

GPR 시스템 시뮬레이션을 위한 3차원 ADI-FDTD 기법의 적용

전 원 석, 여 운 식, 윤 승 현, *김 형 동
한양대학교 전자통신전파공학과, *한양대학교 전자전기컴퓨터공학부
전화 : 02-2298-0373 / 핸드폰 : 017-660-6984

Application of 3D ADI-FDTD Method for GPR System Simulation

Won Sok Jeon, Woonsik Yeo, Seung Hyun Yun, *Hyeongdong Kim
Dept. of Electronic Communication & Radio Science Eng., Hanyang University
*Dept. of Electical & Computer Eng., Hanyang University
E-mail : koiler@ihanyang.ac.kr

Abstract

This paper has been studied a ADI-FDTD(Alternating Direction Implicit Finite Difference Time Domain) algorithm using an alternating Direction time-stepping scheme for GPR(Ground-Penetrating Radar) system simulation. We did the numerical formulations for three-dimensional ADI-FDTD algorithm and PML(Perfect Matched Layer), and made an simple experiment on a arbitrary cube with prograded algorithms. And then we compared its computed results with those of conventional FDTD.

I. 서론

GPR(Ground-Penetrating Radar) 시스템은 수도관, 가스관, 케이블, 매장 유물, 지하공동등과 같은 다양한 지하표적을 탐지하는 수단으로 많이 사용되고 있다. 이러한 GPR 시스템의 수치적인 모델링과 시뮬레이션은 지하의 산란메카니즘에 대한 정보를 획득하는데 적합한 방법으로 알려져 있다. 다양한 수치해석 기법들 중 시간영역 해석기법의 하나인 FDTD(Finite Difference Time Domain) 기법은 GPR 시스템에 있어서 성공적인 결과를 도출하였다[4]. 그러나 이러한 성공에도 불구하고 FDTD는 해석 주파수의 파장에 비하

여 섬세하고 복잡한 배경매질 및 고유전율의 매질을 포함한 지하 상황 해석에 있어서는 계산량의 증가와 수치적인 안정조건의 제약으로 엄청난 해석시간을 요구하게 된다. 이에 대해 보다 효율적이고 단축된 해석 시간을 갖는 고속 전자파 수치해석 기법의 연구가 요구되고 있다.

본 논문은 GPR 시스템의 수치적 모델링과 시뮬레이션을 위한 표준 FDTD 기법의 알고리즘을 대체할 고속 전자파 수치해석 기법 적용을 연구하는 것으로서, 고속 전자파 수치해석 기법의 하나인 ADI-FDTD (Alternating Direction Implicit Finite Difference Time Domain) 기법을 적용하며, 흡수경계조건으로 PML (Perfectly Matched Layer)을 ADI-FDTD 기법에 맞게 3차원으로 수식을 정리하여 알고리즘을 구현하였다. 또한 기존 FDTD 기법과의 비교를 위해 3차원 PML을 적용한 표준 3차원 FDTD 알고리즘을 구현하였다. 구현된 ADI-FDTD 알고리즘의 검증방법으로서 간단한 지하 산란체를 모델링하여 정확성과 해석시간의 단축 정도를 제시하였다.

II. Conventional FDTD와 ADI-FDTD 알고리즘

2.1 Conventional FDTD 알고리즘

FDTD 기법은 시간영역 전자파해석법으로서 다양하고 복잡한 매질의 모델링이 가능하고, 프로그래밍이 용이하다. 또한 여기소스로서 광대역 펄스를 사용하여

광대역 주파수 특성을 한번의 해석으로 구할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그림 1은 표준 FDTD의 time-stepping 흐름도를 나타낸다.

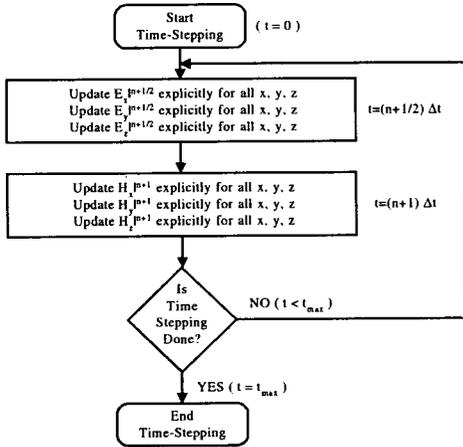


그림 1. 표준 FDTD time-stepping 흐름도[1]

이러한 표준 FDTD는 맥스웰 편미분 방정식의 양함수적(Explicit)인 풀이법으로 식 (1)의 CFL (Courant Friedrich Levy) 안정조건에 의해 시간간격의 크기를 제한 받게 된다.

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2 + (1/\Delta z)^2}} \quad (1)$$

c(m/s) : 매질내의 전파속도

식 (1)에서 보듯 CFL 조건은 공간격자의 크기에 종속적이므로 복잡하고 다양한 매질이 분포하고 있는 지하상황에 대한 시뮬레이션시 필연적으로 매우 많은 계산시간이 요구하게 된다.

2.2 ADI-FDTD 알고리즘

ADI-FDTD기법은 표준 FDTD기법에 ADI 시간진행법(Alternating Direction Implicit time-stepping scheme)을 도입하여 표준 FDTD기법의 CFL (Courant Friedrich Levy) 안정조건을 제거한 방법이다. ADI-FDTD기법은 특히 관심주파수의 파장에 비하여 해석하고자 하는 구조체가 복잡하고 광범위한 문제영역을 해석할 때 표준 FDTD기법에 비하여 계산의 정확도를 유지하면서 계산시간을 상당히 줄일 수 있는 방법이다[1]. 그림 2는 ADI-FDTD의 time-stepping 흐름도이다.

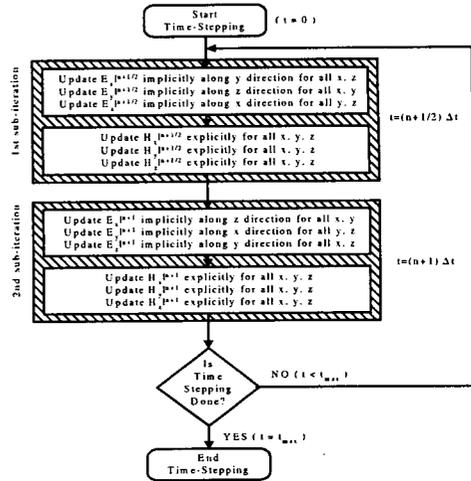


그림 2. ADI-FDTD time-stepping 흐름도[1]

그림 1과 2를 통해서 표준 FDTD와 ADI-FDTD 알고리즘의 차이를 살펴볼 수 있다. ADI-FDTD는 맥스웰 편미분 방정식에 방향진환 음함수법(Alternating Direction Implicit scheme)을 사용한 풀이법으로 매트릭스 방정식을 풀게 된다. 또한 식 (1)의 CFL 안정조건을 제거하는 대신에 한번의 반복계산을 수행하는데 있어 두 번의 연산과정을 거치게 된다. 이로인해 표준 FDTD에 비해 많은 메모리 용량이 필요하다.

복잡하고 다양한 매질이 분포하며, 물($\epsilon_r = 81$)과 같은 고유전율을 가진 매질이 부분적으로 분포할 경우 표준 FDTD기법의 경우 고유전율의 매질내의 최소파장을 기준으로 공간격자를 결정하게 되고, 식 (1)에 의해 Δt 가 결정된다. 고유전율의 매질에 의해 공간격자의 크기가 작아지고 Δt 의 최대크기를 제한하게 된다. 반면 ADI-FDTD기법은 CFL 안정조건을 무시함으로써 Δt 를 크게 선정할 수 있다. 결국 시뮬레이션 시간을 단축시킬 수 있게 되며, 단지 정확성에 의해서 제한을 받게 된다.

자세한 ADI-FDTD기법의 수학적 유도과정은 III장에서 3차원 문제에 대한 차분식의 유도를 통해 살펴볼 것이다.

III. ADI-FDTD Formulation

3차원 ADI-FDTD 차분식은 6개의 맥스웰 스칼라 편미분 방정식으로부터 출발한다.

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (2.a)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.b)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (2.c)$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma^* H_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.d)$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma^* H_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.e)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.f)$$

여기서 ϵ 과 μ 는 각각 유전율과 투자율을 나타낸다. 각 6개의 필드의 공간상 위치는 Yee 단위 셀을 적용하였다.

① 1st sub-iteration ($n \rightarrow n + 1/2$)

첫번째 연산에서는 편미분 방정식 식(2.a)의 오른쪽 공간미분항들 중 첫번째항을 음함수적으로 차분하고, 두번째항을 양함수적으로 차분하고 정리한다[1][3].

$$E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} = C_a|_{i+1/2,j,k} E_x|_{i+1/2,j,k}^n + \frac{C_b|_{i+1/2,j,k}}{\Delta y} (H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}) - \frac{C_b|_{i+1/2,j,k}}{\Delta z} (H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n - H_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^n) \quad (3)$$

$$H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} = D_a|_{i+1/2,j+1/2,k} H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n + \frac{D_b|_{i+1/2,j+1/2,k}}{\Delta y} (E_x|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}) - \frac{D_b|_{i+1/2,j+1/2,k}}{\Delta x} (E_y|_{i+1,j+1/2,k}^n - E_y|_{i,j+1/2,k}^n) \quad (4)$$

식(3)의 우항을 보면 음함수적으로 차분된 H_z 필드성분을 볼 수 있다. 이것은 식(2.f)의 차분식 식(4)를 이용하여 식(3)에 대응되는 H_z 성분을 대입하여 정리함으로써 첫번째 sub-iteration의 최종적인 E_x 필드의 업데이트 수식이 완성된다. 식(5)는 유도된 E_x 필드의 최종 수식이다. 식(3) ~ (5)에 있는 계수들은 식(6)에 나타내었다.

② 2nd sub-iteration ($n + 1/2 \rightarrow n + 1$)

두번째 연산에서는 식(2.a)의 차분과정에서 첫 번째 연산과 반대로 우항의 첫번째항을 양함수적으로 차분하고, 두번째항을 음함수적으로 차분하는 것을 제외하고 같은 절차를 따른다. 이때 유도된 업데이트 수식은 식(5)와 유사하며, 계수는 식(6)과 동일하다. 지면의 공간부족으로 다른 성분들의 유도과정은 생략한다. 전

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{C_a|_{i+1/2,j,k}}{\Delta y} \frac{1}{\Delta y} (D_b|_{i+1/2,j+1/2,k} + D_b|_{i+1/2,j-1/2,k}) \right] E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \\ & - \frac{C_b|_{i+1/2,j,k}}{\Delta y} \frac{D_b|_{i+1/2,j+1/2,k}}{\Delta y} E_x|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2} - \frac{C_b|_{i+1/2,j,k}}{\Delta y} \frac{D_b|_{i+1/2,j-1/2,k}}{\Delta y} E_x|_{i+1/2,j-1,k}^{n+1/2} \\ & = C_a|_{i+1/2,j,k} E_x|_{i+1/2,j,k}^n + \frac{C_b|_{i+1/2,j,k}}{\Delta y} D_a|_{i+1/2,j+1/2,k} H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n \\ & - \frac{C_b|_{i+1/2,j,k}}{\Delta y} D_a|_{i+1/2,j-1/2,k} H_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^n \\ & - \frac{C_b|_{i+1/2,j,k}}{\Delta z} (H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n - H_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^n) \\ & - \frac{C_b|_{i+1/2,j,k}}{\Delta y} \frac{D_b|_{i+1/2,j+1/2,k}}{\Delta x} (E_x|_{i+1,j+1/2,k}^n - E_x|_{i,j+1/2,k}^n) \\ & + \frac{C_b|_{i+1/2,j,k}}{\Delta y} \frac{D_b|_{i+1/2,j-1/2,k}}{\Delta x} (E_x|_{i+1,j-1/2,k}^n - E_x|_{i,j-1/2,k}^n) \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_a|_{i,j,k} = \left(1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{4 \epsilon_{i,j,k}} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{4 \epsilon_{i,j,k}} \right), \quad C_b|_{i,j,k} = \left(\frac{\Delta t}{2 \epsilon_{i,j,k}} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{4 \epsilon_{i,j,k}} \right) \quad (6.a)$$

$$D_a|_{i,j,k} = \left(1 - \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{4 \mu_{i,j,k}} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{4 \mu_{i,j,k}} \right), \quad D_b|_{i,j,k} = \left(\frac{\Delta t}{2 \mu_{i,j,k}} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{4 \mu_{i,j,k}} \right) \quad (6.b)$$

체적으로 위의 유도과정과 같은 방법으로 업데이트 수식을 유도할 수 있다.

IV. 구현된 ADI-FDTD 알고리즘의 검증

본 장에서는 앞서 프로그램된 알고리즘의 검증을 위하여 간단한 모의실험을 수행하고 표준 FDTD와 구현된 ADI-FDTD의 성능을 비교하고자 한다.

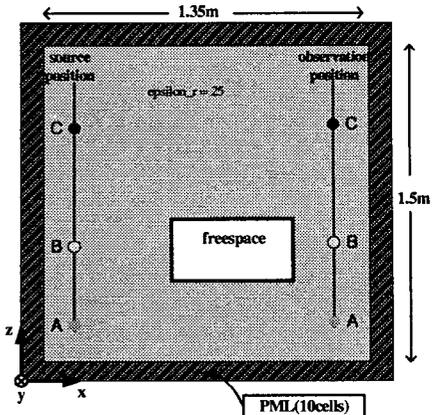


그림 3. 모의실험의 해석모델

표준 FDTD와 ADI-FDTD 알고리즘은 각각 3차원으로 프로그래밍 되었으며, ABC(Absorbing Boundary Condition)로는 3차원 10셀 PML(Perfectly Matched Layer)이 적용되었다[2]. 모의실험의 문제영역은 그림

3과 같다. $\Delta = 0.015m = \lambda_{min}/10$ 의 uniform grid이며, $f_{max} = 400MHz$ 의 미분형 가우시안펄스를 소프트웨어로 Ez필드에 인가하였다. 각 시뮬레이션 결과에 대한 계산시간 데이터와 표준 FDTD와 ADI-FDTD의 비교 데이터를 표 1과 그림 4에 나타내었다. 표 1과 그림 4를 통해 정확성을 유지하면서 계산시간이 획기적으로 단축됨을 볼 수 있다. 또한 그림 4를 통해 Δt 를 크게 할수록 수치적 분산특성이 증가함을 확인할 수 있다 [3].

	FDTD	ADI-1	ADI-2	ADI-3
Δt (ps)	14.434	$20\Delta t$	$30\Delta t$	$40\Delta t$
CPU time(s)	12699	3977	2621	1978
normalized CPU time	1.0	0.3132	0.2064	0.1565

표 1. 표준 FDTD와 ADI-FDTD의 비교

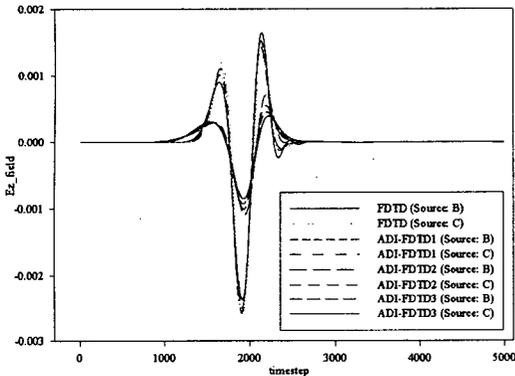


그림 4. 표준 FDTD와 ADI-FDTD의 정확성비교

다음으로 ADI-3의 모의실험을 그림 3에 나타난 A 점으로부터 C점으로 일정간격으로 이동시켜가면서 반복수행을 하였다. 이에 대한 결과를 그림 5에 나타내었다. A로부터 0.3-0.5m 부근에 산란체를 투과한 수신 펄스를 관측할 수 있다.

V. 결론

GPR 시스템은 다양한 지하표적을 탐지하는 수단으로 폭넓게 사용되고 있으며, 현재 국내에서도 누수탐지를 위해 연구되고 있다. 이러한 GPR 시스템의 시뮬레이션은 정확하며 가능한 단기간의 시뮬레이션을 통한 효율성이 요구되고 있다.

본 논문은 기존의 표준 FDTD에 의한 접근법을 최근 활발히 연구되고있는 ADI-FDTD기법으로 전환함으로써 정확성을 보장하는 동시에 시뮬레이션 시간을

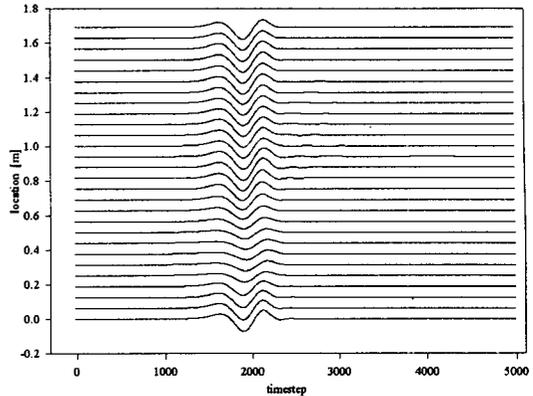


그림 5. Received Ez field array

획기적으로 단축할 수 있음을 확인하였다. 차후에 구현된 ADI-FDTD 알고리즘을 주파수에 의존적인 매질 해석을 위한 Dispersive ADI-FDTD로 확장한다면 보다 현실적인 분석이 가능할 것으로 생각한다.

본 논문은 ADI-FDTD의 기본알고리즘을 GPR 시스템에 응용한 것으로 여러 전자기 해석분야의 기초자료로서 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

- [1] C.C.-P. Chen, T.-W. Lee, N. Murugesan, and S. C. Hangness, "Generalized FDTD-ADI: an unconditionally stable full-wave Maxwell's equation solver for VLSI interconnect modeling," in *IEEE Int. Conf. on Computer Aided Design*, 2000, pp. 156-164.
- [2] G. Liu and S.D. Gedney, "Perfectly matched layer media for an unconditionally stable three dimensional ADI-FDTD method," *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, vol. 10, pp. 261-263, Jul. 2000.
- [3] Saehoon Ju, Hyeongdong Kim, and Hyeon-Hoon Kim, "A study of the numerical dispersion relation for the 2-D ADI-FDTD method," accepted for publication in *IEEE Microwave and Wireless Component Letters*, Vol.13, No.9, September 2003.
- [4] Q. H. Liu, "Using GPR and Seismic Reflection Measurements to Characterize Buried Objects: Large-Scale Simulations," *1997 IEEE International*, vol. 3, Aug. 1997.