

스펙트럴요소 모델과 Newton-Raphson 법을
이용한 구조손상규명
Structural Damage Identification by Using the Spectral
Element Model and the Newton-Raphson Method

김정수* 권경수* 이우식**
Kim, Jungsoo Kwon, Kyungsoo Lee, Usik

ABSTRACT

In this paper, a nonlinear structural damage identification algorithm is derived by taking into account the non-linearity of damage. The structural damage identification analyses are conducted by using the direct method and the Newton-Raphson method. It is found that, the Newton-Raphson method in general provides the better damage identification results when compared with the results obtained by the direct method.

1. 서론

손상된 구조물은 고유진동수(natural frequency)[1], 모우드 형상(mode shape)[2], 동적응답(dynamic response)등이 변화하며 이러한 특징을 이용하여 손상의 위치와 크기를 탐지할 수 있다. Banks 등[3]에 의하면 모우드 데이터를 근간으로 하는 구조손상 검출기법은 모우드 데이터가 간접적으로 측정되기 때문에 측정 오차와 모우드 추출 오차에 영향을 받는 단점이 있다. 또한, 유한요소법(FEM)을 바탕으로 하여 고유치문제를 이용한 구조손상 검출기법이 있는데 고주파 영역에서 만족할만한 동적해를 얻기 위해서는 매우 미세한 요소로 구조물을 분할해야 하는 결점과 동일한 요소수로 분할 할 경우 SEM에 비해 정확성이 떨어진다는 단점이 있다.

구조손상검출기법에 있어 모우드 데이터와 유한요소모델 대신에 각각 FRF데이터와 스펙트럴요소모델로 대체함으로써 단점들을 보완할 수 있다. FRF데이터[4,5]는 구조물로부터 직접 측정되며 주파수 영역을 통해 모우드 데이터보다 더 많은 손상정보를 제공하기 때문에 신뢰성이 높고, 스펙트럴요소법(SEM)은 지배방정식과 경계조건을 모두 만족하는 형상함수를 사용하여 엄격하게 유도된 주파수의 함수인 동적요소강성행렬(dynamic element stiffness matrix)을 사용하기 때문에 정확하다.[6,7]

기존의 연구[8]에 있어서 Single-excitation frequency multi-measurement points(SFMP)의 방법

* 인하대학교 기계공학과 석사과정

** 책임저자, 인하대학교 기계공학과 교수, 정회원

의 경우 선형식으로부터 추출된 초기 손상의 크기가 물리적 타당성을 잃어버려 비선형 구조손상 검출기법으로 정확한 손상의 크기를 산출하지 못하는 잘못된 수치해석 결과가 발생하였다. 또한, 손상이 클 경우 구조손상검출기법의 비선형성이 증가하게 되어 대부분의 가진 주파수에서 정확한 손상값과 위치를 찾지 못하고 발산하게 된다. Multi-excitation Frequencies Multi-measurement Points(MFMP)의 경우도 구조손상의 검출기법이 손상 크기에 따른 비선형성의 증가와 초기 손상의 잘못된 선정으로 인하여 협소한 주파수 영역에서만 구조 손상 검출기법을 적용시킬 수 있었다.

본 논문에서는 Newton-Raphson method을 통하여 비선형성 구조손상 검출기법의 정확성 증가와 더불어, 손상이 클 때 선형식으로부터 산출된 잘못된 초기값을 보정을 사용함으로써 SFMP의 경우 일부 주파수에서 수렴하지 않던 문제점을 해결하였다. 또한, MFMP의 경우도 두 가지 개선된 방법을 적용시킴으로써 구조손상을 제대로 검출하지 못하였던 것을 거의 모든 주파수에서 정확한 구조손상을 검출할 수 있도록 하였다.

2. 비선형 구조손상 검출이론의 유도

손상이 없는 보에 대한 힘과 변위의 관계식은 스펙트럴 요소모델을 통해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[\mathbf{S}(\omega)]\{\mathbf{U}(\omega)\} = \{\mathbf{P}(\omega)\} \quad (1)$$

여기서 $[\mathbf{S}]$ 는 손상이 없는 보의 동적강성행렬이다. $\{\mathbf{U}\}$ 는 보의 절점자유도(nodal DOFs) 벡터이고, 벡터 $\{\mathbf{P}\}$ 는 외부에서 가해지는 절점력(nodal forces) 벡터이다. 동일한 보 구조물에 손상이 있고, 동일한 위치와 같은 크기로 절점력이 작용하면 손상된 보의 힘과 변위의 관계식은 식(1)과 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$[\bar{\mathbf{S}}(\omega)]\{\bar{\mathbf{U}}(\omega)\} = \{\mathbf{P}(\omega)\} \quad (2)$$

$[\bar{\mathbf{S}}]$ 는 손상된 보 구조물의 동적강성행렬이고 $\{\bar{\mathbf{U}}\}$ 는 손상된 보 구조물의 절점자유도 벡터이다. 이론적으로 구한 동적강성행렬 $[\mathbf{S}]$ 와 손상된 보의 구조물로부터 측정된 절점자유도 벡터 $\{\bar{\mathbf{U}}\}$ 는 알고 있는 값이 된다. 그러나, 손상된 동적강성행렬 $[\bar{\mathbf{S}}]$ 는 손상의 위치와 크기에 따라 결정되기 때문에 모르는 값이 된다. 손상된 동적강성행렬 $[\bar{\mathbf{S}}]$ 는 이론적으로 구한 동적강성행렬 $[\mathbf{S}]$ 과 손상에 의해 발생한 섭동 강성행렬 $[\Delta\mathbf{S}]$ 로 표현될 수 있다.

$$[\bar{\mathbf{S}}(\omega)] = [\mathbf{S}(\omega)] + [\Delta\mathbf{S}(\omega)] \quad (3)$$

식(3)을 식(2)에 대입하면 다음과 같다.

$$\{\mathbf{P}(\omega)\} - [\mathbf{S}(\omega)]\{\bar{\mathbf{U}}(\omega)\} = [\Delta\mathbf{S}(\omega)]\{\bar{\mathbf{U}}(\omega)\} \quad (4)$$

주절점력 $\{\mathbf{F}(\omega)\}$ 과 부절점력 $\{\mathbf{0}\}$ 로 벡터 $\{\mathbf{P}\}$ 를 나누어 표현할 수 있다.

$$\{\mathbf{P}(\omega)\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_m(\omega) \\ \mathbf{P}_s(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\omega) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

실험으로부터 측정되는 주절점자유도(master nodal DOFs) $\{\bar{\mathbf{U}}_m\}$ 와 측정되지않는 부절점자유도(slave nodal DOFs) $\{\bar{\mathbf{U}}_s\}$ 로 벡터 $\{\bar{\mathbf{U}}\}$ 를 분리하여 표현할 수 있다.

$$\{\bar{\mathbf{U}}(\omega)\} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_m(\omega) \\ \bar{\mathbf{U}}_s(\omega) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

행렬 $[\bar{\mathbf{S}}]$ 와 $\bar{\mathbf{U}}$ 도 식(5)와 식(6)과 같은 방법으로 표현될 수 있다. 식(5)와 식(6)을 식(2)에 대입하면 벡터 $\{\bar{\mathbf{U}}\}$ 와 주절점벡터 $\bar{\mathbf{U}}_m$ 사이의 관계를 손상이 있는 변환행렬 $[\bar{\mathbf{T}}(\omega)]$ 를 통해 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{\bar{\mathbf{U}}(\omega)\} = [\bar{\mathbf{T}}(\omega)]\{\bar{\mathbf{U}}_m(\omega)\} \quad (7)$$

여기서 $[\bar{\mathbf{T}}(\omega)]$ 는 식(3)과 마찬가지로 손상이 없는 변환행렬 $[\mathbf{T}(\omega)]$ 와 섭동변환행렬 $[\Delta\mathbf{T}(\omega)]$ 로 표현할 수 있다.

$$[\bar{\mathbf{T}}(\omega)] = [\mathbf{T}(\omega)] + [\Delta\mathbf{T}(\omega)] \quad (8)$$

$$[\Delta\mathbf{T}(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\mathbf{t}(\omega) \end{bmatrix} \quad (9)$$

식(7)을 식(4)에 대입하면

$$\{\mathbf{F}(\omega)\} - [\mathbf{X}(\omega)]\{\bar{\mathbf{U}}_m(\omega)\} = [\mathbf{Y}(\omega)]\{\bar{\mathbf{U}}_m(\omega)\} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}(\omega)] &= [\mathbf{S}_{mm}] - [\mathbf{S}_{ms}][\mathbf{S}_{ss}]^{-1}[\mathbf{S}_{sm}] \\ [\mathbf{Y}(\omega)] &= ([\mathbf{S}_{ms}] + [\Delta\mathbf{S}_{ms}])\{[\mathbf{S}_{ss}]^{-1}[\Delta\mathbf{S}_{ss}]([\mathbf{S}_{ss}] + [\Delta\mathbf{S}_{ss}])^{-1}([\mathbf{S}_{sm}] + [\Delta\mathbf{S}_{sm}])\} \\ &\quad - ([\mathbf{S}_{ms}] + [\Delta\mathbf{S}_{ms}])[\mathbf{S}_{ss}]^{-1}[\Delta\mathbf{S}_{sm}] + [\Delta\mathbf{S}_{mm}] - [\Delta\mathbf{S}_{ms}][\mathbf{S}_{ss}]^{-1}[\mathbf{S}_{sm}] \end{aligned} \quad (11)$$

손상의 효과는 섭동 동적강성행렬 $[\Delta\mathbf{S}]$ 에 의해 식(10)의 오른쪽 항에서 나타나고 식(10)을 이너턴스(Inertance) FRF $\{\mathbf{A}_m\}$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$\{\ddot{\mathbf{a}}\} + \frac{1}{\dot{\mathbf{u}}^2}[\mathbf{X}(\dot{\mathbf{u}})]\{\mathbf{A}_m(\dot{\mathbf{u}})\} = -\frac{1}{\dot{\mathbf{u}}^2}[\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{u}})]\{\mathbf{A}_m(\dot{\mathbf{u}})\} \quad (12)$$

절점력 위치벡터 $\{\ddot{\mathbf{a}}\}$ 는 절점력이 작용하는 요소에서만 1의 값을 갖는다.

3. 구조손상 검출 해석 기법

3.1. Direct Method

Direct Method를 적용시키기 위해서 식(12)를 정리하면

$$\{\ddot{\mathbf{a}}\} + \frac{1}{\omega^2}[\mathbf{X}(\omega)]\{\mathbf{A}_m(\omega)\} = -\frac{1}{\omega^2}([\mathbf{Y}(\omega)]_{\text{approx}} + [\mathbf{H}(\omega)])\{\mathbf{A}_m(\omega)\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}(\omega)]_{\text{approx}} &= [\mathbf{S}_{ms}][\mathbf{S}_{ss}]^{-1}[\mathbf{DS}_{ss}][\mathbf{S}_{ss}]^{-1}[\mathbf{S}_{sm}] - [\mathbf{S}_{ms}][\mathbf{S}_{ss}]^{-1}[\mathbf{DS}_{sm}] \\ &\quad + [\mathbf{DS}_{mm}] - [\mathbf{DS}_{ms}][\mathbf{S}_{ss}]^{-1}[\mathbf{S}_{sm}] \\ [\mathbf{H}(\omega)] &= [\mathbf{Y}(\omega)] - [\mathbf{Y}(\omega)]_{\text{approx}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$-\frac{1}{\omega^2}([\mathbf{Y}(\omega)] + [\mathbf{H}(\omega)])\{\mathbf{A}_m(\omega)\} = [\ddot{\mathbf{O}}(\omega)]\{\mathbf{D}\} + \{\mathbf{R}(\omega)\} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} [\ddot{\mathbf{O}}(\omega)] &= [\ddot{\mathbf{o}}_1(\omega) \quad \ddot{\mathbf{o}}_2(\omega) \quad \dots \quad \ddot{\mathbf{o}}_N(\omega)] \\ \{\mathbf{D}\} &= \{\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \dots \quad \mathbf{D}_N\}^T \\ \{\mathbf{R}(\omega)\} &= -\frac{1}{\omega^2}[\mathbf{H}(\omega)]\{\mathbf{A}_m\} \\ \{\ddot{\mathbf{o}}_k(\omega)\} &= -\frac{1}{\omega^2}([\mathbf{L}_k][\mathbf{T}(\omega)])^T[\mathbf{k}_k(\omega)]([\mathbf{L}_k][\mathbf{T}(\omega)])\{\mathbf{A}_m(\omega)\} \end{aligned} \quad (16)$$

식(15)과 식(16)을 통하여, 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$[\mathbf{F}(\omega)]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{B}(\omega)\} - \{\mathbf{R}(\omega)\} \quad (17)$$

3.2. Newton-Raphson Method

Newton-Raphson method를 적용시키기 위해서 식(12)를 다시 한번 정리하면

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{D})\} = \{\mathbf{B}\} + \frac{1}{\omega^2} [\mathbf{Y}(\omega)] \{\mathbf{A}_m(\dot{u})\} \quad (18)$$

$$\{\mathbf{B}\} = \{\ddot{\mathbf{a}}\} + \frac{1}{\dot{u}^2} [\mathbf{X}(\dot{u})] \{\mathbf{A}_m(\dot{u})\} \quad (19)$$

식(18)을 Newton-Raphson method를 적용시킨 최종적인 구조손상 알고리즘은 다음과 같다.

$$\{\mathbf{D}\}^{i+1} = \{\mathbf{D}\}^i - [\mathbf{Ta}]^{-1} \{\mathbf{R}(\mathbf{D}^i)\} \quad (20)$$

$$\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \cdots \mathbf{D}_N\}^T$$

$$[\mathbf{Ta}] = \frac{1}{\omega^2} \{[\mathbf{Ta}_1] [\mathbf{Ta}_2] \cdots [\mathbf{Ta}_N]\}$$

$$\{\mathbf{Ta}_i\} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}_i} [\mathbf{Y}(\omega)] \{\mathbf{A}_m(\dot{u})\} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (21)$$

$[\mathbf{Ta}]$ 는 다항식의 Newton-Raphson Method의 Tangential Matrix이다. 초기 손상 크기는 선형식 [8]에서 구한 후 초기값 보정 알고리즘을 거쳐 선출된 초기 손상 크기로 식(20)에 적용하여 해를 반복하여 구하였다.

3.3. 유효손상크기와 보정

Fig. 1(a)에서 보듯이 실제적인 손상의 위치, 형상 크기를 알 수 없기 때문에 손상영역의 강성을 명확하게 표현할 수 없다. 손상을 Fig. 1(b)에서처럼 손상이 없는 영률 E , 손상이 있는 영률 \bar{E} , 요소 전체에 균일하게 분포된 유효손상크기 D 로 손상의 크기를 영률(Young's modulus)의 감소로서 표현할 수 있다. D 가 0인 경우는 손상이 없는 상태를 의미하고, D 가 1인 경우는 손상에 의한 재료의 완전파괴를 의미한다. 실제 손상의 크기가 클 경우 손상검출기법의 선형식[8]을 풀면 재료의 완전파괴를 의미하는 1을 넘게 되는 초기값이 나오게 되므로 물리적 타당성이 결여되고 비선형 손상 검출기법을 통해 얻어진 손상의 값 역시 발산하게 된다. 이를 방지하기 위해 초기값의 보정이 필요하게 된다.

3.4. 동적요소강성 행렬

손상이 없는 유한 베르누이-오일러 보요소의 동적요소강성행렬은 다음과 같다.

$$[\mathbf{s}(\omega)] = \frac{\kappa EI}{Ch \cdot c - 1} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_2^T & \mathbf{s}_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[\mathbf{s}_1] = \begin{bmatrix} -\kappa^2(Ch \cdot s + Sh \cdot c) & -\kappa \cdot Sh \cdot s \\ -\kappa \cdot Sh \cdot s & -(Ch \cdot s - Sh \cdot c) \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{s}_2] = \begin{bmatrix} \kappa^2(Sh + s) & -\kappa(Ch - c) \\ \kappa(Ch - c) & -(Sh - s) \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{s}_3] = \begin{bmatrix} -\kappa^2(Ch \cdot s + Sh \cdot c) & \kappa \cdot Sh \cdot s \\ \kappa \cdot Sh \cdot s & -(Ch \cdot s - Sh \cdot c) \end{bmatrix} \quad (23)$$

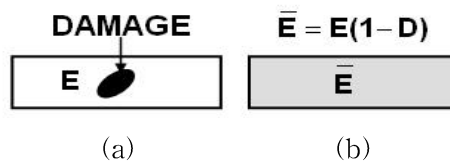


Fig. 1 A finite structure element with damage: (a) true damage state, and (b) its equivalent representation

여기서 EI 보의 굽힘강성(bending stiffness)이고 k 는 파수이다. 손상된 베르누이-오일러 보요소의 동적요소 강성행렬은 E 를 $\bar{E} = E(1-D)$ 로 교체하고 섭동 동적요소 강성행렬 $[\Delta s]$ 를 D 에 관하여 테일러급수(Taylor series)로 전개하고 고차항을 소거하면 근사화된 섭동 동적요소 강성행렬 $-D[k]$ 을 유도할 수 있다. 이를 바탕으로 비선형 구조손상기법의 초기 손상값을 구한후 Newton-Raphson method를 사용하여 정확한 손상을 검출하였다.

4. 수치예제

보의 길이 L 은 0.4m 로서 동일한 81개의 요소로 나누었고, 14번째 41번째 그리고 68번째 요소에 각각 0.4, 0.5, 0.3의 유효 균일손상크기를 주었다. 가진 주파수는 임의값 24, 122, 123Hz를 사용하였고, 보의 굽힘강성 EI 은 $14.6N \cdot m^2$ 이며, 길이 당 질량밀도 A 는 $0.275kg/m$ 이다. 이너턴스(Inertance) $FRF\{A_m\}$ 는 해석적으로 구한 이너턴스 FRF 를 사용하였다. Fig. 2은 구조손상검출 알고리즘의 순서도를 나타낸다. 본 알고리즘은 비선형식에서 초기값의 중요성을 고려하여 선형식의 형태에서 손상의 위치와 크기를 구해주고 유효치 못한 초기값의 경우 이를 보정하여 비선형식을 풀게 하였다. 또한, 먼저 나온 손상크기와 비교하여 그 크기가 일정 값보다 클 경우 다시 보정식에 돌려보내 위의 과정을 반복하게 했다. 이때 수렴도는 다음과 같이 제곱평균제곱근(RMS, root mean square)으로 정의한 값으로 판단한다. Fig. 3는 SFMP경우와 MFMP의 경우 기존의 논문에서 언급한 Direct Method를 구조손상 검출이론에 실행한 결과이다. SFMP의 경우 122Hz외에도 수렴하지 않는 주파수가 존재하고, MFMP의 경우 매우 협소한 가진 주파수에서만 구조손상이 검출된다. Fig. 4는 앞서 보여준 Direct Method와 동일한 손상 조건하에서 초기값 보정과 Newton-Raphson Method를 사용한 구조손상을 검출한 결과이다. SFMP의 경우 일부 수렴하지 않는 가진 주파수에서도 구조손상을 정확히 검출하고 또한, MFMP의 경우에서도 정확히 검출하고 있다.

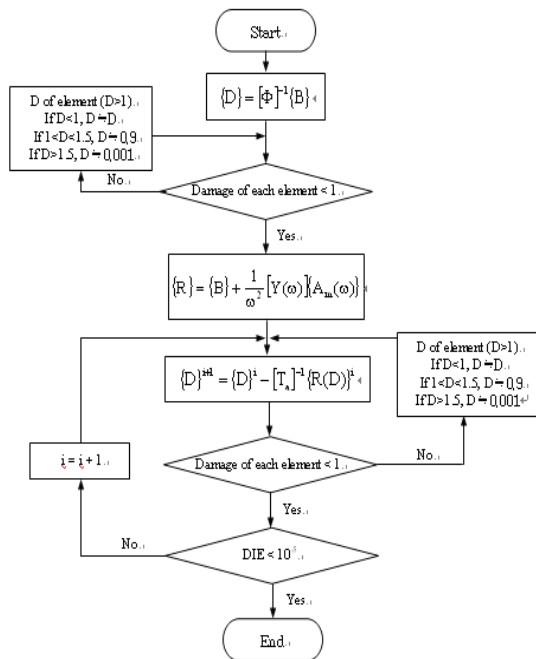
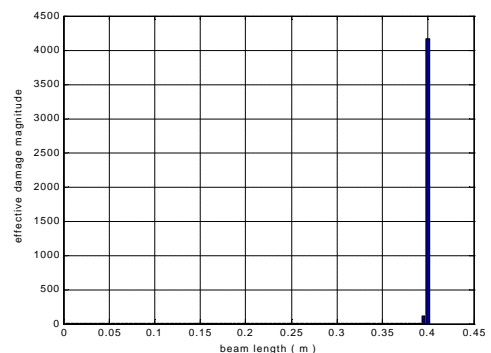
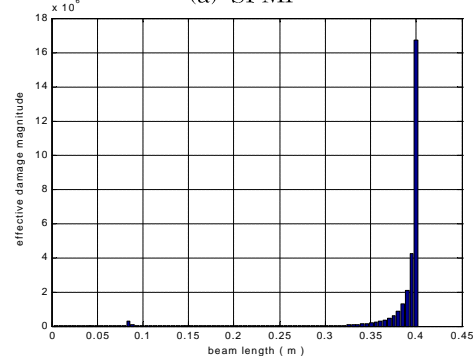


Fig. 2 Flowchart of the present SDIM

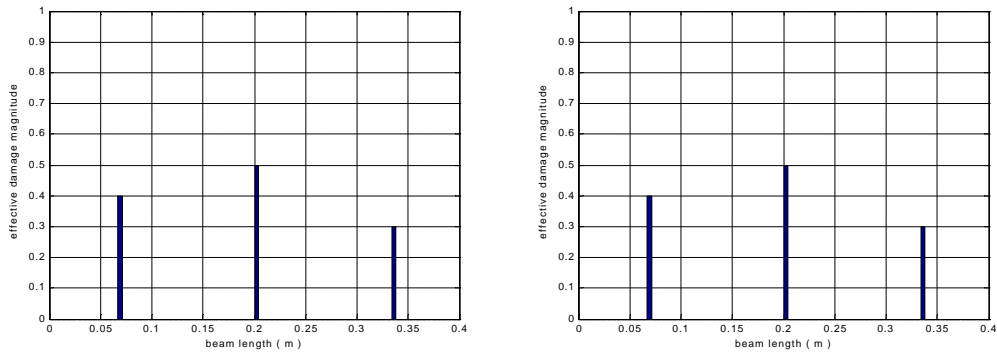


(a) SFMP



(b) MFMP

Fig. 3 SDIM by Direct Method



(a) SFMP (b) MFMP
 Fig. 4 Damage identification results by Newton-Raphson Method

5. 결 론

FRF와 엄밀한 동적강성행렬의 장점을 이용한 구조손상검출의 주파수 영역기법은 동적강성행렬 식으로 표현된 구조물의 운동방정식으로부터 유도하였고, 이를 보 구조물에 적용하였다. 본 논문의 손상검출기법은 물리적 타당성을 고려한 초기값 보정과 더불어 Newton-Raphson Method를 사용하여 일부 가진 주파수에서 손상검출을 하지 못하던 것을 보완하였다.

후 기

본 논문은 2003년도 학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음.(KRF-2003-041-D20013)

참고문헌

1. R. D. Adams, P. Cawley, C. J. Pye and B. J. Stone (1978), "A Vibration Technique for Non-destructively Assessing The Integrity of Structures," Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.20, No.2, pp.93-100.
2. C. Cempel, H. G. Matkem, and A. Ziolkowski (1992), "Application of Transformed Normal Modes for Damage Location in Structures," Structural Integrity Assessment (Ed. P. Stanley), Oxford, Elsevier, pp.246-255.
3. H. T. Banks, D. J. Inman, D. J. Leo and Y. Wang (1996), "An Experimentally Validated Damage Detection Theory in Smart Structures," Journal of Sound and Vibration, Vol.191, No.5, pp.859-880.
4. S. K. Thyagarajan, M. J. Schulz and P. F. Pai (1998), "Detecting Structural Damage Using Frequency Response Functions," Journal of Sound and Vibration, Vol.210, No.1, pp.162-170.
5. Z. Wang, R. M. Lin and M. K. Lim (1997), "Structural Damage Detection Using Measured FRF Data," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.147, pp.187-197.
6. J. F. Doyle (1997), Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms, New York, p.320.
7. U. Lee, J. Kim and A. Y. T. Leung (2000), "The Spectral Element Method in Structural Dynamics," The Shock and Vibration Digest, Vol.32, No.6, pp.451-465.
8. U. Lee, S. Min and J. Kim (2003), "Structural Damage Identification by Using Spectral Element Model," 한국전산구조공학회, Vol.30, pp.366-373