

정합조건을 만족하지 않는 모델 추종 슬라이딩 모드를 이용한 강인 제어기의 설계

김민찬, 박승규, 안호균, 광군평, 남정락
 창원대학교 전기공학과, 동명대학 전기공학과

Design of Robust Controller Using Model Following Sliding Mode Without Matching Condition

Min-Chan Kim, Seung-Kyu Park, Ho-Kyun Ahn, Gun-Pyong Kwak, Jing-Rak Nam

Dept. of Electrical Engineering, Changwon National University Dept. of Electrical Engineering, T

Abstract - The Sliding Mode Control is more robust and give the better performance than the H_∞ control if the matching condition is satisfied. So in this paper, a controller which can have the advantages of H_∞ control and the SMC is proposed to add the robustness of the SMC to the H_∞ controller. The dynamic of proposed sliding surface is the same dynamic as the system controlled by H_∞ controller without the uncertainties which satisfy the matching condition.

ΔA 는 준-유제한 다음과 같은 정합조건을 만족하는 파라미터 불확실성이다.

$$\text{rank}([\Delta A : B_1 : B_2]) = \text{rank } B_2 \quad (2)$$

하지만 불확실성이 정합조건을 만족하지 않는다면 다음 식과 같이 정합조건을 만족 하는 부분(ΔA_s)과 만족하지 않는 부분(ΔA_b)으로 나눌 수 있다.

$$\Delta A = \Delta A_s + \Delta A_b \quad (3)$$

1. 서 론

식(1)은 다음과 같은 오차 방정식을 만족한다.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B_2u_1(t) + \Delta Ax(t) \quad (4)$$

슬라이딩 모드 제어는 시스템의 파라미터 불확실성에 강인한 성능을 가지고 있지만 그 동특성이 슬라이딩 평면에 의해서 임의로 결정되므로 실제 공칭 시스템의 동특성과는 무관한 제어 기법이다. 또한 불확실성이 정합조건을 만족하지 않으면 제어가 설계 방법이 용이하지 않다는 단점을 가지고 있다. H_∞ 제어도 외란이나 잡음에 대해서 강인한 성능을 가지고 있지만 파라미터 불확실성이 존재하면 제어 입력을 구하기 쉽지 않다. 만일 가능하다고 하더라도 그 불확실성의 영향에 따라서 제어 성능의 차이가 나게 된다. 그러므로 본 논문에서는 기준 입력이 존재할 때 바람직한 모델에 대해서 정합조건을 만족하지 않는 시스템의 파라미터 불확실성이 주어지면 불확실성을 만족하는 부분과 만족하지 않는 부분으로 나누어서 불확실성을 만족하는 부분은 제안된 슬라이딩 모드 제어기로, 만족하지 않는 부분은 기존의 H_∞ 제어기로 설계된 제어 기법을 제안한다. 그 결과 정합조건을 만족하는 불확실성은 슬라이딩 모드 제어에 의해서 제거된다. 그러므로 시스템의 응답 특성은 그 크기가 감소된 정합조건을 만족하지 않는 부분에 의해서만 결정되기 때문에 더 강인한 제어기 설계가 가능해진다.

여기서, $u(t) = u_1(t) + r(t)$ 이고 $e \in R^n$, $u_1 \in R^m$ 이다.

파라미터 불확실성을 가지는 상태공간 H_∞ 제어를 설계하기 위하여 식(3)을 다음과 같은 형태로 나타낸다.

$$\Delta A = DFE \quad (5)$$

여기서 $D \in R^{n \times m}$ 이고 $F \in R^{n \times n}$ 는 $FF^T \leq F$ 를 만족하며 $F \in N^n$ 는 주어진 불확실성 경계이다. 그리고 N^n 는 음이 아닌 행렬이다.

모든 허용가능한 불확실성을 가진 식(1)을 안정화하는 상태공간 H_∞ 제어 입력은 다음과 같이 설계된다.

$$u(t) = Kx(t) \quad (6)$$

식(6)을 식(1)에 대입하면 폐루프 시스템은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) + B_1w(t) \\ z(t) &= \hat{C}x(t) \end{aligned} \quad (7)$$

2. 파라미터 불확실성에 강인한 H_∞ 제어기의 설계

여기서 $\hat{A} = A + B_2K + \Delta A$, $\hat{C} = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix}$ 이다.

다음과 같은 파라미터 불확실성을 가지는 n 차 시스템과 모델을 고려하자.

또한 외란 $w(t)$ 에서 제어된 출력 $z(t)$ 까지의 폐루프 전달 함수 $T_{zw}(s)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + B_1u(t) + B_2u(t) \\ \dot{x}_m(t) &= Ax_m(t) + B_2r(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} Cx(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

$$T_{zw}(s) = \hat{C}(SI - \hat{A})^{-1}B_1 \quad (8)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태, $u(t) \in R^m$ 은 제어 입력, $w(t) \in R^p$ 는 외란, $r(t)$ 는 기준입력, $z(t) \in R^l$ 은 제어된 출력이며

상태공간 H_∞ 제어기의 설계는 식(8)에서 정의된 T_{zw} 의 H_∞ 노름 $\|T_{zw}\|_\infty$ 를 최소화하는 제어입력의 이득을 구하는 것이다.

만약 다음과 같은 식을 만족하는 대칭 양 한정 행렬 (symmetric positive-definite matrices) P 와 Q 가 존재하면

$$\hat{A}^T P + P \hat{A} + Q + \hat{C}^T \hat{C} + \frac{1}{\gamma^2} P B_1 B_1^T P < 0 \quad (9)$$

식(7)의 페루프 시스템은 안정하고 $T_{zw}(s)$ 는 $\|T_{zw}(s)\|_{\infty} \leq \gamma$ 를 만족한다.

결국 식(6)에서와 같은 H_{∞} 제어 입력은 다음과 같이 구해진다.

$$u(t) = Kx(t) = -B_2^{-T} Sx(t) \quad (10)$$

식(9)에서 S 는 다음식과 같이 주어지는 대수 리카치 방정식의 해이다.

$$\begin{aligned} A^T S + SA + S \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^2 + 2\epsilon DD^T + D\bar{F}D^T \right] S \\ + \frac{1}{\epsilon} E_1^T \bar{F}^T E_1 + C^T C + Q + Q_1 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 ϵ 는 양의 값을 가지며 Q 와 Q_1 는 대칭 양 한정 행렬이다.

3. 정합조건을 만족하는 불확실성에 강인한 슬라이딩 모드 제어기의 설계

식(1)은 다음과 같은 공칭 시스템으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_o(t) = Ax_o(t) + B_2 u_o(x_o, t) \quad (12)$$

여기서, $u_o(x_o, t)$ 는 미분 가능한 공칭 제어 입력이다.

가상 상태(virtual state)를 정의하기 위하여 공칭 시스템을 상태변환 $z_o(t) = Px_o(t)$ 를 이용하여 다음과 같은 가제어 표준형(controllable canonical form)으로 변환할 수 있다.

$$\dot{z}_o(t) = A_0 z_o(t) + B_0 u_o(x_o, t) \quad (13)$$

여기서 $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 이며 $u_o(x_o, t)$

는 식(10)에서 주어진다.

공칭 가상 상태 z_{ov} 는 z_{on} 의 미분으로 정의되며 그 동특성은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_{ov}(t) &= -\alpha_n z_{ov}(t) - \dots - \alpha_2 z_{o2}(t) - \alpha_1 z_{o2}(t) + \dot{u}_o(x_o, t) \\ &= -\alpha_n z_{ov}(t) - C_0' z_0(t) + \dot{u}_o(x_o, t) \\ &= -\alpha_n z_{ov}(t) - C_0' P x_0(t) + \dot{u}_o(x_o, t) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, $C_0' = [0 \ a_{01} \ \dots \ a_{0n-1}]$ 이다.

식(14)로부터 가상 상태 z_v 는 공칭 상태 $z_{o1}, z_{o2}, \dots, z_{on}$ 를 어떠한 불확실성도 포함하지 않은 z_1, z_2, \dots, z_n 으로 대치함으로써 얻을 수가 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_v(t) &= -\alpha_n z_v(t) - \dots - \alpha_2 z_3(t) - \alpha_1 z_2(t) + \dot{u}_o(x, t) \\ &= -\alpha_n z_v(t) + C_0 P x(t) + \dot{u}_o(x, t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, $C_0 = [0 \ -\alpha_1 \ \dots \ -\alpha_{n-1}]$ 이다.

또한 $\dot{u}_o(x, t)$ 는 $u_o(x, t)$ 를 미분해서 얻으려 한다면 x 를 미분하게 됨으로써 불확실성이 개입되기 때문에 반드시 $\dot{u}_o(x_o, t)$ 로부터 공칭 상태인 x_o 를 원래 상태인 x 로 대치함으로써 얻어야만 한다.

그러므로 식(1)과 식(15)에서 가상 상태를 포함하는 증가된 시스템(Augmented System)은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) + \Delta Ax(t) + \Delta B u(t) + B_1 w(t) \\ \dot{z}_v(t) &= -\alpha_n z_v(t) - C_0 P x(t) + \dot{u}_o(x, t) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, $u(t)$ 는 슬라이딩 평면상에서 슬라이딩 모드를 보장하는 슬라이딩 모드 제어 입력이다.

본 논문에서 제안된 슬라이딩 평면을 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \sigma(z, t) &= z_v(t) + \alpha_n z_n(t) + \dots + \alpha_1 z_1(t) - u_o(x, t) = 0 \\ &= z_v(t) + (C_1 P - K)x(t) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, $C_1 = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]$ 이며 슬라이딩 모드제어의 결점이었던 도달기간은 가상 상태의 초기값을 다음 식과 같이 선정하면 슬라이딩 평면의 초기값이 0이 되므로 도달기간은 제거된다.

$$\begin{aligned} z_o(t_0) &= -\alpha_n z_n(t_0) - \dots - \alpha_1 z_1(t_0) + u_o(x, t_0) \\ &= -C_1 z(t_0) + u_o(x, t_0) \end{aligned} \quad (18)$$

지금까지의 내용으로 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

[정리]

만약 시스템 식(16)의 상태들이 제안된 슬라이딩 평면상에 존재할 때 식(1)과 같은 시스템의 상태들은 공칭 제어입력에 의해서 제어되는 공칭 시스템 식(12)과 같은 동특성을 갖는다. 그러므로 슬라이딩 평면은 공칭 시스템과 같은 동특성을 가지게 된다. [5]

그러므로 제안된 슬라이딩 모드 제어 입력 $u(t)$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$u(t) = u_{eq}(t) + \Delta u(t) \quad (19)$$

여기서 $u_{eq}(t) = [(C_1 P - K)B_2]^{-1} \cdot (\alpha_n z_n(t) - (C_0 P + L + C_1 P A - K A)x(t))$ 는 $\dot{\sigma}(x) = 0$ 를 만족하는 등가 제어입력이며 $\Delta u(t) = [(C_1 P - K)B_2]^{-1} \cdot (-(C_1 P - K)\Delta A_{max} |x(t)| + B_1 W_{max}) \cdot \text{sgn}(\sigma)$ 는 불연속 제어 입력이다. 그리고 $[(C_1 P - K)B_2]^{-1}$ 는 정칙 행렬이다.

4. 컴퓨터 시뮬레이션

제안된 제어기법의 우수성을 입증하기 위하여 다음과 같은 시스템을 고려하여 컴퓨터 시뮬레이션을 시행하였다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1] \\ Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, r = 1, \epsilon = 1 \end{aligned} \quad (20)$$

정합 조건을 만족하지 않는 파라미터 불확실성은 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta A = \Delta A_s + \Delta A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

또한 시스템에 인가되는 외란의 조건은 다음과 같다.

$$w_{max} = 1, \quad u(t) = 0.1 \sin 20t \quad (22)$$

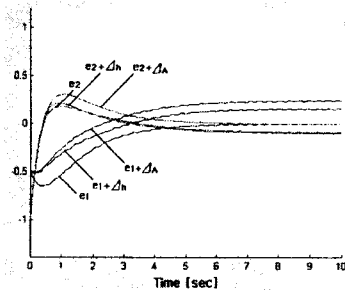


그림 1. 외란과 불확실성이 존재하는 경우 H_∞ 제어기의 오차궤적

Fig. 1. Error trajectories of H_∞ controller with disturbance and parameter uncertainty

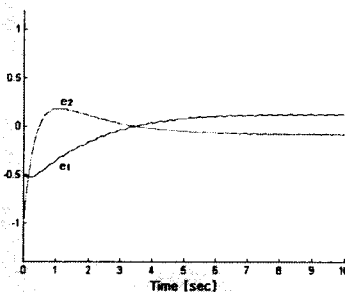


그림 2. 외란과 불확실성이 존재하는 경우 제안된 슬라이딩 모드 제어의 상태궤적

Fig. 2. Error trajectories of proposed sliding mode control with disturbance and parameter uncertainty

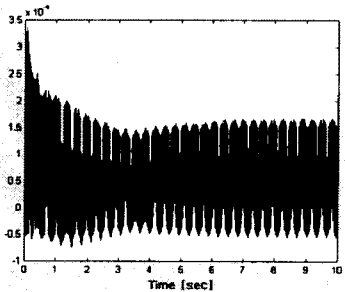


그림 3. 제안된 슬라이딩 모드 제어의 슬라이딩 평면

Fig. 3 Sliding surface of proposed sliding mode control

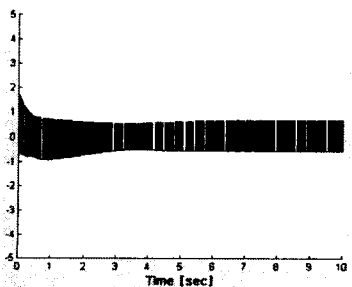


그림 4. 제안된 슬라이딩 모드 제어의 제어 입력
Fig. 4. Control Input of proposed sliding mode control

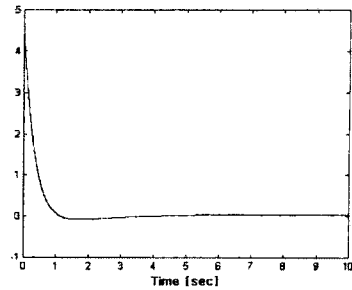


그림 5. 제안된 슬라이딩 모드 제어의 가상상태 z_t

Fig. 5. The virtual state z_t of proposed sliding mode control

그림 1에서 불확실성 ΔA 에서 보다는 ΔA_s 로 설계된 H_∞ 제어기가 더 강인함을 알 수 있다. 그림 2의 결과에서 보면 주어진 불확실성 중에서 정합조건을 만족하는 부분의 불확실성은 제안된 슬라이딩 모드 제어기에 의해서 그 영향이 없으므로 그림 1.에서의 ΔA_s 의 결과와 같다. 그림 3에서 그림 5.는 슬라이딩 평면과 제어 입력 그리고 가상상태의 궤적을 나타낸 것이다.

3. 결 론

본 논문에서는 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에 정합조건을 만족하는 부분과 만족하지 않는 부분으로 나누어서 정합조건을 만족하는 부분은 슬라이딩 모드 제어기로 시스템에 대한 영향을 제거하고 만족하지 않는 부분에 대해서는 H_∞ 제어기로 설계함으로써 불확실성에 강인성이 향상된 제어 기법을 제안하였다. 제안된 슬라이딩 평면은 시스템에 주어진 파라미터 불확실성에서 정합조건을 만족하지 않는 불확실성으로 설계된 H_∞ 제어기에 의해서 제어되는 시스템의 동특성과 같은 동특성을 가지며 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 그 성능을 입증하였다.

감사의 글

본 연구는 2004년도 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기계 기술연구센터 지원에 의하여 이루어짐.

[참 고 문 헌]

- [1] J. H. Ge, P. M. Frank and C. F. Lin, "Robust H_∞ State Feedback Control for Linear Systems with State Delay and Parameter Uncertainty", Automatica, Vol.32, No.8, pp.1183-1185, 1996.
- [2] U. Itkis, Control systems of variable structure, JOHNWILLY & SONS, New York, 1976.
- [3] V. I. Utkin, Sliding modes and their application in variable structure systems, Moscow, Mir Publishers, 1978.
- [4] J Ackermann and V. I. Utkin, "Sliding mode control design based on Ackermann formular", Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Orlando FL, pp.3622-3627, 1994.
- [5] S. K. Park, H. K. Ahn and M. C. Kim, " Model Following Sliding Mode Control with Virtual States for Multiple Input System", Proceeding of the IASTED International Conference Systems and Control, pp.175-180, 2001.