

반복 선형행렬부등식을 이용한 축소차수 제어기 설계

김 석 주, 권 순 만, 이 중 무, 김 춘 경, 천 중 민
한국전기연구원

Reduced-order controller design via an iterative LMI method

Kim Seog-Joo, Kwon Soonman, Lee Jong-Moo, Kim Chun-Kyung, Cheon Jong-Min
Korea Electrotechnology Research Institute (KERI)

Abstract - This paper deals with the design of a reduced-order stabilizing controller for the linear system. The coupled linear matrix inequality (LMI) problem subject to a rank condition is solved by a sequential semidefinite programming (SDP) approach. The nonconvex rank constraint is incorporated into a strictly linear penalty function, and the computation of the gradient and Hessian function for the Newton method is not required. The penalty factor and related term are updated iteratively. Therefore the overall procedure leads to a successive LMI relaxation method. Extensive numerical experiments illustrate the proposed algorithm.

1. 서 론

내점법의 발전과 더불어 1990년대에서 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality : LMI)은 제어기를 해석하고 설계하는 가장 기본적인 도구가 되어왔다[2]. LMI가 많은 제어 문제를 성공적으로 풀기도 하였지만 아직도 다음과 같은 많은 난제들이 있다.

- 정적 출력(static output) 및 축소차수 제어기 설계
- 다목적 제어기 설계
- 일반화된 스케일링 행렬을 가지는 강인제어기 설계
- 이득조정 제어기 설계

이들 문제는 모두 비볼록(nonconvex)으로 NP-hard 문제로 알려져 있으며 이중 본 논문에서는 축소차수 제어기 설계에 관한 것을 다룬다. 비볼록 제어기 문제는 대부분 양선형행렬부등식(Bilinear Matrix Inequality : BMI)이나 또는 LMI에 계수조건(rank condition)이 부가된 문제로 표현된다[1]. 이 문제를 해결하기 위하여 전역적[10], 지역적[3,6,8,9,11,12] 또는 혼합 알고리즘 등 많은 연구가 있었다. 잘 알려진 바와 같이 전역적 방법은 시간이 많이 걸리고 지역적 방법은 계산시간이 빠른 대신에 수렴성이 보장되지 않는 단점이 있다. 또한 Meshbahi[13]는 반복법이 아닌 다항식 시간으로 풀 수 있는 방법을 제안하였지만 시스템을 안정화시키는 정적출력 제어기 설계에만 국한된다.

최근에 Augmented Lagrangian (AL)을 이용한 알고리즘이 개발되었다[5]. 이 방법은 전역적 수렴성을 보장하면서 빠른 해를 찾을 수 있는 장점이 있다. 하지만 목적함수에 이차형식의 함수가 있기 때문에 뉴턴법을 적용하기 위해서는 구배(gradient)함수와 Hessian 함수를 구해야 하고 따라서 별도로 구현된 전용 코드가 필요하다.

본 논문에서는 지역적 방법과 거의 비슷한 연산량을 가지면서도 쉽게 구현이 가능한 알고리즘에 관해서 서술한다. 계수조건을 페널티 함수로 표현하여 반복적으로 LMI 최적해를 구하는 방법을 사용함으로써 계수조건이 부가된 LMI 문제를 푸는 알고리즘을 제시하고 시뮬레이션을 통하여 입증하고자 한다.

2. 반복 선형행렬부등식

2.1 축소차수 제어기 설계

축소차수 제어기 설계 문제는 시스템 첨가(system augmentation)[7]을 통하여 정적출력 제어기 설계 문제로 변환할 수 있기 때문에 여기서는 정적출력 제어기 설계 문제만을 다루기로 한다. 먼저 다음과 같은 선형 시불변 시스템을 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ 는 각각 시스템 상태 벡터, 입력벡터, 출력 벡터이고 (A, B, C) 는 주어지는 시스템 데이터이다. 이때 $u = Ky$ 의 제어기로 시스템 (1)의 폐루프 시스템

$$\dot{x} = (A + BKC)x \tag{2}$$

을 안정화 시키는 이득 K 를 구하는 것이 정적출력 안정화제어기를 설계하는 문제이다. 이 문제에 관한 많은 연구가 있었으며 여러 가지 알고리즘도 발표되었다[14].

LMI로 표현되는 정적 출력제어기 설계문제는 다음 LMI와

$$\begin{aligned} B^\perp (AX + XA^T) B^{\perp T} &< 0 \\ C^{T\perp} (YA + A^T Y) C^{T\perp T} &< 0 \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

추가적인 계수조건을

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \right) = n \tag{4}$$

만족하는 대칭행렬 X, Y 가 존재하는 것과 동가이다. 이 문제는 식 (4)의 비볼록 계수조건 때문에 NP-hard가 된다. 이 문제를 계수조건이 있는 일반적인 LMI 형태로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{find } x \\ \text{s.t. } X(x) \leq 0, L(x) \leq 0 \\ \text{rank}(X(x)) = r \end{aligned} \tag{5}$$

편의를 위해서 식 (5)에서 계수조건을 제외하는 볼록조건을 만족하는 x 의 집합을 Ω 라 정의해 두기로 한다.

$$\Omega = \{x : X(x) \leq 0, L(x) \leq 0\} \tag{6}$$

2.2 페널티 함수를 이용한 LMI 문제의 해법

본 절에서는 문제 (5)를 만족하는 해를 구하는 방법을 서술한다. 먼저 다음과 같은 정리를 생각해 보자.

[정리 1] 정규직교열(orthonormal column)을 가지는 행렬 $V \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$, $V^T V = I$ 에 대해서 어떤 반정행렬(positive semidefinite matrix) $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 이 다음을

$$\text{trace}(V^T X V) = 0 \tag{7}$$

만족한다고 하면 $\text{rank}(X) \leq r$ 이다.

식 (7)의 대각합(trace)은 항상 영보다 크고 행렬 X 의 계수가 r 이하 일때만 영이 되므로 페널티 함수

(penalty function)로 사용될 수 있다. 페널티 함수를 다음과 같이 정의하고

$$p(x; V) = \text{trace}(V^T X V) \quad (8)$$

목적함수를

$$\varphi(x, \mu, V) = \text{trace}(X) + \mu p(x, V) \quad (9)$$

로 놓자. 여기서 μ 는 페널티 변수이다. 식 (9)에서 추가된 대각합은 고유치에 관한 하중을 주는 중요한 항이다. 이제 문제 (5)는 다음과 같이 계수조건이 없는 LMI 문제를 푸는 문제가 된다.

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(x, \mu, V) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \Omega \end{aligned} \quad (10)$$

문제 (10)에서 페널티 변수 μ 가 변하지 않는다고 하고 다음과 같은 순차적인 해를 생각해 보면

$$x_{k+1} = \min_x \{ \varphi(x, \mu, V_k) : x \in \Omega \}, \text{ for } i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

다음의 정리에서 식 (11)의 해의 특성을 알 수 있다.

[정리 2] 문제 (10)에서 μ 를 충분히 큰 값으로 고정하면 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \varphi(x_{k+1}; \mu, V_k) &\leq \varphi(x_k; \mu, V_{k-1}) \\ p(x_{k+1}; V_k) &\leq p(x_k; V_{k-1}) \end{aligned} \quad (12)$$

[증명] 볼록조건과 최적원리를 이용하면 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$\varphi(x_{k+1}; \mu, V_k) \leq \varphi(x_k; \mu, V_k) \leq \varphi(x_k; \mu, V_{k-1})$$

또한 위식의 첫 번째와 두 번째 부등식은 각각

$$\begin{aligned} p(x_{k+1}; V_k) &\leq p(x_k; V_k) \\ p(x_k; V_k) &\leq p(x_k; V_{k-1}) \end{aligned}$$

을 의미한다. □

정리 2는 페널티 변수 μ 를 고정하고 문제 (10)의 해를 반복적으로 계산했을 때 목적함수 (9)와 페널티 함수 (8)의 값이 증가하지 않는다(non-decreasing)는 것을 나타내고 있다. 이는 고정된 페널티 변수만으로도 때로는 해를 얻을 수 있다는 것을 의미한다.

만약 고정된 페널티 값으로 페널티 함수가 충분히 영에 근접하지 않는다면 페널티 변수 값을 증가시켜 새로운 해를 얻을 수 있다. 새로운 해는 보다 더 가능영역(feasible region)에 근접하게 되며 다음 정리로 증명된다.

[정리 3] 문제 (10)에서 페널티 값을 증가시키면서 해를 구한다고 하자. 즉, $\mu_{k+1} > \mu_k$ 이라고 하면 다음과 같은 페널티 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}_{k+1}; \mu_k, \bar{V}_k) &\geq \varphi(\bar{x}_k; \mu_{k-1}, \bar{V}_{k-1}) \\ p(\bar{x}_{k+1}; \bar{V}_k) &\leq p(\bar{x}_k; \bar{V}_{k-1}) \end{aligned}$$

여기서 \bar{x}, \bar{V} 는 고정된 μ 에 대해서 수렴된 식 (11)의 해를 의미한다.

[증명] 정리 2와 일반적인 페널티 방법으로부터 쉽게 증명할 수 있기 때문에 생략한다. □

정리 2, 3으로부터 본 논문에서 제시하고 있는 페널티 방법을 이용하여 LMI의 해를 구하는 방법의 수렴성을 알 수 있다. 여기서 한가지 언급할 것은 페널티 함수 (8)이 변수에 대해서 선형이라는 것이다. 이 선형성으로 인하여 비볼록 LMI 문제가 일련의 볼록한 LMI 최적화 문제로 표시된다는 것이다. 따라서 AL법에서 필요한 구배 함수나 Hessian 계산도 필요하지 않게 된다.

2.2 페널티 알고리즘

페널티 함수를 이용한 방법으로 계수조건이 있는 LMI 문제의 해를 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

[알고리즘 1] PFA(Penalty function approach)

- (1) 초기화. 페널티 변수를 영으로 놓고 초기 가능해 x_0 를 구하고

$$x_0 = \min_x \{ \text{trace}(X) : x \in \Omega \}$$

$x_k = x_0$ 로 놓는다. 또한 각종 변수를 설정한다.

$$\mu_k > 1, \alpha \in (0, 1), \epsilon_1 \ll 1$$

- (2) 하중함수 계산. $X(x_k)$ 로부터 페널티 함수의 하중 행렬 V_k 를 고유치 분해를 이용하여 구한다.

- (3) 볼록 최적화. 다음의 볼록 LMI 최적화 문제를 풀어서 x_{k+1} 을 구한다.

$$x_{k+1} = \min_x \{ \varphi(x; \mu_k, V_k) : x \in \Omega \}$$

- (4) 가능영역 시험. 만약 $p(x_{k+1}; V_k) \leq \epsilon_1$ 이면 x_{k+1} 은 가능해가 되고 프로그램을 종료한다.

- (4) 페널티 변수 갱신. x_{k+1} 이 가능해가 아니고 $p(x_{k+1}; V_k) < \alpha p(x_k; V_{k-1})$ 이면 페널티 변수를 다음과 같이 증가시킨다.

$$\mu_{k+1} = \beta \mu_k$$

- (5) 다음 반복 스텝. $k = k+1$ 로 놓고 스텝 (2)로 간다.

위 알고리즘에서 알 수 있듯이 본 논문에서 제시하고 있는 방법은 매우 간단하다. 계산량에 있어서도 고유치 분해를 제외하면 CCL법과 거의 같은 수준이지만 좋은 수렴성을 가지고 있다.

3. 시뮬레이션

본 논문에서 제시한 알고리즘을 다음과 같은 시스템에 적용하였다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\eta \\ -(1+\eta) & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

이 시스템은 차수가 작지만 수치적으로 풀기 매우 어려운 시스템중의 하나이다. 즉, 이 시스템을 안정화 시킬 수 있는 정적제어기 K 의 범위가

$$K \in [-(1+\eta)^2, -1]$$

이고 대부분의 알고리즘들이 $\eta \rightarrow 0$ 임에 따라서 해를 구하지 못한다. 본 논문의 알고리즘을 $\eta = 2 \cdot 10^{-6}$ 에 적용하여 LMI 조건 (3)과 계수조건 (4)를 푼 결과를 그림 1에 나타냈다.

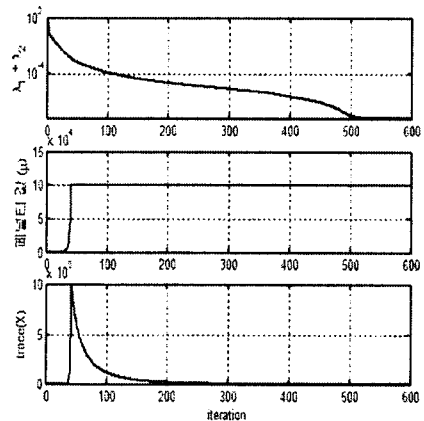


그림 1. 페널티 함수를 이용한 결과

그림 1에서 첫 번째 그림은 페널티 함수값 $p(x; V)$ 를 표시한 것으로 식 (4)의 고유치들

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$$

라고 할때 $\lambda_1 + \lambda_2$ 를 나타낸 것이다. 두 번째 그림은 페널티 변수를 나타내고 있으며 수치적인 안정성을 위하여 변수 값을 10^5 까지만 증가시키는 것으로 하였다. 마치

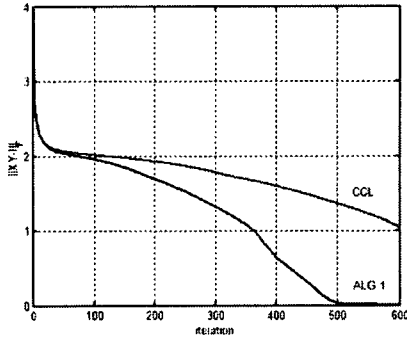
막 그림은 식 (4)의 행렬의 대각합을 나타낸 것이다. 이때 찾은 해는 다음과 같다

$$X = \begin{bmatrix} 500.562266755825 & -500.561273583614 \\ -500.561273583614 & 500.562278266365 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 500.550563835499 & 500.549570686684 \\ 500.549570686684 & 500.550575346147 \end{bmatrix}$$

$$K = -1.00000000867570$$

다음 그림 2는 시스템 (13)의 정적 출력제어기 설계에 본 논문의 알고리즘과 대표적인 지역알고리즘인 CCL 법 [9]과 Frobenius 놈($\|XY - I\|_F$)을 비교한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 CCL 법으로는 해를 찾을 수 없었다.



다음으로 임의의 시스템에 적용하였다. 시스템 차수는 3-8차 까지 시험하였고 [4]에서 제시한 방법에 따라서 시스템 행렬 A, B, C 를 랜덤함수를 이용하여 발생시켰다. 시물레이션을 위하여 사용한 변수는 다음과 같다.

$$\mu_0 = 20, \alpha = 0.9, \epsilon_1 = 10^{-8}$$

표 2. CCL법과 PFA의 비교

| 시스템 차수 | 샘플수 | 평균 반복횟수 | | 실패횟수 | |
|--------|------|---------|-------|------|-----|
| | | CCL | PFA | CCL | PFA |
| 3 | 1500 | 1.130 | 1.134 | 0 | 0 |
| 4 | 1500 | 1.376 | 1.500 | 3 | 0 |
| 5 | 1500 | 1.670 | 1.735 | 1 | 0 |
| 6 | 1500 | 1.948 | 2.204 | 2 | 0 |
| 7 | 1500 | 2.300 | 2.749 | 1 | 0 |
| 8 | 1500 | 2.648 | 3.438 | 1 | 0 |

표 2에서 알 수 있듯이 계수조건이 있는 LMI 문제에 대해서 해를 구하기 위해 필요한 평균 반복횟수는 본 논문의 PFA법이 더 많다. 하지만 CCL 법이 해를 찾는데 실패한 경우에 대해서 PFA법은 모두 해를 구하였다. 이것은 본 논문에서 제시한 PFA법은 페널티 변수 μ 와 같은 조정변수가 있지만 CCL 법은 수렴성을 조절할 변수가 전혀 없기 때문인 것으로 판단된다.

다음에 실제적인 문제로서 VTOL 헬기의 종축운동(longitudinal motion) 모델에 대해서 제어기를 설계해 보자 시스템 행렬은 다음과 같다

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.4900 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PFA법은 반복횟수 2번에 다음과 같은 해를 구하였고

$$Y = \begin{bmatrix} 0.9358 & -0.1119 & -0.2454 & -0.0908 \\ -0.1119 & 1.2449 & 0.2964 & 0.2653 \\ -0.2454 & 0.2964 & 0.9042 & 0.1495 \\ -0.0908 & 0.2653 & 0.1495 & 1.1680 \end{bmatrix}$$

이득은 $K = [-0.6387 \ 1.6040]^T$ 이고 전체 페루프 시스

템의 고유치는 다음과 같이 모두 좌반면에 있는 것으로 확인되었다.

$$\lambda = \begin{bmatrix} -15.6460 \\ -0.0803 \\ -0.2348 + i1.1711 \\ -0.2348 - i1.1711 \end{bmatrix}$$

4. 결 론

본 논문에서는 비볼록 문제인 축소차수 제어기를 설계하는 알고리즘에 대해서 연구하였다. 계수조건을 가지는 LMI로 표시되는 축소차수제어기 설계문제에서 계수조건을 페널티 함수로 나타내서 최적화 문제로 변환함으로써 반복적인 방법으로 해를 구하는 알고리즘을 제시하였다. 제시된 알고리즘은 기존의 방법에 비해 간단하면서도 좋은 수렴특성을 가졌으며 시물레이션을 통해서 이를 입증하였다. 또한 본 논문의 알고리즘은 계수조건이 있는 LMI 문제를 일반화하여 풀 수 있는 알고리즘이기 때문에 안정화 정적출력 제어기 설계뿐만 아니고 H_2 또는 H_∞ 최적 제어기 설계에도 그대로 적용할 수 있는 장점이 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] P. Apkarian and H. D. Tuan, "Concave programming in control theory", Journal of Global Optimization, 15(4):343-370, 1999.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, "Linear matrix inequalities in system and control theory", SIAM, 1994.
- [3] Y. Y. Cao, J. Lam and Y. X. Su, "Static output feedback stabilization: an ILMI approach", Automatica, 34(12):1641-1645, 1998.
- [4] M. C. de Oliveira and J. C. Geromel, "Numerical comparison of output feedback design methods", Proc. of the American Control Conf. pp72-76, 1997.
- [5] B. Fares, P. Apkarian and D. Noll, "An augmented Lagrangian method for a class of LMI-constrained problems in robust control theory", Proc. of the American Control Conf., pp3702-3705, 2000.
- [6] M. Fazel, H. Hindi and S. Boyd, "Log-det heuristic for matrix rank minimization with application to hankel and euclidean distance matrices", Proc. of the American Control Conf. pp2156-2162, 2003.
- [7] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to H_∞ control", International Journal of Robust and Nonlinear Control, pp421-448, 1994.
- [8] J. C. Geromel, C. C. de Souza and R. E. Skelton, "LMI numerical solution for output feedback stabilization", Proc. of American Control Conf. pp40-44, 1994.
- [9] L. El Ghaoui, F. Oustry and M. Rami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems", IEEE Trans. on Automatic Control, 42(8):1171-1176, 1997.
- [10] K. C. Goh, M. G. Safonov and G. P. Papavassilopoulos, "A global optimization approach for the BMI problem", Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp2009-2014, 1994.
- [11] K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton, "Low order control design for LMI problems using alternating projection methods", Automatica, 32(8):1117-1125, 1996.
- [12] T. Iwasaki, "The dual iteration for fixed order control", IEEE Trans. on Automatic Control, 44(4):783-788, 1999.
- [13] M. Meshbahi, "A semidefinite programming solution of the least order dynamic output feedback synthesis problem", Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp1851-1856, 1999.
- [14] V. L. Szymos, C. T. Abdallah, P. Dorato and K. Grigoriadis, "Static output feedback - a survey", Automatica, 33(2):125-137, 1997.