

## 회전원통으로부터의 싱크 유동

서용권<sup>†</sup>, 여창호<sup>\*</sup>

### A Sink Flow from a Rotating Tank

Yong Kweon Suh and Chang Ho Yeo

#### Abstract

In this study, we present the theoretical, numerical and experimental results of the sink flow from a rotating, circular tank. Strikingly enough, when the upper free surface was set with no-slip boundary conditions, the Ekman boundary-layer develops not only above the bottom surface but under the free surface. The sink fluid is coming from the two Ekman layers, and the mass transfer from the bulk, inviscid region is dependent on the rotational speed. It is also remarkable to see that all the fluid gathered along the axis flows through a rapidly rotating fluid column with almost the same size as the hole.

**Key Words** : Rotating Flows(회전유동), Sink Flow(싱크 유동), Ekman Boundary-Layer(Ekman 경계층)

#### 1. 서론

회전유동이란 유체 전체가 강체회전(solid-body rotation)하는 경우에 있어서 이러한 강제회전운동과는 약간 차이가 나는 유체운동(즉 상대운동)이 있는 경우를 일컫는다. 따라서 대부분의 회전유동에서는 강제회전 운동을 하는 좌표계 상에서 해석을 수행하며, 이에 따라 원심력, 코리올리스 힘(Coriolis force) 등이 나타나고, 또한 각운동량 보존원리에 따른 여러 가지 특이하고도 흥미있는 현상이 나타난다. 그 중 Taylor-Prouman 이론은 강체회전 효과가 충분히 큰 경우에 있어서 유체입자는 회전축 방향으로 이동하는 것이 매우 어렵고 또한 유동장은 회전축 방향으로 거의 변하지 않는 즉 2차원적 성향을 가

지게 된다. 따라서 회전축 방향(앞으로는 수직 방향이라 일컬음)으로 유체를 흡입(suction)하거나 송출(blowing)한다면 어떠한 현상이 생겨날까 하는 점이 흥미를 줄 것으로 기대된다.

이러한 기본적인 의문점에 대한 해답을 추구하기 위해 유체역학 연구자들은 바닥으로부터 일정한 크기의 속도로 유체를 흡입하거나 송출하는 문제를 다루어 왔다. Wilson & Schryer(1978)는 회전하는 무한 평판과 정지한 무한 평판이 평행하게 놓인 경우 두 원판 사이의 회전유동을 대상으로 연구하였으며, 회전원판으로부터 흡입이 증가하는 경우 내부의 회전운동은 점점 강해져서 결국 회전원판보다 더 빠른 속도로 회전할 수 있음을 보여주었다. Hyun(1985)은 무한 평판이 아닌 유한 평판의 경우에 있어서 정지 원판으로부터는 유체가 송출되고 회전 원판에서 흡입하는 경우에 대해 수치해석을 수행하였으며, 유한 평판의 경우에는 무한 평판과는 반대로

---

<sup>†</sup> 동아대학교 기계공학부

E-mail : yksuh@daunet.donga.ac.kr

<sup>\*</sup> 동아대학교 대학원 기계공학과

---

내부 유체의 원주방향 유동은 더욱 작아지는 경향이 있음을 보여주었다. Hyun and Kim(1987)은 또한 앞과 같은 조건에서 이제는 정지 원판이 아닌 측면 벽으로부터 유체를 송출하는 경우에 대해 수치해석적 연구를 수행하였으며, 흡입의 증가와 더불어 내부 유체의 회전속도는 무한 평판처럼 증가하는 것으로 나타났으며, 특히 흡입효과가 약한 경우에는 측면으로부터 송출된 유체가 상부의 정지원판으로 올라가서는 정지원판 가까운 Ekman 경계층을 따라 축방향으로 흘러다가 다시 회전원판 쪽으로 수직하향하는 흥미있는 결과를 제시하였다. 한편, Chew et al.(1984)은 회전하는 얇은 원통 사이에서 바닥의 구멍으로부터 유체가 송출하고 측면 벽에서 흡입하는 경우에 대해 수치해석과 실험을 수행하였으며, 분출된 유체는 원판 근처의 Ekman 경계층을 따라서 반경방향으로 나아가는 현상을 관찰하였다.

그러나 바닥의 구멍으로부터 유체가 흡입되는 경우에 대한 연구는 흔치 않다. Mang et al. (2001)은 자유표면을 가진 원형 탱크 내의 수직 측면에서 유체가 반경방향으로 유입되고 바닥의 구멍으로 흡입되는 경우에 대해 이론해석을 수행하였으며, 측면으로부터 반경방향으로 균일하게 유입되는 유체는 서서히 바닥 면 쪽으로 방향전환을 하고 어떠한 임계 위치에서는 모두 바닥의 Ekman 경계층을 통해서만 중심의 구멍 쪽으로

이동하는 현상을 제시하였다.

본 연구는 회전하는 원통 바닥의 중심부 구멍으로부터 일정한 양만큼 유체를 흡입하는 경우에 대해 이론 및 수치해석을 통해 해를 구하고 가시화 실험을 통해 유동의 정성적 특성을 확인하기 위한 것이다. 수치해석에서는 원통 내 유체의 깊이를 일정하게 유지한 상태에서 상부 표면을 점착조건으로 설정하였으며, 실험에서는 상부 표면이 자유표면으로 유지된 상태에서 하부 구멍으로 물이 흡입되는 만큼 수심이 내려가도록 하였다.

## 2. 이론 해석

Fig. 1은 각속도  $\Omega$ 로 회전하는 반경  $r_0$ 의 원통 내에 동점성계수  $\nu$ 의 유체가 있고 하부의 직경  $d$ 의 구멍을 통해 유체가 배출되는 상황을 스케치한 것이다. 이와 동시에 상부 표면에서는 동일한 유량으로 유체가 유입된다. 3차원 수치해석에서는 수심  $H$ 는 일정하며, 실험에서는 상부 표면이 하강함에 따라 수심은 작아진다.

이 경우, 초기의 유동은 모든 지역에서 유체입자가 바닥의 구멍을 향하는 형태가 될 것이다.

그러면 중심 축 방향의 반경방향 속도가 발생하고 이에 따라 각운동량 보존 원리에 의해 사이클로닉(cyclonic) 와류가 생겨나고 이어서 상부 및 하부 벽면 근처에는 점착조건에 의해 Ekman 경계층이 생성된다. Ekman 경계층은 내부 즉 코어(core)에 있는 유체를 흡입하므로 상부에서 투입된 유체 중 일부는 Ekman 경계층을 통해 중심 축으로 전달되고 일부는 내부로 전달된다. 한편 내부에 전달된 유체 중 일부는 중심 축 쪽으로 전달되고 나머지는 하부 벽면의 Ekman 경계층에 흡입된다. 하부의 경계층은 물론 이 유체를 모두 중심 축 쪽으로 전달한다.

상부 벽면 근처의 Ekman 경계층에 대한 해석을 수행하기 위해 수직 좌표인  $z$ 의 원점은 상부 표면의 중심에서 아랫 쪽을 향하는 것으로 잡는다. 그리고 반경방향  $r$ , 원주방향  $\theta$ , 및 축방향  $z$ 의 해당 속도성분을  $u$ ,  $v$ ,  $w$ 라 하면 충분히 큰 회전효과 하에서 선형화된 지배방정식은 아래와 같다.

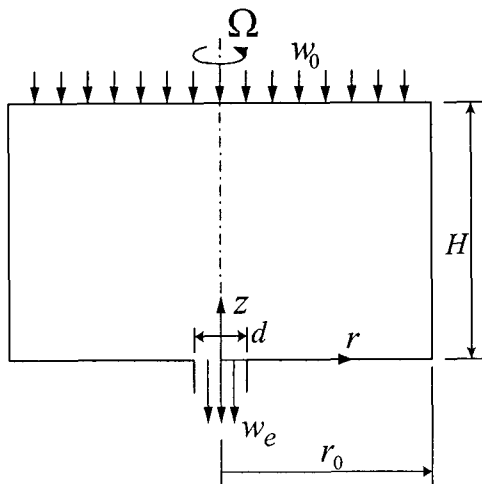


Fig. 1 Withdrawal of a viscous fluid from a rotating tank through a hole on the bottom wall.

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$-2\Omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$2\Omega u = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (3)$$

경계조건은 표면에서 비침투 조건과 정착조건이 적용되며  $w = w_0$ 이다. 그리고 Ekman 경계층 밖에서는  $u, v$ 가 유한한 값을 가져야 한다. 이와 동시에 질량 보존의 법칙

$$(w_0 - w_1)\pi(r_0^2 - r^2) = -\int_0^\infty 2\pi r u dz$$

을 적용하면 아래와 같은 해를 구할 수 있다.

$$u = -\Delta w_0 \sqrt{\Omega/\nu} (r_0^2/r - r) e^{-\zeta} \sin \zeta \quad (4a)$$

$$v = 2\Delta w_0 \sqrt{\Omega/\nu} (r_0^2/r - r) [1 - e^{-\zeta} \cos \zeta] \quad (4b)$$

$$w = \sqrt{2} \Delta w_0 e^{-\zeta} \sin(\zeta + \pi/4) \quad (4c)$$

단,  $\zeta = z\sqrt{\Omega/\nu}$ ,  $\Delta w_0 = w_0 - w_1$ 이다. 바닥에서의 경계층 유동은 윗 식에서  $\Delta w_0$ 를 바닥 경계층의 흡입속도  $w_2$ 로 치환하면 된다.

내부에서의 원주방향 운동량 방정식은

$$u \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} + 2\Omega \right) = 0 \quad (5)$$

이며, 이를 만족할 수 있는 경우는 반경방향 속도가 0이거나 ( $u=0$ ) 아니면 원주방향 속도  $v$ 가 식 (4b)의 형태가 되어야 한다. 후자의 경우에는

$$\Delta w_0 = w_* = \sqrt{\nu \Omega} / 2 \quad (6)$$

이 되어야 한다. 동일한 내부 유동에 대해 상부 경계층과 하부 경계층은 같은 양의 유체흡입이 이루어지므로  $w_2 = w_*$ 를 얻을 수 있다.

한편, 내부 영역에 대해 질량 보존의 법칙을 적용하면,

$$u = \frac{-(w_1 - w_2)}{2H} (r_0^2/r - r) \quad (7)$$

을 얻을 수 있다.

종합해 보면, 상부 벽면을 통해 유입된 유체의 축방향 속도  $w_0$ 는 Ekman 경계층을 지나면서  $w_*$ 만큼 줄어 들고 나머지는 코어로 전달된다. 한편, 하부 경계층에 흡입되는 축방향 속도도  $w_*$

이므로 코어를 통해 중심축으로 전달되는 유량은 속도 차이  $w_0 - 2w_*$ 만큼의 유량에 해당한다. 만약  $w_0$ 가  $2w_*$ 보다 작을 때는 식 (7)이 양이 되면서 물리적으로 그 발생이 불가능할 것이므로  $u=0$ 이 되고 코어의 원주속도는 각 경계층에서  $w_0/2$ 만큼의 흡입이 이루어지도록 정해질 것으로 예상할 수 있다. 다만, 이 경우에는 원주방향 속도가 절대좌표계에서 비회전성이 아니다.

또한, 위 해를 분석해 보면 원통 측면  $r=r_0$ 에서  $u, v$ 는 모두 0이 되고, 중심을 갈수록 크기가 증가한다.  $w$ 는 표면  $z=0$ 에서 최대가 된다. 그리고 표면 가까이의 수평 단면 상에서 유체입자의 궤적은 나선 모양을 그리며 원주방향에 대한 나선각을  $\theta$ 라 할 때

$$\tan \theta = -(\partial u / \partial \zeta)_0 / (\partial v / \partial \zeta)_0$$

의 관계로부터  $\tan \theta = 1/2$  또는  $\theta = 26.6^\circ$ 의 결과를 얻을 수 있다. 한편 코어에서의 나선각은 이보다 훨씬 작은 값이 될 것이다.

### 3. 수치해석 및 실험

3차원 수치해석을 상용 코드 CFX로 수행하였다. 하부의 배출부는 수심과 같은 길이만큼 관을 덧붙인 것으로 하여 안정한 해를 얻을 수 있었다. 상부 벽면의 경계조건은 앞의 이론해석과 동일하게 설정하였다. 격자망은 사면체 모양의 구조로 하여 약 50만개의 셀로 구성하였다. 그리고 상하부 표면 근처에서는 얇은 Ekman 경계층을 염두에 두어 보다 세밀한 격자계를 구성하였다.

상부 표면의 움직임을 제외하면 파라미터 값들은 실험과 동일하다; 즉,  $r_0 = 12.5\text{cm}$ ,  $d = 2.5\text{cm}$ ,  $H = 12\text{cm}$ ,  $w_e = 4.7\text{cm/s}$ ,  $\Omega = 0.39\text{rad/s}$ 이다. 이 때 배출구 직경과 배출 속도를 기준으로 한 레이놀즈 수는 2340이며, Rossby 수( $= w_e/r_0\Omega$ )는 0.96이다. 시간간격은 0.01s부터 시작하여 서서히 증가시켜 최종적으로는 0.2s로 하였으며 50s 까지 계산을 수행하였다.

실험은 회전테이블 위에 원형의 물탱크를 놓고 하부의 구멍으로부터 중력에 의해 물을 빼내는 방법을 사용하였다. 상부 자유표면에는 물을 공급하지 않았기 때문에 수심은 시간과 더불어 서

서히 감소한다. 중심축 단면을 가시화하기 위한 레이저 광은 회전 테이블 밖의 장소에 고정시켰고, 테이블의 회전 중심과 광의 축이 일치하도록 조정할 수 있는 특수제작 장치에 설치하였으며, 평면광으로 만들기 위한 원통형 렌즈는 회전 테이블 위에 설치하였다. 회전에 따른 레이저 광의 편차는 약 1mm 이내가 되도록 하였다.

#### 4. 수치/이론해석 및 실험 결과와 검토

Fig. 2는 축단면 상에서의 2차원 유동을 나타내는 전형적인 유선으로서 상용 CFD 코드로 구한 결과(좌측)와 중심부의 비점성 영역에 대한 이론해석 결과(우측)를 비교한 것이다. 수치해석

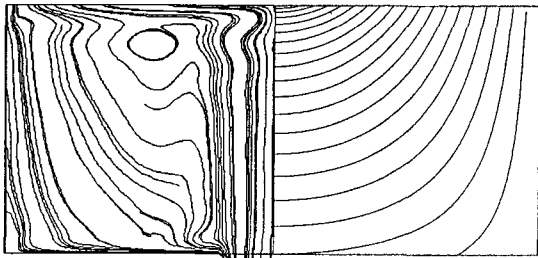


Fig. 2 Numerical (L.H.S.) and theoretical (R.H.S.) streamlines at  $t = 50s$ .

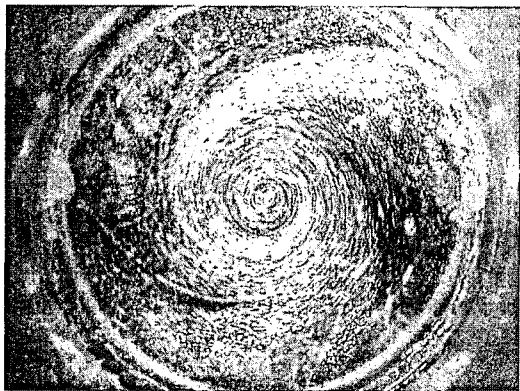


Fig. 3 Flow visualization of an axial plane (upper, 70 seconds after starting) and a horizontal (lower, 20 seconds after starting) plane (6 cm from the bottom) with the same parameters as in Fig. 2.

결과에 의하면, 하부 구멍을 통해 유출되는 유체의 상당한 부분이 상부 Ekman 경계층을 통해 이송된 유체이며, 중심부는 거의 수직 기둥의 모양으로 유체가 하강한다. 물론 거의 모든 영역에서 유체는 원주방향으로 회전하는 양상을 띄며, 특히 수직 기둥의 가장자리에서 원주 속도가 최대가 된다.

Fig. 3은 Fig. 2와 같은 조건에서 축단면(상부 사진) 및 수평단면(하부 사진)의 유동을 가시화한 실험 결과이다. 정량적인 결과는 아직 획득하지 못하였지만, Fig. 2의 수치해석 결과와 비교해보면 중심부에 수직기둥 모양의 하향 유동양상이 뚜렷이 나타나고 있음이 수치해석 결과와 일치한다. 하부 사진은 유동이 충분히 발달하지 않은 초기 상태로서 비점성 영역에서의 유체가 나선모양의 궤적을 그리면서 중심부로 몰려드는 것을 확인할 수 있다. 물론 충분히 발달된 상태에서는 이 부분의 유동은 거의 동심원적이다.

#### 후 기

이 논문은 2002-3년도 한국학술진흥재단의 지원에 의해 연구되었음. (KRF-2002-041-D00080)

#### 참 고 문 헌

- 1) Wilson, L.O. and Schryer, N.L., "Flow between a Stationary and Rotating Disk with Suction", *J. Fluid Mech.*, Vol. 85, pp. 479-496.
- 2) Hyun, J.M., 1985, "Flow Driven by a Finite, Shrouded Spinning Disk with Suction", *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, pp. 766-770.
- 3) Hyun J.M. and Kim, J.W., 1987, "Flow Driven by a Shrouded Spinning Disk with Axial Suction and Radial Inflow", *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 2, pp. 175-182.
- 4) Chew, J.W., Owen, J.M. and Pincombe, J.R., 1984, "Numerical Predictions for Laminar Source-Sink Flow in a Rotating Cylindrical Cavity", *J. Fluid Mech.*, Vol. 143, pp. 451-466.
- 5) Mang, J., Ungarish, M. and Schaflinger, U., 2001, "Gravitational-Centrifugal Separation in an Axisymmetric Source-Sink Flow with a Free Surface", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 27, pp. 197-215.