2004년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2004.7.14-16

2차형식 Lyapunov 함수에 기초한 강인한 안정조건

이동철° · 배종일 · 조봉관 · 배철민
부경대학교 전기 · 제어계측공학부

Robust Stable Conditions Based on the Quadratic Form Lyapunov Function

Dong-Cheol Lee° · Jong-Il Bae · Bong-Kwan Jo · Chul-Min Bae
Division of Electrical Control & Instrumentation Engineering Pukyong National University

Abstract -Robust stable analysis with the system bounded parameteric variation is very important among the various control theory. This study is to investigate the robust stable conditions using the quadratic form Lyapunov function in which the coefficient matrix is affined linear system. The quadratic stability using the quadratic form Lyapunov function is not investigated yet. The Lyapunov function is robust stable not to be dependent by the variable parameters, which means that the Lyapunov function is conservative. We suggest the robust stable conditions in the Lyapunov function in which the variable parameters are dependent in order to reduce the conservativeness of quadratic stablilty.

1. 서 론

상태공간 시스템에 대한 안정해석은 제어이론에서 매우 중요한 문제이다. 본 연구에서는 시스템의 안정성은 점근안정성을 의미한다. Lyapunov 정리에 의하면 시스템 안정성은 Lyapunov 함수의 존재에 의해 보증된다. 선형시스템 $\dot{x}=Ax$에 대해서는 2차형식 Lyapunov 함수의 존재와 시스템의 안정성은 등가이다. 선형시스템의 안정성을 알기 위해서 2차형식 Lyapunov 함수는 유용하다. 시스템이 모든 변동에 대해 안정할 때 이 시스템은 강인한 안정이라고 한다. 본 연구의 목적은 2차형식 Lyapunov 함수를 이용하여 유계(bounded) 변동을 포함하는 선형시스템의 안정조건을 유도하는 것이다. 이와 같은 Lyapunov 함수로써 더욱 간단한 것은 변동에 의존하지 않는 2차함수이다. 이와 같은 함수가 존재할 때 이 시스템은 2차안정이라고 한다. 끝으로 수치예를 이용하여 그들의 조건을 비교한다.

2. 문제의 설정

다음의 구조적 변동을 갖는 선형시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t)=A(\theta)x(t),\ \ A(\theta)=A_0+E(\theta),$$

$$E(\theta)=\theta_1E_1+\cdots+\theta_KE_K \qquad (1)$$

여기서, A_0 및 $E_i(i=1,\cdots,K)$는 기지의 정수행렬이다. 또 $\theta(t)=(\theta_1(t),\cdots,\theta_K(t))$는 유계 파라미터 변동을 나타내며 다음과 같다.

$$\theta\in\Theta:=\{\ (\theta_1,\cdots,\theta_k)\mid \underline{\theta_i}\le\theta_i\le\overline{\theta_i},\ i=1,\cdots,K\}$$

이때, $A(\theta)$ 전체의 집합은 다음과 같이 주어지며, Ω는 2^K개의 단점(vertex)을 갖는 다면체(polytope)가 된다.

$$\Omega:=\left\{A\in R^{n\times n}\mid A(\theta)=A_0+E(\theta),\ E(\theta)=\sum_{i=1}^{K}\theta_iE_i,\ \theta\in\Theta\right\}$$

임의의 $A(\theta)\in\Omega$에 대하여 시스템 (2.1) 안정하면 이 시스템은 파라미터 변동 $\theta\in\Theta$에 대하여 강인한 안정이라고 한다.

본 연구의 목적은 시스템 (2.1)의 강인한 안정조건을 2차형식 Lyapunov 함수를 이용하여 구하는 것이다. 이때 이용하는 함수는 변동에 독립인 2차함수, 상태벡터에 구분적인 2차함수, 그리고 변동 파라미터에 affine한 2차함수이다.

3. 2차안정성

[정의 1] (2차안정성)

어떤 대칭정수행렬 P가 존재하여 식(2), (3)이 모든 변동 $\theta\in\Theta$에 대하여 성립할 때 시스템 (1)은 2차안정이라고 한다.

$$V(x):=x^TPx>0,\quad \forall_x\ne0 \qquad (2)$$

$$\frac{dV}{dt}=x^T(A^TP+PA)x<0 \qquad (3)$$

위의 정의에서 식(2)와 (3)의 조건은 식(4)와 등가이다.

$$P>0,\ A(\theta)^TP+PA(\theta)<0\quad \forall_{\theta\in\Omega} \qquad (4)$$

또 $A(\theta)$는 다면체 요소이므로 이 다면체의 정점을 $A_1,\cdots,A_{2^K}$라 하면 다음의 정리를 말할 수 있다.

[정리 1] [1]

시스템 (1)이 2차안정하기 위한 필요 충분조건은 식(5)를 만족하는 정수행렬 P가 존재하는 것이다. 이때 $V(x)=x^TPx$는 이 시스템이 2차안정임을 보증하는 Lyapunov함수이다.

$$P>0,\ \ A^T_iP+PA_i<0,\quad i=1,\cdots,2^K \qquad (5)$$

4. 구분적 Lyapunov 함수에 기초한 강인안정조건

4.1 $K=2$의 경우

[정리 2] [2]

시스템 (1)의 강인한 안정성을 보증하는 구분적 Lyapunov 함수 $V(x)$가 존재하기 위한 필요 충분조건은 연립행렬 부등식 (6)을 만족하는 $H_1,\ H_2\in R^{n\times n}$및 $\delta_1,\ \delta_2\in[0,\ 1]$가 존재하는 것이다.

$$\begin{cases} A_1{}^T H_1 + H_1 A_1 < 0 \\ A_2{}^T H_2 + H_2 A_2 < 0 \\ (1-\delta_2)(A_1{}^T H_2 + H_2 A_1) + \delta_2 (H_2 - H_1) < 0 \\ (1-\delta_2)(A_2{}^T H_1 + H_1 A_2) - \delta_1 (H_2 - H_1) < 0 \\ H_1 > 0,\ H_2 > 0 \end{cases} \tag{6}$$

이때, $V(x) = \max(x^T H_1 x,\ x^T H_2 x)$는 시스템 (1)의 강인한 안정성을 보증하는 Lyapunov 함수이다.

변동 파라미터 $\theta = (\theta_1,\ \theta_2)$에 대해 다음식과 같다.

$$A_1 = A_0 + \underline{\theta}_1 E_1 + \overline{\theta}_2 E_2$$
$$A_2 = A_0 + \overline{\theta}_1 E_1 + \overline{\theta}_2 E_2$$
$$A_3 = A_0 + \overline{\theta}_1 E_1 + \underline{\theta}_2 E_2$$
$$A_4 = A_0 + \underline{\theta}_1 E_1 + \underline{\theta}_2 E_2$$

이때 $\Omega = C_O\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$이다. 이 다면체 Ω 내의 임의의 점 A는 $\alpha,\ \beta \in [0,\ 1]$을 사용하여 식(7)과 같이 나타낼 수 있다(Fig. 1참조).

$$A = \beta((1-\alpha)A_1 + \alpha A_2) + (1-\beta)((1-\alpha)A_4 + \alpha A_3) \tag{7}$$

5. Leal과 Gibson에 의한 강인한 안정조건[3]

[정의 2] (affine한 2차안정성) [4]

시스템(1)이 affine한 2차안정(Affine Quadratically Stability : 이하 AQS라함)이라는 것은 모든 파라미터 $\theta \in \Theta$와 상태벡터 $x(t)$에 대해 다음식을 만족하는 affine 2차안정 형식 Lyapunov 함수가 존재하는 것이다.

$$V(x,\ \theta) > 0,\quad \frac{dV}{dt} < 0$$

$$V(x,\ \theta) := x^T P(\theta) x,\quad P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \cdots + \theta_K P_K$$

여기서, $P(\theta)$는 θ의 affine한 함수이다. 2차안정은 $P_1 = \cdots = P_K = 0$의 경우에 대응되는 것으로 AQS는 2차안정을 특수한 경우로 포함하고 있다.

[정리 3] [3]

$s_1(\theta_0)$이 식(8)과 같다고 하면, $C(s_1(Q_0))$의 내부의 모든 θ에 대해 $A(\theta)$는 AQS이다.

$$s_1(Q_0) = \frac{1}{\max\{\sigma_{0\max}(Q_0),\ \sqrt{2\sigma_{1\max}(Q_0)\cdot\sigma_{2\max}(Q_0)}\}} \tag{8}$$

$s_1(Q_0)$를 평가하기 위해 $C(1)$의 2^{K-1}개의 정점의 각각에 대해 $s_1(Q_0)$를 계산하면 된다.

6. Gahinet 들에 의한 강인한 안정조건

6.1 변동 파라미터에 대한 가정과 AQS조건[4]

2차안정성은 빠른 파라미터 변동에 대해서도 경계하고, 시불변 파라미터나 느리게 변화하는 변동에 대해서 보수성을 가진다. 그리고 θ_i는 모든 시간에서 정의되고, 그 최대치 $\underline{\nu}_i$ 와 최소치 $\overline{\nu}_i$로 주어지는 경우를 고려하자.

다면체 Θ의 2^K개의 정점집합은 식(9)와 같다.

$$\nu := \{(\omega_1,\cdots,\omega_K) : \omega_i \in \{\underline{\theta}_i,\ \overline{\theta}_i\}\} \tag{9}$$

마찬가지로, θ가 값을 취하는 다면체의 2^K개의 정점집합을 식(10)과 같다.

$$R := \{(\tau_1,\cdots,\tau_K) : \tau_i \in \{\underline{\nu}_i,\ \overline{\nu}_i\}\} \tag{10}$$

6.2 AQS에 대한 LMI 충분조건

파라미터 공간에서 각각의 θ_i 방향에 따라 凸성(convexity)과 같은 함수를 다중凸성(multiconvexity)이라 한다.

[정리 5] [7]

파라미터 벡터의 평균값 θ_{mean}을 식(11)과 같이 나타내자.

$$\theta_{mean} := \left(\frac{\underline{\theta}_1 + \overline{\theta}_1}{2},\ \cdots,\ \frac{\underline{\theta}_K + \overline{\theta}_K}{2}\right) \tag{11}$$

7. 수치계산 예

7.1 문제

다음의 질량-용수철계를 고려하자.

$$\dot{x} = A(f,\ k)x,\quad A(f,\ k) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -f \end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서, 용수철 정수 k와 마찰정수 f는 시변이라고 가정한다. 분명히 $A(f,\ k)$는 f와 k에 affine하며 다음과 같다고 하자.

$$f(t) = 1 + \theta_1(t),\quad k(t) = 1 + \theta_2(t)$$

이때 식(13)과 같다.

$$A = A_0 + \theta_1 E_1 + \theta_2 E_2$$
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

7.2 계산결과

7.2.1 2차안정

[정리 1]에서 이 시스템이 2차안정하기 위한 θ_1과 θ_2의 범위는 다음과 같다.

$$-0.49 \le \theta_1 \le 0.49,\quad -0.49 \le \theta_2 \le 0.49$$

이 때 P는 다음과 같다.

$$P = \begin{pmatrix} 1009.4 & 230.6 \\ 230.6 & 1023.1 \end{pmatrix}$$

7.2.2 구분적 Lyapunov함수

[정리 2]에서 구간 [0, 1]을 0.05 간격으로 구분한 격자점 상에 δ_1과 δ_2의 값을 한정하고, 쌍선형 부등식조건 식(6)을 H_1, H_2에 대해서 LMI라고 간주하여 해결한다. 이때 θ_1과 θ_2의 범위는 다음과 같다.

$$-0.53 \le \theta_1 \le 0.53,\quad -0.53 \le \theta_2 \le 0.53$$

시스템(12)는 견실안정하며, 다음 식은 식(6)을 만족한다.

$$\delta_1 = 0.80,\quad \delta_2 = 0.75$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 53.2820 & 17.2351 \\ 17.2351 & 57.8875 \end{pmatrix},\quad H_2 = \begin{pmatrix} 56.1846 & 9.5674 \\ 9.5674 & 53.5306 \end{pmatrix}$$

7.2.3 Leal과 Gibson의 방법

f와 k는 시불변이라고 하자. 이때 [정리 3]에서 $Q_0 = I$로 하여 식(8)을 계산하면 다음과 같다.

$$s_1(I) = 0.707107$$

따라서, 다음과 같이 된다.

$$\max\{\,|\theta_1|,\ |\theta_2|\,\} \le 0.707107$$

시스템(12)는 견실안정하며, 식(3)과 (4)에서 다음과 같이 된다.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1.500 & 0.500 \\ 0.500 & 1.000 \end{pmatrix},\ P_1 = \begin{pmatrix} 0.000 & -0.500 \\ -0.500 & -0.500 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} -0.500 & 0.000 \\ 0.000 & -1.000 \end{pmatrix}$$

7.2.4 Gahinet들의 방법[5, 6]

파라미터의 변화율 $\dot{f}$와 $\dot{k}$의 절대치의 최대치를 각각 $\dot{f}_{max}$, $\dot{k}_{max}$라 하자.
이 조건을 기초로 시변시스템 (12)가 점근안정이기 위한 파라미터 여유 $K_m := \max = \{ |\theta_1|, |\theta_2| \}$을 계산한다.

1. 시불변 $k(dotk_{max} = 0)$와 시변 f에 대하여 10^{-3}과 10^4 사이에 분포하는 $\dot{f}_{max}$값에 대하여 파라미터 여유 K_m을 계산했다. 결과는 $\dot{f}$의 어느 값에도 $K_m = 0.9999$가 되었다. 따라서, f의 시간변화 만으로는 안정영역에 영향이 없다는 것을 알 수 있다.

2. 시불변 $f(\dot{f}_{max} = 0)$와 시변 k에 대해 10^{-3}과 10^4 사이에 분포하는 $\dot{f}_{max}$값에 대하여 파라미터 여유 K_m을 계산했다. 결과는 Fig.2에 나타냈다. Fig. 2에서는 안정영역을 결정할 때 $\dot{k}$에 강하게 영향을 받고 있음을 알 수 있다. 파라미터 여유는 k가 느리게 변화할 때는 $K_m = 1$에 가깝지만, $\dot{k}_{max}$가 증가하는데 따라 점점 감소하고, $\dot{k}_{max} = 1$의 근방에서 대개 2차안정값 0.5가 된다.

3. f와 k의 시간변화 사이의 영향을 평가하기 위해, 시변의 f와 k에 대해 K_m을 계산했다. 이 테스트의 결과는 Fig.3에 3차원으로 나타냈다. Fig. 3에서 f와 k가 동시에 변화해도 별로 안정영역의 결정에는 영향이 없음을 알 수 있다. 따라서, 안정영역은 $\dot{k}_{max}$에 의해 본질적으로 결정됨을 알 수 있다.

8. 결 론

본 연구에서는 변동 파라미터에 대해 affine한 선형시스템에 대한 2차형식 Lyapunov 함수에 기초한 강인한 안정조건을 이용했다. 그리고 그것을 수치계산 예에서 비교한 결과 변동이 빠른 조건을 포함한 강인한 안정조건은 2차안정성의 보수성을 대폭적으로 개선할 수 있음을 알 수 있었다.

[참 고 문 헌]

[1] S. Boyd, L. EI Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[2] L. Xie, S. Shishkin and M. Fu, "Piecewise Lyapunov Function for Robust Stability of Linear Time-Varying Systems," Technical Report EE 9546, Dept. Electrical and Computer Engineering, University of Newcastle, 1995.

[3] M. A. Leal and J. S. Gibson, "A First-Order Lyapunov Robustness Method for Linear Systems with Uncertain Parameters," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 35, pp. 1068-1070, Sept. 1990.

[4] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali, "Affine Parameter-Dependent Lyapunov Function and Real Paramteric Uncertainty," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 41, pp. 436-442, March 1996.

[5] P. Gahinet and A. Nemirovski, "General-Purpose LMI Solvers with Benchmarks," in Proc. Conf. Dec. Contr. pp. 3162-3165, 1993.

[6] P. Gahinet and A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, The LMI Control Toolbox, The Mathworks Inc. 1995, also in Proc. Conf. Dec. Contr. pp. 2038-2041, 1994, and in Proc. Eurpean Contr. Conf., 1995.

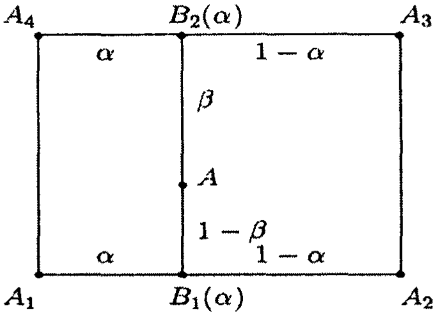

Fig. 1 The relation of A and $A_1, \cdots, A_4$, B_1, B_2

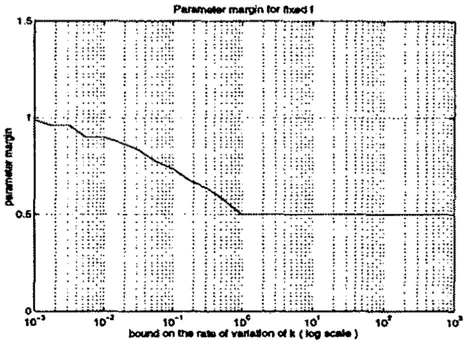

Fig. 2 AQS parameter margin for time variable $\dot{k}$

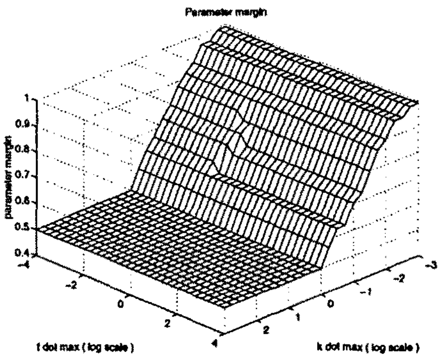

Fig. 3 AQS parameter margin for time variable $\dot{f}$ and $\dot{k}$