한국 고속 전철 궤도회로의 수학적 모델링
A Mathematical Model For The Track Circuit Of The Korea High Speed Line

엄정규* 이왕희* 조용기** 유광균***
Um, Jung-Kyou Lee, Wang-Hee Cho, Yong-Gi Yoo, Kwang-Kyun

ABSTRACT

This study analysis the current level of the Korea High Speed Line by mathematical model of the rail and compensation capacitors. The rail and compensation capacitors are represented by transmission parameters and the analysis is processed by computer simulation.

---

1. 서론

한국 고속 전철에서는 레일을 이용한 궤도 회로를 구성하여 차량 속도 제어에 필요한 정보를 차상으로 전송한다. 이러한 속도 제어 정보는 전류의 형태로 레일로 전송되며, 차량의 전두부 아래에 설치되어있는 마그네틱 센서를 통하여 차상 제어 장치가 이를 수신한다. 전류의 형태로 레일을 통하여 정보를 전송하기 위해서는 레일의 전 구간에 걸쳐 마그네틱 센서가 수신 가능한 전류의 레벨을 유지하는 것이 중요하며, 이를 위하여 한국 고속 전철의 궤도 회로에서는 레일의 일정 간격 마다 보상 캐패시터를 설치하여 레일의 특성 임피던스를 감소시켜 전류 의 손실을 줄이므로써 마그네틱 센서가 수신 가능한 전류의 레벨을 레일의 전 구간에 걸쳐 유지하고 있다. 본 논문에서는 한국 고속 전철의 레일과 보상 캐패시터를 수학적으로 모델링하여 시뮬레이션을 통해 보상 캐패시터의 설치에 따른 전류 레벨의 변화를 분석하였다.

2. 한국 고속 전철 궤도 회로

한국 고속 전철의 궤도 회로는 무절연 Audio Frequency 궤도 회로로써, 궤도 구간을 전기적인 회로를 구성하여 나누고 2040, 2400, 2760, 3120Hz의 Audio Frequency(가청 주파수) 대역의 주파수 신호를 사용하여 지상에서 차상으로 정보를 전송하는 궤도 회로 시스템을 사용하고 있다. 그림 1. 은 궤도 회로 일부를 나타내는 그림이다.

---

* LG산전 주임연구원, 정회원
** LG산전 책임연구원, 정회원
*** 철도대 교수, 정회원

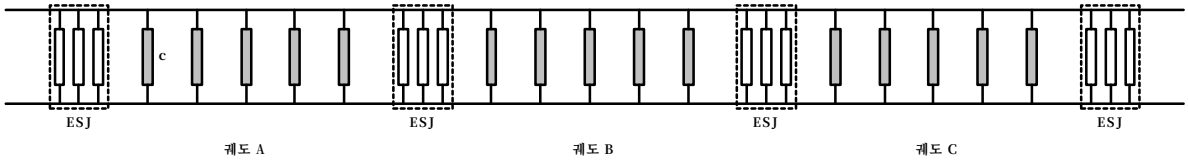

그림 1. 궤도 회로의 구성

그림 1. 에서 ESJ (Electrical Seperate Joint) 는 전기 절연 구간으로써 각 궤도를 전기적으로 절연하는 회로이다. C 는 보상 캐패시터로 레일의 특성 임피던스를 감소시켜서 그에 따른 전류의 감쇄를 억제한다.

3. 레일 및 보상 캐패시터의 수학적 모델링

3.1 전송 파라미터

레일과 보상 캐패시터는 각각 그림 2. 와 같은 이중 포트 네트워크로 표현할 수 있고 전송 파라미터로 모델링할 수 있다. 전송 파라미터는 식 (1.1)과 (1.2)로 정의 된다.

그림 2. 이중 포트 네트워크

$$V_1 = A_{11} V_2 + A_{12} I_2 \tag{1.1}$$

$$I_1 = A_{21} V_2 + A_{22} I_2 \tag{1.2}$$

전송 파라미터는 식(2)와 같이 행렬로 표현 가능하고, 각 파라미터의 정의는 식(3.1) ~ 식(3.4)와 같다.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$A_{11} = \frac{V_1}{V_2} \quad I_2 = 0 \tag{3.1}$$

$$A_{12} = \frac{V_1}{I_2} \quad V_2 = 0 \tag{3.2}$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{V_2} \quad I_2 = 0 \tag{3.3}$$

$$A_{22} = \frac{I_1}{I_2} \quad V_2 = 0 \tag{3.4}$$

위와 같은 전송 파라미터를 사용하여 그림 1. 의 레일과 보상 캐패시터를 모델링한 것을 그림 3. 에 나타낸다.

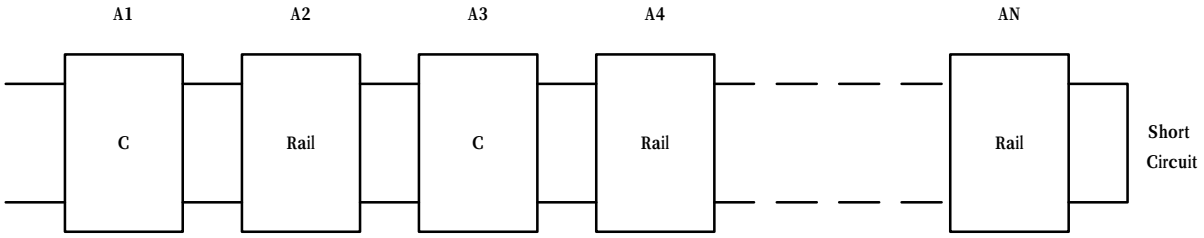

그림 3. 레일과 보상 캐패시터의 모델링

A1, A2, A3, A4, AN 은 각각 캐패시터와, 캐피시터 사이의 거리에 해당하는 레일에 대한 전송 파라미터를 나타낸다. 전체적인 전송 파라미터는 각 전송 파라미터의 곱으로 나타낼 수 있으며 식 (4)와 같다.

$$A = A1\ A2\ A3\ ..AN \tag{4}$$

3.2 레일에 대한 전송 파라미터

단위 길이에 해당하는 레일은 다음 그림과 같은 회로로 등가 표현할 수 있다.

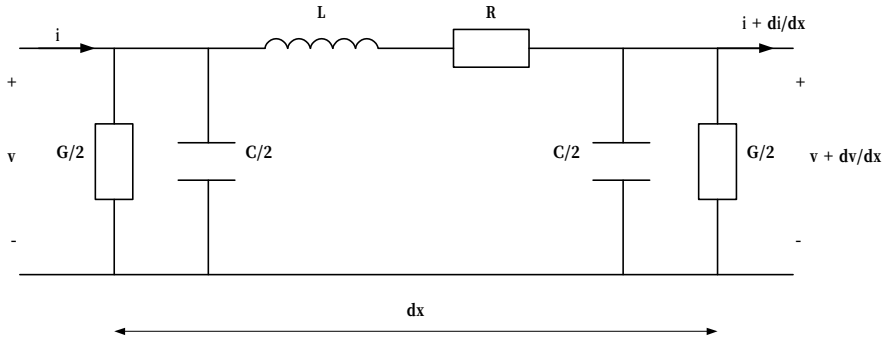

그림 4. 레일의 등가 회로

R 은 단위 길이당 Resistance, L 은 단위 길이당 Inductance, C 는 단위 길이당 Capacitance, G는 단위 길이당 Conductance 이다. 전류 i 와 전압 v 는 각각 거리와 시간의 함수이며 전압 전류 방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$Gv + C\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} \tag{5.1}$$

$$Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.2}$$

v 와 i 는 주파수 w 를 갖는 시간 t 와 거리 x 에 따른 함수이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v(x, t) = V(x)e^{jwt} \tag{6.1}$$

$$i(x, t) = I(x)e^{jwt} \tag{6.2}$$

따라서 식(5.1)과 (5.2)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$GV(x) + jwCV(x) = -\frac{dI(x)}{dx} \tag{7.1}$$

$$RI(x)+jwLI(x)=-\frac{dV(x)}{dx} \tag{7.2}$$

단위 길이당 admittance $Y=G+jwC$, 단위 길이당 impedance $Z=R+jwL$ 라 하면,

$$-\frac{dI(x)}{dx}=YV(x) \tag{8.1}$$

$$-\frac{dV(x)}{dx}=ZI(x) \tag{8.2}$$

이다. 양변을 미분하면

$$\frac{d^2V(x)}{d^2x}=-Z\frac{dI(x)}{dx}=ZYV(x) \tag{9}$$

$\gamma=\sqrt{(R+jwL)(G+jwC)}$ 라 하면 식(9) 의 선형 미분 방정식은 다음과 같은 해를 갖는다.

$$V(x)=\alpha e^{-\gamma x}+\beta e^{\gamma x} \tag{10}$$

식(8.2)에 식(10)을 대입하면,

$$-\frac{d(\alpha e^{-\gamma x}+\beta e^{\gamma x})}{dx}=ZI(x) \tag{11}$$

가 된다. $Z_w=\frac{Z}{\gamma}$ 라 하면,

$$I(x)=\frac{(\alpha e^{-\gamma x}-\beta e^{\gamma x})}{Z_w} \tag{12}$$

이고, α 와 β 를 구하기 위하여 $x=L$ 에서 위 방정식을 풀면,

$$V(L)=\alpha e^{-\gamma L}+\beta e^{\gamma L}=V_2 \tag{13.1}$$

$$I(L)=\frac{(\alpha e^{-\gamma L}-\beta e^{\gamma L})}{Z_w}=I_2 \tag{13.2}$$

이므로

$$\alpha=(V_2+Z_wI_2)e^{\frac{\gamma L}{2}},\quad \beta=(V_2-Z_wI_2)e^{\frac{-\gamma L}{2}}$$

이다. 따라서,

$$V(x)=\frac{(V_2+Z_wI_2)e^{\gamma(L-x)}}{2}+\frac{(V_2-Z_wI_2)e^{-\gamma(L-x)}}{2} \tag{14.1}$$

$$I(x)=\frac{(V_2+Z_wI_2)e^{\gamma(L-x)}}{2Z_w}-\frac{(V_2-Z_wI_2)e^{-\gamma(L-x)}}{2Z_w} \tag{14.2}$$

가 된다. 끝점을 기준으로 하는 임의의 점 $x'=L-x$ 라 하면,

$$V(x)=\frac{(V_2+Z_wI_2)e^{\gamma x'}}{2}+\frac{(V_2-Z_wI_2)e^{-\gamma x'}}{2} \tag{15.1}$$

$$I(x)=\frac{(V_2+Z_wI_2)e^{\gamma x'}}{2Z_w}-\frac{(V_2-Z_wI_2)e^{-\gamma x'}}{2Z_w} \tag{15.2}$$

가 되고,

$$\cosh(\gamma x') = \frac{e^{\gamma x'} + e^{-\gamma x'}}{2},\ \sinh(\gamma x') = \frac{e^{\gamma x'} - e^{-\gamma x'}}{2}$$

이므로

$$V(x) = V_2 \cosh(\gamma x') + Z_w I_2 \sinh(\gamma x') \tag{16.1}$$

$$I(x) = \frac{V_2 \sinh(\gamma x')}{2} + I_2 \cosh(\gamma x') \tag{16.2}$$

이다. $x=0$, 즉 $x'=L$ 에서 다음과 같은 전송 파라미터 식을 얻을 수 있다.

$$V_1 = V_2 \cosh(\gamma L) + Z_w I_2 \sinh(\gamma L) \tag{17.1}$$

$$I_1 = \frac{V_2 \sinh(\gamma L)}{2} + I_2 \cosh(\gamma L) \tag{17.2}$$

식(17.1)과 식(17.2)를 사용하여 레일에 대한 전송 파라미터 A_r 를 정의하면 다음과 같다.

$$A_r = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma L) & Z_w \sinh(\gamma L) \\ \frac{\sinh(\gamma L)}{Z_w} & \cosh(\gamma L) \end{bmatrix} \tag{18}$$

3.3 보상 캐패시터에 대한 전송 파라미터

보상 캐패시터의 등가 모델은 그림 5. 와 같다.

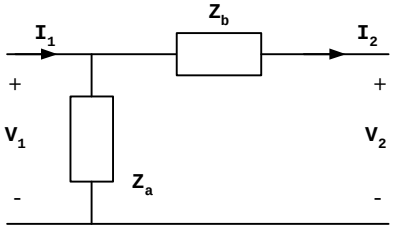

그림 5. 보상 캐패시터의 등가 회로

보상 캐패시터의 전송 파라미터를 정의하면 식(19.1)과 식(19.2)와 같다. 와 같다.

$$V_1 = A_{11} V_2 + A_{12} I_2 \tag{19.1}$$

$$I_1 = A_{21} V_2 + A_{22} I_2 \tag{19.2}$$

각 파라미터의 정의는 식(20.1) ~ 식(20.4)와 같다.

$$A_{11} = \frac{V_1}{V_2}\bigg|_{I_2=0} = 1 \tag{20.1}$$

$$A_{12} = \frac{V_1}{I_2}\bigg|_{V_2=0} = Z_b \tag{20.2}$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{V_2}\bigg|_{I_2=0} = \frac{1}{Z_a} \tag{20.3}$$

$$A_{22} = \frac{I_1}{I_2}\bigg|_{V_2=0} = 1 + \frac{Z_b}{Z_a} \tag{20.4}$$

$Z_b = 0$ 이므로 보상 캐패시터에 대한 전송 파라미터는 다음과 같다.

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jwC & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

3.4 시뮬레이션

일반적으로 한국 고속 전철의 궤도 회로에서 보상 캐패시터의 간격은 반송파 3120Hz, 2760Hz 에 대해서는 80m, 그리고 반송파 2400Hz, 2040Hz 에 대해서는 60m 사용을 기본으로 하고 있다. 본 논문에서는 MatLab 소프트웨어를 사용하여 위에서 구한 레일과 보상 캐패시터의 전송 파라미터를 이용하여 시뮬레이션을 통하여 전류의 변화를 분석하였다. 반송파 주파수 2760Hz에 대하여 시뮬레이션을 수행한 결과를 아래에 보인다. 시뮬레이션시 열차의 속도를 80m/s 로 고정하였고, 입력 전류 신호 $5\cos(2\pi F_c t)$ (여기서, F_c 는 2760Hz) 를 인가하였다. 보상 캐패시터는 25uF 의 용량을 갖고 세로 방향의 직선으로 그 위치를 표시하였으며 시간축의 1 은 1/15000 s 에 해당한다. 한편, R, L, G, C 의 값은 임의의 레일에서 실제로 측정한 값을 이용하였으며 표 1. 에 나타내었다. 그림 6. 은 시뮬레이션을 수행한 후의 전류 레벨을 보이며, 레벨이 높은 곳이 송신측, 레벨이 낮은 곳이 수신측이다. 그림에서 보듯이 보상 캐패시터가 있는 곳을 기준으로 하여 전류의 레벨이 선형으로 감소하지 않고 상향 곡선을 그리며 감소하는 것을 알 수 있다.

표 1. 2760Hz 반송파

F_c	2760Hz
레일 길이	960m
보상캐패시터 간격	80m
R	19.51e-3 Ω/m
L	1.342e-6 H/m
G	6.37e-6 1/Ωm
C	0.734e-9 F/m

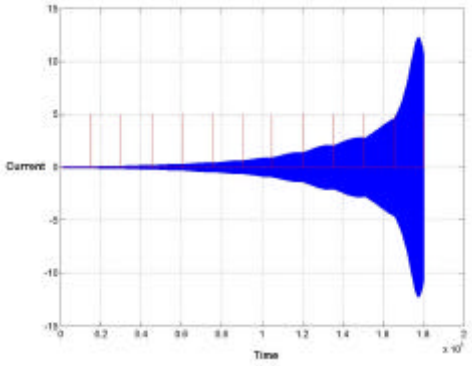

그림 6. 2760Hz 시뮬레이션 결과

한편, 그림 7. 은 실제 고속 전철 라인에서의 전류의 변화를 보인다. 시뮬레이션에서 사용한 궤도와는 다른 궤도 구간이다. 그림 7. 은 전류 파형의 포락선 검파한 것이다. 시뮬레이션의 결과와 마찬가지로 보상 캐패시터가 위치한 곳을 기준으로 하여 선형으로 감소하지 않고 상향 곡선을 그린 후 감소해 나가는 것을 확인할 수 있다.

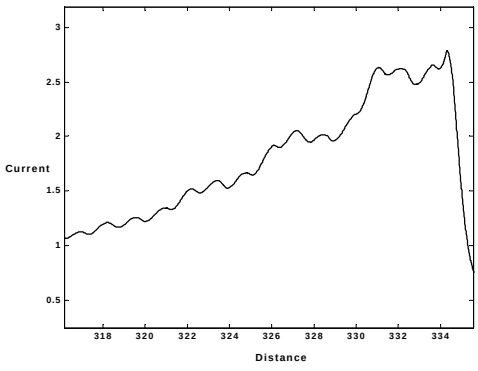

그림 7. 실제 레일에 흐르는 전류

4. 결 론

열차의 지상 정보 수신 여부는 레일에 흐르는 전류의 레벨과 직접적으로 관련있다. 따라서 궤도 구간의 레일의 임피던스 측정과 전류 레벨의 변화 분석은 매우 중요한다. 본 논문에서는 한국 고

속 전철의 레일과 보상 캐패시터를 수학적으로 모델링하고 시뮬레이션을 통하여 전류의 변화를 분석하였다. 향후 더욱 다양한 환경하에서 연구를 수행한다면 보상 캐패시터의 최적 설계, 보상 캐패시터의 이상 유무 검출등에 이용할 수 있을 것이다.

참고문헌

1. 조용기, 한재준외(2000년), “열차제어장치 개발”, 건설교통부, 과학기술부, 산업자원부.
2. 김영태(2003년), “신호제어 시스템”, 테크미디어.
3. 박재영, 홍원식, 전병록(2001년), “철도신호공학”, 동일출판사.
4. C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku(2000년), “Fundamentals of Electric Circuits”, McGraw-Hill.