

다공정 성형 해석에 의한 자동차 멤버 부품 개발

박춘달* · 정완진** · 김병민***

Manufacturing Automobile Member Part by Multi-Stage Simulation

C. D. Park, W. J. Chung and B. M. Kim

Abstract

Most of member parts have experienced severe springback problems because of their open shape. Now it becomes imperative to develop an effective method, which can resolve these problems. However, there remain several obstacles to get accurate estimation of shape error. In analysis, we have to analyze the total process including forming, trimming and flanging. Furthermore, it is another challenge to compare the computed result with the real shape. In this study we developed an analysis program for the springback analysis. We could achieve a big enhancement in computation time in springback analysis by using latest equation solving technique and could get a more robust solution convergence by continuation method. We have approached this problem in two steps. In the first step, we analyzed forming stage to solve tearing and wrinkling problems. In the second step, we have analyzed full process and have done springback analysis with the same boundary condition as field measuring conditions. We have investigated the accuracy of springback analysis in terms of gap and flush used for inspection of real autobody panels. We found good and effective agreement with the observed results.

Key Words : springback, high strength steel, finite element analysis, multi-stage forming, member

1. 서 론

지금의 자동차 산업환경은 배기ガ스의 감소 및 연비향상을 위한 경량화를 강력히 요구하고 있다. 이러한 경량화를 달성하면서 또한 충돌안정성을 민족시키는 저중량-고강성 차체의 개발은 기존에 사용해 왔던 제작 공법과 소재를 사용하여서는 대응하기 어려우며 혁신적인 방법의 도입을 요구하고 있다.

자동차를 경량화하기 위한 방법은 크게 나누어 공법적인 측면과 소재적인 측면으로 나눌 수 있는데 Fig. 1에 상세히 분류하였다. Fig. 1에서 분류

하이드로포밍 등 신공법과 관련된 기술은 적용까지의 과정에 시간과 비용이 많이 소요되지만, 신소재 부문은 사용하는 소재를 대체하므로서 목적을 달성하기 용이하다. 특히 최근에는 고장력강판의 개발이 활발히 진행되고, 금형제작 및 유지보수 기술도 향상되어, 차체 부품에 고장력강판을 적용하는 사례가 급속히 증가하고 있다. 그러나 고장력강판은 일반 강판에 비해 소재의 항복강도가 높기 때문에 스프링백이 과다 발생하며, 금형제작의 큰 걸림돌로 작용한다. 특히, 차체 구조를 형성하는 멤버 파트는, 강성이 약한 형상의 영향으로 스프링백 현상이 더욱 두드러진다. 따라서,

* 현대자동차 금형기술개발팀

** 서울산업대학교 금형설계학과

*** 부산대학교 정밀기계공학과

고장력강판을 성형하기 위한 금형제작을 위해서는 스프링백의 예측, 보정 및 최소화의 기술이 반드시 필요하다.

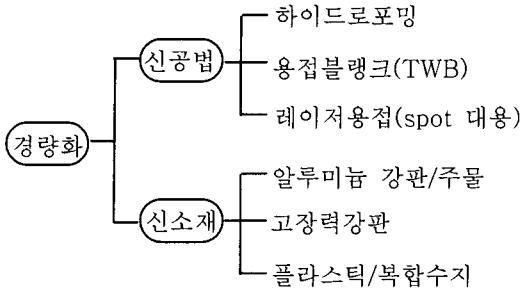


Fig. 1 Various technologies for weight reduction

따라서, 지난 십여년동안 스프링백을 정확히 예측하기 위한 여러 연구들이 진행되었다. 대부분의 스프링백 해석은 동적외연적유한요소법(dynamic explicit FEM)에 의해 성형공정을 해석한 후, 그 결과를 이용하여 정적내연적유한요소법(static implicit FEM)으로 스프링백 해석을 수행하였다. Mattiasson⁽²⁾등은 수치해석적 변수가 스프링백 해석 정도에 미치는 영향도를 분석하였다. 그리고 Chung⁽³⁾등은 동적효과가 스프링백 해석 정도에 미치는 영향등을 연구하였다. Lee⁽⁴⁾등은 동적유한요소법을 이용한 박판성형 해석에서 수치해석적 파라미터가 스프링백에 미치는 영향도를 분석하였다. NUMISHEET 벤치마킹⁽⁵⁾⁽⁶⁾에서 제안된 모델을 통하여 스프링백 현상에 대한 많은 연구가 이루어졌으며 그 효과도 입증되었다. 그러나 대부분의 연구가 단일 성형공정에 대한 스프링백 현상을 그 연구 대상으로 하였기 때문에, 다공정 성형으로 제작되는 자동차 양산용 부품에 대한 스프링백 해석이 요구된다.

본 논문에서는 효율적인 스프링백 해석 시스템을 제안하였고, 박판 성형해석 전용 프로그램인 Z-STAMP 상에서 구현하였다. 대형 모델의 스프링백 해석을 효율적으로 수행하기 위하여 다중 프론트 해석방법 (multi-frontal solving algorithm)을 적용하였다. 또한 스프링백 해석 과정에서의 불안정 거동을 해결하기 위해 연속화 기법(continuation method)을 사용하였다.

개발된 프로그램의 효율성을 입증하기 위해 자동차 차체 부품인 리어 멤버 사이드에 대해 다공정 해석을 수행하고, 공정별 성형문제 및 스프링백 보정량을 금형제작시 적용하였다. 스프링백의

정확한 평가를 위해 양산부품 측정시의 경계조건과 동일한 조건으로 스프링백 해석을 수행하고, 정밀도 측정도 양산 부품 평가 방법인 GAP 과 FLUSH를 활용하여 평가하였다.

2. 스프링백 해석 시스템 개발

2-1. 스프링백 해석

본 프로그램에서 사용된 헬요소는 Zhu 와 Zacharia⁽⁷⁾등에 의해 제안된 6 자유도의 헬요소인데, 이는 기본적으로 Belytschko-Tsay⁽⁸⁾에 의한 헬요소과 가장 비슷한 수식에서 발전한 헬요소이다. 이요소는 1 점적분을 유지하면서도 면내 굽힘등의 변형특성을 크게 향상시킨 요소로 스프링백 해석에 적합한 특성을 가지고 있다.⁽⁹⁾ 동일한 적분점을 가지는 요소를 사용함으로써 성형해석과 스프링백해석이 반복될 경우 오차를 최소화하면서 다른 공정 해석을 수행할 수 있는 잇점이 있다.

초기 잔류응력은 외력을 크기를 결정한다. 대변형을 동반한 해석에 있어서는 하중의 적용시 해의 수렴성을 고려하여 적용하여야 한다. 즉,

$$\mathbf{f}_\alpha^{ext} = (1 - \alpha) \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\sigma}_{residual} d\Omega \quad (1)$$

여기서, \mathbf{f}^{ext} , \mathbf{T} 그리고 $\hat{\mathbf{B}}$ 는 각각 외력항, 변형율-변위 관계행렬, 좌표계 변환행렬이다. 또 $\hat{\sigma}_{residual}$ 는 잔류응력, α 는 하중적용계수를 나타낸다. α 는 해의 수렴성에 따라 적절히 증가시켜 나가게 되는데 0에서부터 1 까지의 값을 적용하며 1이 적용되면 잔류응력이 완전히 적용된다.

2-2. 다중 프론트 해석방법

다중 프론트 기법(Multifrontal method)은 Duff 등⁽¹⁰⁾에 의해 처음으로 소개되었으며, Irons⁽¹¹⁾의 프론트 기법(frontal method)을 일반화한 개념이다. 프론트 기법은 원래 유한요소법 해석방법으로 개발되었는데 사용상의 편리성과 경제성 등의 잇점에 의해 사용이 늘어나고 있다. 프론트 기법은 먼저 요소강성행렬(element stiffness matrices)와 절점력 벡터(nodal force vector)를 조합한 후, 요소 단위로 가우스 소거법(Gaussian elimination) 또는 축차법(backsubstitution process)을 이용하여 미지수인 변위를 구하는 특수한 계산법이다. 이 방법은 강성 메트릭스와 절점력 벡터에 대해 전체조합 행렬을 사용하지 않기 때문에 컴퓨터 메모리 사용을 최

소화할 수 있다.

유한요소 해석 과정에서 다중 프론트 기법에 의한 소거과정을 보면 먼저, 주어진 영역(domain)이 두개의 부영역(subdomain)으로 나누어지고 각각의 부영역은 프론트를 가지며, 이러한 영역분할이 반복적으로 이루어진다. 반복적인 영역분할이 끝나면 각 부영역의 내부자유도(Internal DOFs)가 프론트 기법에 의해 먼저 제거된다. 내부자유도가 모두 제거되면 각 부영역의 경계자유도(Interface D.O.F.)가 새로운 프론트가 되고, 반복적으로 서로 합병이 이루어진다. 이러한 합병의 과정에서 완전히 조합된 자유도는 즉시 제거된다.

2-3. 연속화 기법

불안정성이 발생하면 선형화된 유한요소 방정식의 강성행렬은 한계점(Limit point)에서 특이점(singularity)이 발생하여 뉴튼-랩슨방법(Newton-Raphson method)에 의한 해를 얻을 수 없다. 박판재가 성형후 금형으로부터 취출되었을 때 주름이 발생할 수 있으므로 이러한 현상을 스프링백 해석시 고려할 수 있어야 한다. Riks 등⁽¹²⁾ 이 제안한 호-길이 방법(arc-length method)을 적용하여 특이점을 지나 해석을 계속할 수 있으며 이 때 평형방정식은 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$g(\mathbf{P}, \lambda) = \mathbf{q}_i(\mathbf{p}) - \lambda \mathbf{q}_{ef} = 0 \quad (2)$$

여기서, \mathbf{q}_i 는 변위 \mathbf{p} 의 함수인 내력, \mathbf{q}_{ef} 는 외력 벡터, 그리고 스칼라 λ 는 하중계수이다. 이를 증분식으로 다시 표현하면,

$$(\Delta \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{p} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}_{ef}^T \mathbf{q}_{ef}) - \Delta l^2 = 0 \quad (3)$$

여기서, Δ 는 증분량을 나타낸다. 하중과 변위의 비를 나타내는 파라미터 ψ 를 정의하는 방법에 따라 호-길이 방법은 여러가지로 변형될 수 있으며 본 연구에서는 일반화 변위법(generalized displacement method)을 적용하였다.

3. 리어 사이드 멤버의 다공정 해석

차체를 구성하는 판넬중 차량 중량을 지탱하고 BIW(Body in white)의 골조 역할을 하는 멤버류(member) 판넬은 대체로 형상이 긴 채널형이며 열린 단면을 가지고 있어 강성이 약하므로 스프링

백이 많이 발생한다. 그 중에서 가장 사이즈가 큰 리어 사이드 멤버(rear side member)는 Fig. 4 에서 같이 뒷좌석 아랫쪽부터 트렁크까지를 연결하여 차량의 뒤쪽 무게를 지탱하고 후방충돌시의 승객 보호를 위해 설계된 부품이다. 스프링백에 의한 벽젖힘(spring back or go), 벽휩(recoil), 비틀림(twist) 등의 대표적인 스프링백 불량이 발생하고, 치수정도가 확보된 판넬을 생산할 수 있는 금형을 제작하기에는 많은 시간과 공수가 소요된다.

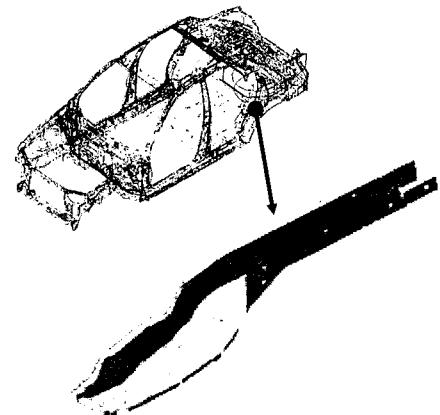


Fig. 4 The position of rear side member on the BIW

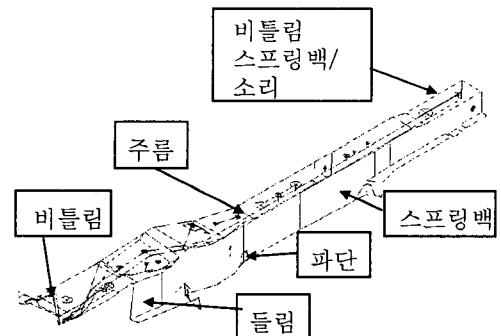


Fig. 5 The shape of rear side member and representative defects

리어 사이드 멤버 부품을 성형 공정은 부품의 전체적인 형상을 성형하기 위한 드로우 공정(draw operation), 필요없는 부분을 절단하는 트리밍 공정(trimming operation) 그리고 타부품과의 조립등을 하기위한 플랜징 공정(flanging operation)으로 구성된다. Fig. 6 은 프레스 부품 성형공정을 도식적으로 나타낸 것이다.

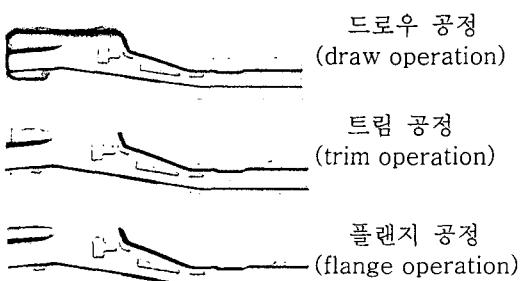


Fig. 6 Processes of rear member side

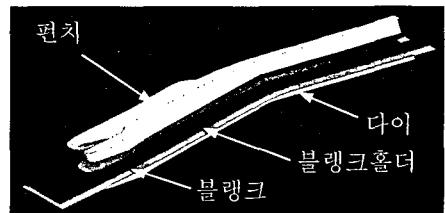
Fig. 6 의 드로우 공정에 나타나는 성형불량은 주로 파단(fracture), 주름(wrinkling) 그리고 선밀림(slip line)등이 지배적이다. 플랜지 공정에서 성형될 부분의 실장 길이를 전개하여 만든 트림라인을 이용하여 드로우 성형 판넬을 트리밍한다. 최종 공정인 플랜지 공정의 성형 불량으로서는 스프링백 발생과 플랜지 부분의 국부적 파단 및 주름을 들 수 있다. 따라서 스프링백 해석은 플랜지 성형이 완료된 후 실시하며, 그 결과를 분석하여 금형의 보정값으로 금형설계시 적용함을 목적으로 한다. Fig. 7 은 리어 사이드 멤버 판넬의 공정별 해석을 위한 모델링을 나타낸다. 성형에 사용된 소재는 sprc340Mpa 급 고장력강판이며, 기계적 특성을 Table 1 과 같다.

4. 성형해석 결과

리어 사이드 멤버 판넬의 스프링백 현상에 따른 성형불량은 앞에서 언급하였듯이 벽젖힘, 벽휩, 비틀림 등이 대표적이다. 본 논문에서는 스프링백 해석을 수행하여 해석결과를 실제 금형설계에 적용하여 금형을 제작하였고, 그 결과를 평가하였다.

프레스 성형에 의한 자동차부품 제작의 치수정도는 각 부품마다의 전용 체커(checker)를 사용하여 측정한다. Fig. 8에 리어 사이드 멤버의 치수정도를 측정하기 위한 체커를 나타내었다. 통상적으로 체커는 수지를 이용하여 제작하는데 그 이유는 수지는 일단 형상을 갖추고 굳힌 이후에는 거의 변형이 발생하지 않고, 가공도 용이하여 제작중 모델변경에 대한 대응성 등이 뛰어나기 때문이다. 체커를 사용하여 측정하고 관리하는 치수정도 평가 항목은 크게 두종류인데, 갭(gap)과 플

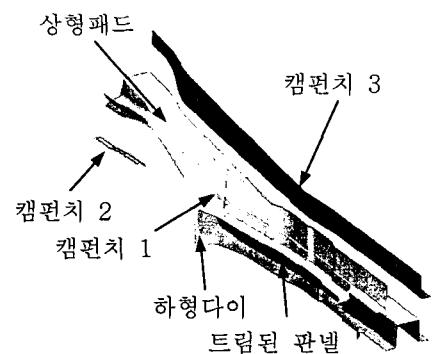
러쉬(flush)로서 차체조립 공정에서 로봇을 이용한 스폽용접등에서 정확한 용접위치와 용접강도를 확보하기위해 각각의 부품이 최소한 만족시켜야 할 관리공차이다.



드로우 공정 툴 모델링



트림 공정 트림라인



플랜지 공정 툴 모델링

Fig. 7 Tool modeling for multi-stage process of rear side member panel

Table 1. Mechanical Properties of rear side member

| 소재명 | 항복 강도 (Mpa) | 인장 강도 (Mpa) | 가공경 화지수 (n) | 이방성 계수 (r) |
|---------|-------------|-------------|-------------|------------|
| sprc340 | 231.4 | 342.5 | 0.21 | 2.05 |

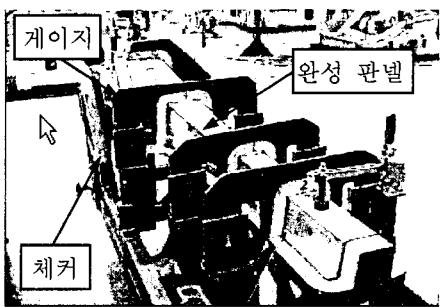


Fig. 8 Checker for measuring gap and flush of automobile panel (rear side member)

Fig. 9는 캡과 플러쉬의 도식적인 정의를 나타내고 있다. 즉, 캡이란 다공정을 거쳐 제작된 프레스 부품의 경계가 설계도면에서 관리하는 허용공차(스펙)를 만족하는가를 평가하는 플러쉬란 완성 부품 경계의 높이가 설계도면에서 관리하는 허용공차(스펙)을 만족하는 가를 평가하는 값이다. 이러한 캡과 플러쉬는 대량생산되는 자동차 조립에 있어 자동화에 의한 작업효율성을 향상시키고, 용접점에서의 정확한 용접에 의해 차체 강성 유지를 위해 필수적인 사항이다. 따라서, 프레스 금형을 제작할 때 가장 중요한 품질 평가 항목이다.

본 연구에서는 스프링백 해석을 이용하여 플렌징 후의 변형량을 구하여 완성 판넬에서의 캡과 플러쉬를 사전에 해석을 통하여 평가하여 보정량을 구하여 적용하였으며 실제 실험과 비교하여 버았다.

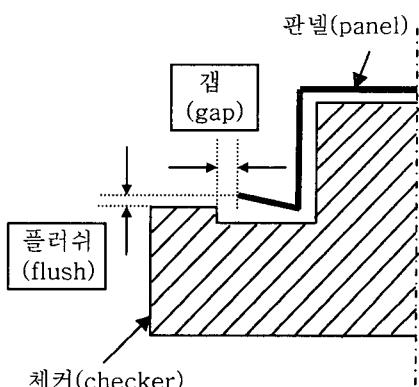


Fig. 9 Definitions of gap and flush on the checker

스프링백 해석에 있어 강체 운동을 제어하기 위한 경계조건(boundary conditions)은 해석결과에 대단히 큰 영향을 미친다. 본 논문에서는 실제 판넬에 대해 캡과 플러쉬를 측정하는 체커상의 경계조건을 그대로 이용하여 스프링백 해석 경계조건으로 설정하였다. Fig. 10은 스프링백 해석시 경계조건으로 사용된 체커의 고정조건이다.

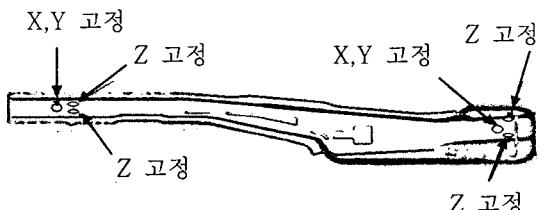


Fig. 10 Boundary conditions for springback analysis

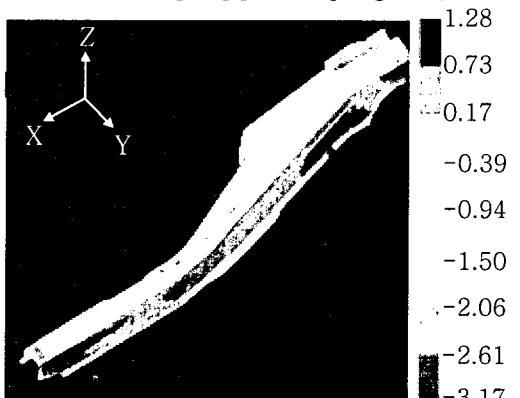
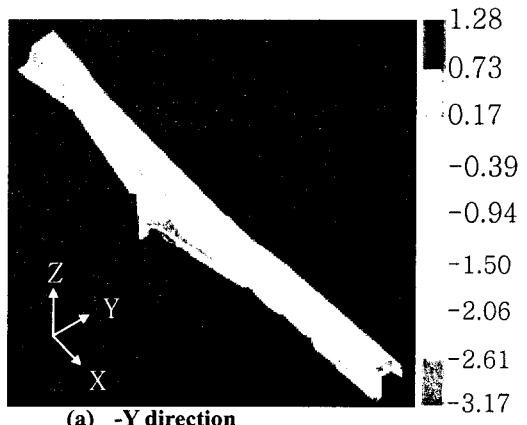
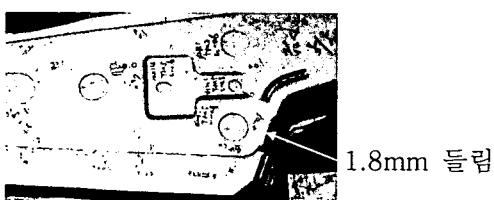
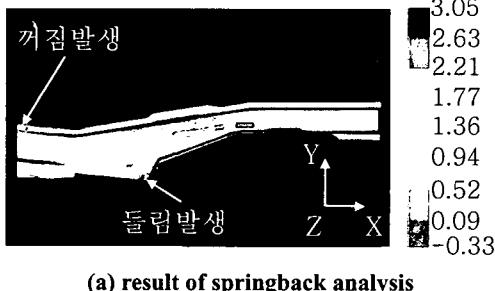


Fig. 11 Springback displacement in Y direction

벽절힘의 변형은 Y축의 변위로 관찰할 수 있는 데 Fig. 11에 그 결과를 나타내었다. 단면의 중심을 기준으로 Y축 변위가 양쪽에 반대로 나타나므로 Fig. 11의 (a)에서 Y변위가 (-)값이면 스프링 백을 나타내고 반대로 (+)값이면 스프링고를 나타낸다. 그리고 (b)에 대해서는 (a)와 역으로 생각해야 한다. Fig. 11의 결과로부터 플랜지 성형후 완성 부품에서는 대체로 스프링백이 많이 발생함을 알 수 있다. 이러한 결과는 리어 사이드 멤버의 성형시 나타나는 일반적인 변형 양상과 잘 일치한다.

Fig. 12에서는 Z축 변위를 나타내는데, 판넬 상단면의 꺼짐 및 들림에 의한 변형을 표현하며, 실판넬과도 잘 일치한다. 스프링백 해석 결과의 분석을 통하여 리어 사이드 멤버의 스프링백 보정량(compensation value)을 결정하고 실제 금형제작에 적용하였다. 해석으로부터 결정된 스프링백 보정량의 정도를 검증하기 위해 체커 위에 주요 단면을 결정하고 게이지를 설치하였다. 설치된 게이지 위치에 있어서 스프링백 해석결과와 실판넬 측정결과를 비교 분석하였다. 게이지의 위치와 각 단면에서의 측정위치를 Fig. 13에 나타내었다



(b) result of tryout panel

Fig. 12 Springback displacement in Z direction

Fig. 13에서 게이지 A가 위치하는 곳의 단면은 한쪽이 열려있는 형태를 하고 있으며, 나머지 3개의 게이지 단면은 같은 형상을 하고 있어서 측정

의 조건은 크게 2가지이다. 측벽부위를 나타내는 ⑥⑨①⑧에 대해서는 Y축 변위량을, 플랜지부위 및 상단면부위를 나타내는 ④⑦⑩은 Z축 변위를 측정하였다. 성형해석에 의한 스프링백해석의 정도 평가를 위해 각 게이지에 의해 측정된 실판넬의 거리를 기준으로 정하고, 허용공차를 고려한 성형해석 결과가 스펙을 만족하게 되는 경우를 OK, 만족하지 못한 경우를 NG라고 정의한다. 그 결과를 요약하면 Table 2와 같다.

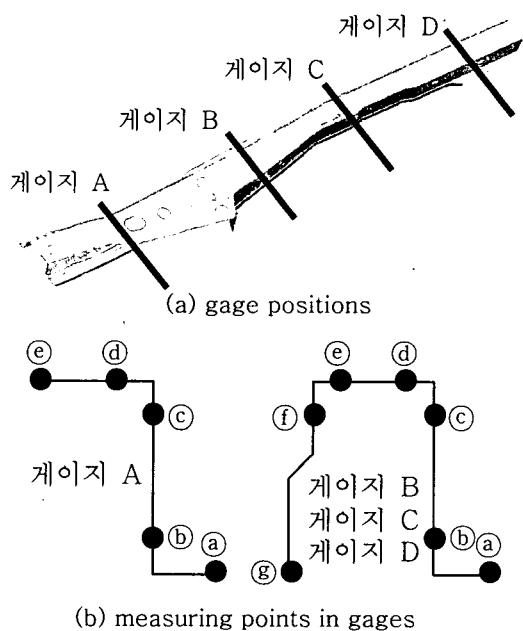


Fig. 13 Gage positions and measuring points of springback amount

Table 2의 결과로부터 26개의 측정점 중에서 7개의 예측불량이 발생하였다. 프레스 성형에 의한 양산 부품의 스프링백해석 정밀도는 대략 73%의 해석신뢰도를 가진다고 말할 수 있다. 또 실판넬 대비 스프링백/고의 경향은 26개의 측정점 중에서 9개에서 NG(밀줄)로 나타나 대략 65%의 신뢰도를 나타내었다. 따라서 스프링백 해석 정밀도를 양산판넬 적용 조건에 따라 정량적으로 평가해본 결과 아직 정확성이 부족하다고 판단되며, 이러한 오차의 발생은 해석 시간의 한계에 따른 요소 크기의 제한, 플랜지 성형시 플랜지부 구속조건의 부족 그리고 양산 금형을 대상으로 함에 따른 성형해석 조건과 양산금형 조건의 불일치등이 그

원인이라고 판단된다.

Table 2 Evaluation of springback accuracy by comparing analysis result and real panel

| 게이지 위치 | 체크 부위 | 허용 풍차 | 실판넬 결과 | 스프링 백결과 | 평가 |
|--------|-----------------|---------|--------|---------|----|
| 게이지 A | ⓐ | ±0.7 | 0 | + 0.848 | OK |
| | ⓑ | ↑ | -0.7 | + 0.710 | NG |
| | ⓒ | ↑ | + 0.6 | -0.105 | OK |
| | ⓓ | ↑ | + 0.5 | + 0.289 | OK |
| | ⓔ | ↑ | + 0.7 | + 0.965 | NG |
| 게이지 B | ⓐ | ±0.7 | 0 | + 0.406 | OK |
| | ⓑ | ↑ | -0.6 | -0.814 | OK |
| | ⓒ | ↑ | + 0.5 | -0.816 | OK |
| | ⓓ | ↑ | + 0.6 | -0.117 | OK |
| | ⓔ | ↑ | + 0.6 | + 1.427 | NG |
| | ⓕ | 1.0~0.5 | + 0.8 | + 0.952 | NG |
| | ⓖ | ↑ | + 0.9 | + 2.592 | NG |
| 게이지 C | ⓐ | ±0.7 | + 0.5 | + 0.455 | OK |
| | ⓑ | ↑ | + 0.8 | + 0.098 | OK |
| | ⓒ | ↑ | + 0.5 | -0.016 | OK |
| | ⓓ | ↑ | + 0.5 | -0.128 | OK |
| | ⓔ | ↑ | + 0.2 | -0.209 | OK |
| | ⓕ | 1.0~0.5 | -0.4 | + 0.650 | OK |
| | ⓖ | ↑ | + 0.6 | + 1.507 | NG |
| 게이지 D | ⓐ | ±0.7 | + 0.7 | + 0.674 | OK |
| | ⓑ | ↑ | + 0.2 | + 0.107 | OK |
| | ⓒ | ↑ | + 0.5 | + 0.190 | OK |
| | ⓓ | ↑ | + 0.1 | + 0.010 | OK |
| | ⓔ | ↑ | 0 | -0.065 | OK |
| | ⓕ | 1.0~0.5 | -0.8 | + 0.248 | OK |
| | ⓖ | ↑ | + 0.8 | + 1.515 | NG |
| 총점 | 불량수(NG수)/측정포인트수 | | 7/26 | | |

5. 결 론

본 연구과제를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- (1) 자동차 차체부품을 성형하기 위한 양산용 금형에 대해 다공정에 대한 성형해석 및 스프링 백 해석을 수행하고 그 결과를 양산 금형 제작에 적용하였다.
- (2) 리어 사이드 멤버를 대상으로 하여 멤버류

에서 발생하는 대표적인 치수정도 불량 항목에 대해 해석적 방법을 이용하여 분석하였고 공정변수가 미치는 영향도에 대해서도 평가하였다.

- (3) 스프링 백 해석으로부터 얻어진 결과를 실제 양산금형에 적용하였고, 그 적용결과를 바탕으로 스프링 백 해석을 양산 금형 제작시 적용하는 경우에 대해 스프링 백 정밀도를 정량적으로 평가하였다.
- (4) 해석시간 한계 및 형상조건의 불리함등의 이유로 양산금형에서의 스프링 백 정밀도는 충분하지 않았으며 향후 이러한 문제점을 해결하기 위한 노력이 기대된다.

참 고 문 헌

1. S. Hayashi, 2004, "The Trend of Weight Reduction in Automotive Castings", J. of the JSTP, vol. 45, no. 516, pp 8~12.
2. K. Mattiasson, P. Thilderkvist, A. Strange and A. Samuelsson, 1995, "Simulation of Springback in Sheet Metal Forming", Proceedings of NUMIFORM'95, edited by S. Shen and P. R. Dawson, A. A. Balkema, Rotterdam, pp.637~641
3. W. J. Chung, J. W. Cho and B. Belytschko, 1996, "A Study on the Dynamic Effects of Dynamic Explicit FEM in Sheet Metal Forming Analysis", Proceedings of NUMISHEET'96, pp.444~464
4. S. W. Lee, 1997, "Elastoplastic/Explicit Finite Element Formulation and Applications to Sheet Metal Working with Springback", Ph.D.Thesis, KAIST, Taejon, KOREA
5. A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Onate and R. H. Wagoner, 1993, "Proceedings of the 2nd International Conference NUMISHEET'93", Isehara Japan
6. J. K. Lee, G. L. Kinzel and R. H. Wagoner, 1996, 1996, "Proceedings of the 3rd International Conference NUMISHEET'96", Ohio State University, USA
7. Zhu and T. Zacharia, 1996, "A New One-Point Quadrature, Quadrilateral Shell Element with Drilling Degrees of Freedom", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 136, pp.165-22
8. T. Belytschko and C. Tsay, 1983, "A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with

- One-Point Quadrature”, Int. J. Numer. Methods Engns., 19, pp.405~419
- 9. W.J. Chung, “A Finite Element Analysis of Springback in Sheet Metal Forming”, KSME-A, 23, pp.2197-2208
 - 10. I. S. Duff and J. K. Reid, 1973, “The Multifrontal Solutions of Indefinite Sparse Symmetric Linear Equations, ACM Trans. Math. Software, 9, pp.302~325
 - 11. B. M. Irons, 1970, “A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis”, Int. J. Numer. Methods Engns., 2, pp.5-32
 - 12. E. Riks , 1979, “An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems”, Int. J. Solids and Structure, 5, pp.529~559.