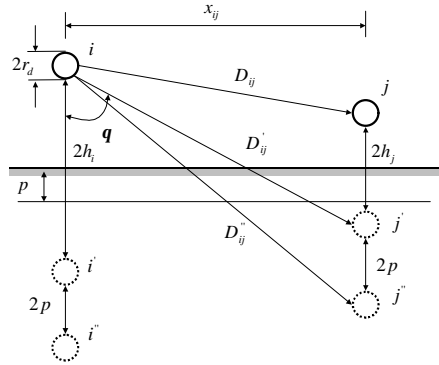


그림 3 전송도체 i 및 j 와 전송도체 i' 및 j'' , skin depth p

그림 3에서 보는 것과 같이 $H(x)$ 의 부분은 빗금이 쳐있다. 등가 균일 대지로 하면은 $H_{eq} = H_0 e^{-\frac{x}{p}}$ 으로된다. $H(x)$ 의 형태와 상관없이 무게중심을 구하면은 깊이 p 에 해당하는 사각형과 동일하게 된다.

3.2 복층대지귀환 깊이

저주파에서 Z_g 와 Z_{gm} 의 계산에서 Carson 무한급수 (14), (15), (17) 및 (18)은 아주 급속하게 수렴된다. 반대로, 고주파에서는 천천히 수렴이 된다. 정확한 값을 얻기 위한 필요한 차수는 주파수에 급속하게 증대한다. 대지귀환 방법의 깊이는 그림3 에서와 같이 도체 i 에서의 귀환전류는 도체의 밑 즉 h_i+2p 의 깊이로 위치한 가상 대지귀환로를 통하여 귀환하게 된다. i'' 는 도체 i 의 가상 대지귀환로이며, p 는 대지의 표피깊이이다. 대지는 대지귀환로의 묶음으로 대체할 수 있다.

복층 개념은 $\mu \neq \mu_0$ 에 대한 도체/대지 귀환임피던스를 계산하는데 사용할 수 있다.

$$L_{ii} = \frac{\mu}{\pi} J_{ii} \quad \text{----- (27)}$$

$$L_{ij} = \frac{\mu}{\pi} J_{ij} \quad \text{----- (28)}$$

식 (11)과 (12)에서 복층 인덕턴스 식(27) 와 (28)을 정리하여 풀 수 있으며, 어떠한 μ 에서도 적용될 수 있는 J_{ii} 와 J_{ij} 를 다음과 얻는다[5].

$$J_s \cong \frac{j}{2} \ln \frac{h+p}{h} \quad \text{----- (29)}$$

$$J_m \cong \frac{j}{2} \ln \frac{\sqrt{(h_i+h_j+2p)^2 + d_{ij}^2}}{\sqrt{(h_i+h_j)^2 + d_{ij}^2}} \quad \text{----- (30)}$$

두 개의 도체 i, j 에 대해서, 식 (30)은 다음과 같이 되며, 어떠한 μ 에서도 적용이 가능하다.

$$Z_{ij} = \frac{j}{2} \ln \frac{D_{ij}''}{D_{ij}} \text{-----} (31)$$

$$Z_{ij} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{ij}''}{D_{ij}} \text{-----} (32)$$

식 (32)는 $\mu = \mu_0$ 일 경우에 사용되며, 계층화된 대지에 사용이 가능하다.

결론적으로

그림 3과 같이 도체와 대지간에 루프를 형성하는 임피던스는 다음과 같은 특성을 갖고 있다.

- 이상적이 대지에 대한 첫 번째 항목에서는 투자율 μ_0 와 $\ln \frac{D_{ij}''}{D_{ij}}$ 의 형태를 갖는다.
- 대지 수정항목에 대한 두 번째 항목에서는 투자율 μ 와 $\ln \frac{D_{ij}''}{D_{ij}}$ 의 형태를 갖는다.

따라서, $\mu = \mu_0$ 이라면, 2개의 항목을 전체 임피던스를 나타낼 수 표현이 가능하며, 투자율 μ_0 와 $\ln \frac{D_{ij}''}{D_{ij}}$ 을 형태를 갖는다.

도체와 가상 대기권환로의 거리는 대지에서 도체의 높이 및 대지 표면의 깊이($h_i + 2p$)의 합이다. 거리는 표면의 깊이가 복소수이기 때문에 복소수이다. 따라서 자기 및 상호임피던스는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z_{ii} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2(h_i + p)}{r_i} + Z_c \text{-----} (31)$$

$$Z_{ij} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(h_i + h_j + 2p)^2 + x_{ij}^2}}{\sqrt{(h_i - h_j)^2 + x_{ij}^2}} + Z_c = j\omega \frac{\mu_0}{2} \pi \ln \frac{D_{ij}''}{D_{ij}} \text{-----} (32)$$

$$\text{단 } p = \sqrt{\frac{\rho}{j\omega\mu_0}}$$

4. 결론

본 논문에서는 Carson의 임피던스 계산방법을 대지/도체 귀환전류를 이용하여 하게 하였다. 이 방법의 이점은 간편성과 간단한 컴퓨터 프로그램을 이용하여 쉽게 정확한 값을 얻을 수가 있다. Carson의 점근식을 쉽게 계산할 수 있다 할지라도, 특정 주파수 대역에서는 검증이 필요하다. 반면에 복층 깊이 방법은 간단하면서 넓은 대역에서 임피던스 계산이 가능하다. 본 논문에서는 해석적인 방법을 시도하였다. 근간될 논문(5)에서는 실제적인 오차를 비교하였다.

※ 참고문헌

1. Yaw-Juen Wang and Shi-Jie LIU " A Review of Method for Calculation of Frequency-dependant Impedance of Overhead Power Transmission Lines", Proc. Natl. Conc. ROC(A) Vol. 25, No. 6, 2001. pp. 329-338
2. Sergey L. Loyka, "On Calculation of the Ground Transient Resistance of Overhead Lines",

- IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility, vol. 41, pp. 193-195, August 1999.
3. A. Deri et al. "The Complex Ground Return Plane A Simplified Model For Homogeneous And Multi-Layer Earth Return", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 100(8), 3686-3693, 1981
 4. 장길수, "도시철도표준화 연구개발사업 (PSCAD/EMTDC를 이용한 도시철도 교류 급전시스템 해석모델 개발 및 적용), 한국철도기술연구원, 2002
 5. 이춘배외 1인, "Modified Carson's Method에 의한 전차선로 임피던스계산", 하계전기학회 학술대회, 2004(to be published)