

이동하는 점탄성 보의 스펙트럴 요소모델링 및 동역학 해석

오형미* · 김도연** · 이우식†

Spectral Element Modeling and Dynamic Analysis of an Axially Moving Viscoelastic Beam

Hyungmi Oh, Doyeon Kim and Usik Lee

Key Words : Viscoelastic Beam(점탄성보), Moving Beam(이동보), Dynamic Stiffness Matrix(동강성행렬), Spectral Element Method(스펙트럴요소법), Vibration(진동), Stability(안정성), Critical Moving Speed(임계속도)

Abstract

In this paper, the spectral element model is derived for the vibration and stability analyses of an axially moving viscoelastic beam subjected to axial tension. The viscoelastic material is represented by using a one-dimensional constitutive equation of hereditary integral type. The accuracy of the present spectral element model is first verified by comparing the eigenvalues obtained by the present spectral element model-based SEM with those obtained by the exact theory and the conventional FEM. The effects of viscoelasticity on the vibration and stability of an example moving viscoelastic beam are numerically investigated.

1. 서 론

동력전달장치에 사용되는 이동벨트(moving belt)는 축방향으로 이동하는 1차원 구조물의 대표적인 예이다. 축방향으로 이동하는 구조물의 경우 이동속도의 변화에 따라서 구조물의 진동과 동특성이 변화하게 되며 이동속도가 임의의 임계속도에 이르면 불안정 현상이 나타나면서 구조물이 파손될 수 있다. 따라서, 축방향으로 이동하는 구조물의 구조동역학적 특성과 안정성을 사전에 정확하게 파악하는 것이 매우 중요하므로 이에 관한 연구가 그동안 많은 연구자 이루어져 왔으며 1980년대 후반까지의 연구는 Wickert 와 Mote⁽¹⁾에 의해 문헌 조사가 이루어진 바 있다. 지금까지 문헌에 발표된 연구들을 살펴보면 대부분의 연구에서 축방향으로 이동하는 구조물을 탄성체로 가정하고 1차원 현(string)이나 보(beam) 구조로 모델링하였다.

재료의 발전과 함께 이동벨트의 재료로서 플라

* 인하대학교 대학원 기계공학과

** 인하대학교 대학원 기계공학과

† 책임저자, 회원, 인하대학교 기계공학과

E-mail : ulee@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434

스틱, 세라믹, 강화금속, 강화 복합재료, 고분자재료 등이 이동벨트의 재료로서 최근 널리 사용되고 있다. 이러한 점탄성 재료는 일반적으로 Hook의 법칙 대신에 미분형 또는 적분형으로 표현된 구성식(constitutive equation)으로 나타낸다.

점탄성 이동벨트에 대한 연구는 Fung의 연구⁽²⁾가 처음이다. Fung은 점탄성 이동벨트의 과도응답(transient response)을 구하기 위하여 선형표준(linear standard) 점탄성 모델을 사용하였으며 Galerkin방법과 유한차분법(finite difference method)을 사용하였다. 이후에 Fung⁽³⁾은 점탄성 감쇠가 이동벨트의 비선형 자유진동에 미치는 영향을 고찰하였으며, Zhang과 Zu^(4, 5)는 미분형 Kelvin모델을 채택하여 비선형 자유진동과 강제진동을 고찰하였다. Hou와 Zu⁽⁶⁾는 미분형 선형표준 점탄성 모델을 이용하여 점탄성 이동벨트의 비선형 진동을 연구하였다. 점탄성 이동벨트에 대한 지금까지의 연구들⁽²⁻⁶⁾에서는 이동벨트를 대부분 현 모델로 다루었다. 그러나, 이동벨트의 굽힘강성을 무시할 수 없는 경우 현 모델보다는 보 모델로 다루는 것이 바람직하다. 이동하는 점탄성 Web을 보 모델로 다룬 연구자는 Marynowski와 Kapitaniak⁽⁷⁾이며 이들은 점탄성 재료를 미분형 구성식으로 나타내었고 Runge-Kutta방법을 이용하여 진동해석과 안정성해석을 수행하였다.

선형 점탄성 구조물의 해석에 지금까지 사용되어 온 해석법으로는 Galerkin방법⁽²⁾, Runge-Kutta방법⁽⁷⁾, 라플라스 변환법(Laplace transform method)⁽⁸⁾, 대응중첩법(the correspondence and superposition principles)⁽⁹⁾, 푸리에 변환법(Fourier transform method)⁽¹⁰⁾, 유한요소법(finite element method, FEM)⁽¹¹⁾, 라플라스 변환 및 유한요소 혼합법(hybrid Laplace transform/finite element method)⁽¹²⁾ 등이 있다.

스펙트럴요소법(spectral element method, SEM)은 구조물을 스펙트럴요소행렬(spectral element matrix)을 이용하여 모델링하고 FFT기법을 사용하여 주파수영역과 시간영역에서의 동적응답을 구하는 해석법이다. 엄밀한 동강성행렬(exact dynamic stiffness matrix)이라고도 부르는 스펙트럴요소행렬은 주파수영역에서 구조동역학 방정식을 만족하는 해를 동적형상함수로 사용하여 유도하는 강성행렬이기 때문에 구조요소의 동적거동을 엄밀하게 나타낸다. 따라서, 균일한 구조요소의 경우 길이에 무관하게 한 개의 유한요소만으로 모델링 할 수 있다. SEM에서 요소분할이 필요한 경우는 형상이나 물성치가 변화하는 경우이며 유한요소의 조합(assembly)은 기존의 FEM에서와 동일한 방법으로 수행된다. SEM은 주파수영역 해석법이기 때문에 점탄성 구조물 같이 물성치가 주파수의 함수로 측정되는 경우의 동역학 해석에 적합하며⁽¹³⁾, FFT(fast Fourier transform)와 IFFT(inverse FFT) 알고리즘을 이용하기 때문에 주파수영역과 시간영역에서의 동적응답을 매우 정확하고 효율적으로 구할 수 있는 장점이 있다. SEM을 축방향 이동물체에 적용한 연구로서는 이동하는 탄성 현의 정확한 고유치를 고찰한 Le-Ngoc와 McCallion⁽¹⁴⁾의 연구가 처음이며, 점탄성 이동보에 관한 적용은 아직 문헌에 발표되지 않았다.

따라서, 본 연구에서는 장력을 받으며 일정한 속도로 이동하는 점탄성 보에 대한 스펙트럴요소 모델을 유도하고 이동속도, 장력 및 점탄성 효과가 이동하는 보의 진동과 안정성에 미치는 영향을 고찰하였다.

2. 운동방정식

3차원 이방성 선형 점탄성재료에 대한 구성식은 다음과 같이 적분형으로 표현할 수 있다⁽¹⁰⁾.

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t R_{ijkl}(t-\tau)\dot{\epsilon}_{kl}(\tau)d\tau = R_{ijkl}(t)*d\epsilon_{kl}(t) \quad (1)$$

여기서 $\sigma_{ij}(t)$ 는 응력텐서, $\epsilon_{ij}(t)$ 는 변형률텐서, $R_{ijkl}(t)$ 는 완화함수(relaxation function)로써 4차 텐서이며 (*)는 $R_{ijkl}(t)$ 와 $d\epsilon_{ij}(t)$ 의 합성적분(convolution), (\cdot) 은 시간 t 에 관한 미분을 나타낸다. 식(1)로부터 1차원 등방성 선형 점탄성재료에 대한 구성식을 다음

과 같이 유도할 수 있다.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t-\tau)\dot{\epsilon}(\tau)d\tau = R(t)*d\epsilon(t) \quad (2)$$

주파수영역에서의 식(2)에 관한 표현은 다음과 같다.

$$\sigma(\omega) = i\omega R(\omega)\epsilon(\omega) \quad (3)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 는 허수부를 나타내며 ω , $\sigma(\omega)$, $\epsilon(\omega)$, $R(\omega)$ 는 각각 주파수, 응력 $\sigma(t)$, 변형률 $\epsilon(t)$ 그리고 완화함수 $R(t)$ 에 관한 푸리에변환이다.

축방향 장력 P 를 받으며 일정속도 c 로 이동하는 길이 L 인 균일한 점탄성 보에 관한 운동방정식과 경계조건은 해밀톤의 원리(Hamilton's principle)로부터 얻을 수 있다⁽¹⁵⁾.

$$\int_t^{t_2} (\delta K - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (4)$$

식(4)에서 운동에너지 K 와 포텐셜에너지 V 는 다음과 같이 주어진다.

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \{c^2 + (\dot{w} + cw')^2\} dx \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L (M w'' + Pw'^2) dx$$

여기서, $w(x,t)$ 는 굽힘변위, ρA 는 단위길이당 질량, M 은 보의 굽힘모멘트이다. 식(5)에서 ($'$)은 공간 좌표 x 에 관한 미분을 나타내며 δW 은 가상일로서 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^L f(x,t)\delta x + M_1\delta\theta_1 + M_2\delta\theta_2 \\ & + Q_1\delta w_1 + Q_2\delta w_2 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $f(x,t)$ 는 분포하중을 나타내며(M_1, Q_1, θ_1)와 (M_2, Q_2, θ_2)는 각각 $x=0$ 과 $x=L$ 에서의 모멘트, 전단력, 기울기를 나타낸다. 기울기는 굽힘변위의 미분으로 다음과 같이 주어진다.

$$\theta_1(t) = w'(0,t), \quad \theta_2(t) = w'(L,t) \quad (7)$$

식(5)와 (6)을 해밀톤의 원리에 대입한 후 부분적분을 수행하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_t^{t_2} \int_0^L [-M'' - \rho A(c^2 w'' + 2cw' + \dot{w}) + Pw'' + f(x,t)]\delta w dx dt \\ & + \int_t^{t_2} \left\{ Q(x,t)\delta w_0^L + Q_1\delta w_1 + Q_2\delta w_2 \right\} dt \\ & + \int_t^{t_2} \left\{ -M(x,t)\delta\theta_0^L + M_1\delta\theta_1 + M_2\delta\theta_2 \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)의 모멘트 $M(x,t)$ 와 전단력 $Q(x,t)$ 은 다음과 같이 정의되었다.

$$M(x,t) = \int_A -\sigma z dA \tag{9}$$

$$Q(x,t) = M' + \rho Ac(\dot{w} + cw') - Pw' \tag{10}$$

식(8)로부터 이동하는 점탄성 보에 관한 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$I\{R(t)*\dot{w}''''\} + \rho A(c^2w'' + 2c\dot{w}' + \ddot{w}) - Pw'' = f(x,t) \tag{10}$$

여기서, 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w(0,t) &= w_1 \text{ or } Q(0,t) = Q \\ \theta(0,t) &= \theta_1 \text{ or } M(0,t) = -M \\ w(L,t) &= w_2 \text{ or } Q(L,t) = -Q_2 \\ \theta(L,t) &= \theta_2 \text{ or } M(L,t) = M_2 \end{aligned} \tag{11}$$

식(2)를 식(9)에 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} M(x,t) &= I(R*\dot{w}''') \\ Q(x,t) &= I(R*\dot{w}''') + \rho Ac(\dot{w} + cw') - Pw' \end{aligned} \tag{12}$$

3. 스펙트럴요소해석

스펙트럴요소를 유도하기 위해 운동방정식의 외력을 소거하고 굽힘변위의 일반해를 DFT(discrete Fourier transform)로 나타내면 다음과 같다.

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x)e^{i\omega_n t} \tag{13}$$

여기서, $\omega_n = 2\pi n/T$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$)은 주파수이며 $W_n(x)$ 은 ω_n 에 대한 파동의 크기를 나타내는 계수이다. N 은 스펙트럴해석에서 계산할 주파수의 개수이며 T 는 시간영역을 나타내며 N 과 다음의 관계를 갖는다.

$$N = 2f_{NYQ}T \tag{14}$$

스펙트럴계수는 $W_{N-n} = W_n^*$ 를 만족하며 DFT 이론에 의해 W_n^* 는 W_n 의 켈레 복소수이다. 시간영역에서의 정밀도는 스펙트럴계수의 개수에 영향을 받는다. 간략한 표기를 위해 식(13)에서 사용된 합산기호와 아래 첨자 n 은 앞으로 생략한다.

식 (13)을 식(10)에 대입한 후 외력을 소거하면

$$i\omega R(\omega)IW'''' - (P - \rho Ac^2)W'' + 2i\omega\rho AcW' - \rho A\omega^2W = 0 \tag{15}$$

식(15)에 대한 일반해의 n 번째 스펙트럴계수에 대해 다음과 같은 형태로 가정할 수 있다.

$$W(x) = C e^{ikx} \tag{16}$$

여기서, k 는 파수(wavenumber)이다. 식(16)을 식(15)에 대입해 분산관계(dispersion relation)을 얻을 수

있다.

$$i\omega R(\omega)Ik^4 + (P - \rho Ac^2)k^2 - 2\rho Ac k - \rho A\omega^2W = 0 \tag{17}$$

식(17)로부터 네 개의 근 k_r ($r=1, 2, 3, 4$)을 구할 수 있으며 이 결과 식(15)의 일반해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$W(x) = \sum_{r=1}^4 C_r e^{ik_r x} \tag{18}$$

Fig. 1과 같이 길이가 l 인 스펙트럴 보요소의 변위에 관한 자유도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_1 &= W(0), \quad \Theta_1 = W'(0) \\ W_2 &= W(l), \quad \Theta_2 = W'(l) \end{aligned} \tag{19}$$

식(18)을 식(19)에 대입해 자유도벡터 $\{d\}$ 와 상수벡터 $\{C\}$ 사이의 관계를 유도할 수 있다.

$$\{d\} = [Y(\omega)]\{C\} \tag{20}$$

여기서

$$\begin{aligned} \{d\} &= \{W_1 \quad \Theta_1 \quad W_2 \quad \Theta_2\}^T \\ \{C\} &= \{C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4\}^T \end{aligned} \tag{21}$$

$$[Y(\omega)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1\varepsilon_1 & e_2\varepsilon_2 & e_3\varepsilon_3 & e_4\varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_r = ik_r, \quad e_r = e^{i k_r l} \quad (r=1, 2, 3, 4) \tag{22}$$

스펙트럴요소에서의 굽힘모멘트와 전단력을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$M(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} M_n(x)e^{i\omega_n t}, \quad Q(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} Q_n(x)e^{i\omega_n t} \tag{23}$$

식(13)을 식(12)에 대입하고 식(23)에 적용하면 스펙트럴계수로 표현된 굽힘모멘트와 전단력을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} M(x) &= i\omega R(\omega)W'' \\ Q(x) &= i\omega R(\omega)W'''' + (\rho Ac^2 - P)W' + i\omega\rho AcW \end{aligned} \tag{24}$$

여기서 합산기호와 아래 첨자 n 은 간략한 표기를 위해 생략한다. 절점에서의 전단력과 굽힘모멘트는 Fig. 1의 부호를 적용하면 다음과 같다.



Fig. 1 Sign convention for the finite viscoelastic beam element

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q(0), \quad M_1 = -M(0) \\ Q_2 &= -Q(l), \quad M_2 = M(l) \end{aligned} \quad (25)$$

식(18)을 식(24)에 대입하고 식(25)를 적용하면 외력벡터 $\{f\}$ 와 상수벡터 $\{C\}$ 사이의 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{f\} = [X(\omega)]\{C\} \quad (26)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{f\} &= \{Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2\}^T \\ [X(\omega)] &= \begin{bmatrix} -g_1 & -g_2 & -g_3 & -g_4 \\ -h_1 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ e_1 g_1 & e_2 g_2 & e_3 g_3 & e_4 g_4 \\ e_1 h_1 & e_2 h_2 & e_3 h_3 & e_4 h_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

$$g_r = i[i\omega R(\omega)k_r^3 - (\rho Ac^2 - P)k_r - \omega \rho Ac] \quad (28)$$

$$h_r = -i\omega R(\omega)k_r^2$$

상수벡터 $\{C\}$ 는 식(20)에서 구할 수 있다. 이를 식(26)에 대입하면 절점에 관한 힘과 변위의 관계를 구할 수 있다.

$$\{f\} = [s(\omega)]\{d\} \quad (29)$$

스펙트럴요소행렬식 $[s(\omega)]$ 는 주파수의 함수로 표현되며 이는 다음과 같다.

$$[s(\omega)] = [X(\omega)][Y(\omega)]^{-1} \quad (30)$$

스펙트럴요소행렬은 유한요소법에서 사용되는 유한요소의 조합과정(assembly)과 같은 방법으로 전체구조물에 대한 스펙트럴요소를 구성할 수 있다. 최종적으로 경계조건을 적용해 구조물의 스펙트럴요소식을 구성하면 다음과 같다.

$$[S(\omega)]\{d_g\} = \{f_g\} \quad (31)$$

여기서 $[S(\omega)]$ 는 보 구조 전체에 대해 조합된 스펙트럴행렬, $\{d_g\}$ 는 조합된 종자유도 벡터, 그리고 $\{f_g\}$ 는 조합된 총외력 벡터이다.

고유진동수 ω_{NAT} 는 스펙트럴행렬의 행렬식(determinant)의 해로부터 얻을 수 있다. 이때 찾을 수 있는 고유진동수의 개수는 무한 개이다.

$$\det[S(\omega_{NAT})] = 0 \quad (32)$$

시간영역에서의 동적응답을 구하는 절차를 요약하면 다음과 같다. 먼저 점탄성 이동보에 작용하는 외력의 스펙트럴계수를 FFT 알고리즘을 이용하여 구한 후 식(31)의 우변에 대입한다. $\{d_g\}$ 를 식(31)로부터 구하여 이를 식(20)에 대입해 상수 벡터 $\{C\}$ 를 구하면 식(18)로부터 변위에 대한 스펙트럴계수를 구할 수 있다. 최종적으로, 식(13)의 DFT 이론에 근거하여 IFFT 알고리즘을 이용하면 시간영역에서의 진동응답을 구할 수 있다. 점탄성 재

료의 푸리에변환 된 완화함수 $R(\omega)$ 에 어떠한 가정이나 제약을 두지 않았으므로 식(30)의 스펙트럴요소행렬은 임의의 점탄성 이동보에 적용할 수 있다.

4. 수치예제와 검토

4.1 수치예제

이동하는 점탄성 보요소의 수치예제로 참고문헌(7)에서 사용된 물성치를 사용하였다. 양 끝단은 단순지지 되어 있고 축방향 장력은 $P = 2500 N/m$ 이다. 또한 보의 길이, 두께, 폭은 각각 $L = 1m, b = 0.2m, h = 0.0015m$ 이고 단위 부피당 질량은 $\rho = 7800 kg/m^3$ 이다. 보요소의 점탄성은 Fig. 2에 보인 Kelvin-Voigt 모델로 구성하였다. 위 모델의 응력과 변형률은 다음과 같다.

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (33)$$

점탄성 재료에 관한 완화함수는 식(33)으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다⁽⁸⁾.

$$i\omega R(\omega) = E + i\omega\eta \quad (34)$$

수치해석을 위한 탄성계수 $E = 2 \times 10^{11} N/m^2$ 를 사용하였다.

본 연구에서 유도된 스펙트럴요소모델의 신뢰성을 검증하기 위해 SEM 결과를 엄밀해와⁽¹⁶⁾ FEM으로 구한 결과와 비교하였다. 유한요소해석을 위해 다음과 같은 시스템 방정식을 유도하여 사용하였다.

$$[M]\{\ddot{d}\} + \{[C_g] + [C_v]\}\{\dot{d}\} + [K]\{d\} = \{f\} \quad (35)$$

여기서, $\{d\}$ 는 식(20)에서 정의된 절점변위벡터이며 $\{f\}$ 는 절점힘벡터이다. 또한 $[M]$ 은 질량행렬, $[C_g]$ 는 반대칭(skew-symmetric)인 자이로스코픽(gyroscopic)행렬, $[C_v]$ 는 점탄성 감쇠행렬, $[K]$ 는 강성행렬이며, 부록 A에 수록하였다. 길이 l 인 유한요소해석을 위한 유한요소모델을 유도하기 위하여 보 요소 내의 변위장(displacement fields)을 다음과 같이 가정하였다.

$$w(x, t) = [N_w(x)]\{d(t)\} \quad (36)$$

$[N_w]$ 은 형상함수 행렬로서 다음과 같다.

$$[N_w(x)] = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \xi(\xi - 1)^2 l, 3\xi^2 - 2\xi^3, \xi(\xi^2 - \xi)l] \quad (37)$$

여기서

$$\xi = 2\left(\frac{x}{l}\right) - 1 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (38)$$

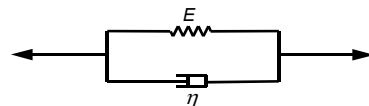


Fig. 2 Kelvin-Voigt model of the viscoelastic beam material

4.2 수치결과와 검토

Table 1은 장력이 없는 움직이지 않는 보(즉, $c=0$ m/s , $P=0$ N)에 대해 SEM과 엄밀해⁽¹⁶⁾ 그리고 FEM으로 구한 고유치(eigenvalues)를 보이고 있다. 유한요소해석에서는 유한요소의 개수를 10개 20개 50개로 점차 증가시키면서 고유치를 계산하였다. 유한요소해석에서 구한 고유치가 유한요소의 개수를 증가시킬수록 단 하나의 유한요소를 이용하여 SEM으로 구한 고유치의 값으로 점차 수렴해 가지만 5번째 고유치가 같아지기 위해서 유한요소해석에서는 50개의 유한요소가 필요하다. 고주파모드의 경우 정확한 고유치를 구하기 위해서는 더 많은 요소분할이 요구된다. 또한 Table 1은 점탄성 효과에 따른 고유치의 변화를 볼 수 있다. 점탄성 효과가 없을 때(즉, $\eta=0$) 모든 고유치는 순허수의 값을 갖지만 점탄성 효과가 있을 때의 고유치는 음의 실수부를 갖는 복소수 값이 된다. 고유치의 허수부는 점탄성 효과가 없을 때 보다 조금 작은 값을 가지며, 음의 실수부는 시스템의 안정된 동

Fig. 3은 점탄성 효과가 없을 때 $\eta=0$ 일때와 $\eta=6.8 \times 10^{-4}E$ 의 점탄성 효과가 있는 두 경우에 대해 이동속도의 변화에 따른 세 개의 고유치(즉, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)의 크기를 보여준다. 이때 사용한 강성값은 두가지 경우 대해 $E=2 \times 10^{11}$ N/m^2 를 사용하였다. 일반적으로 이동속도가 증가함에 따라 고유치의 허수부는 작아진다. 이는 시스템의 고유진동수가 작아짐을 의미한다. 속도가 증가하여 첫번째 임계속도인 33.04 m/s 에서 정적 불안정한 다이버전스(divergence)가 발생한다. 또한 허수부가 존재하고 실수부가 영보다 큰 경우 동적 불안정 현상인 플러터(flutter)가 발생한다.

5. 결론

본 연구에서는 장력을 받으며 축방향으로 이동하는 점탄성 보요소의 스펙트럴요소모델을 유도하였다. 점탄성재료는 선형 등방성재료로 가정하였고

Table 1 Comparison of the lowest three eigenvalues obtained by the present SEM, the FEM and the exact theory

η	Method	NE	λ_1	λ_2	λ_3
0	Theory ⁽¹⁶⁾		3.444 i	30.998 i	85.500 i
	SEM	1	3.444 i	30.998 i	85.500 i
	FEM	10	3.444 i	31.014 i	85.562 i
		20	3.444 i	30.999 i	85.504 i
$6.8 \times 10^{-4}E$	SEM	1	-0.025+3.444 i	-2.052+30.930 i	-6.486+85.254 i
		10	-0.025+3.444 i	-2.055+30.946 i	-6.508+85.314 i
	FEM	20	-0.025+3.444 i	-2.052+30.931 i	-6.488+85.258 i
		50	-0.025+3.444 i	-2.052+30.930 i	-6.486+85.254 i

Note : NE = number of finite elements

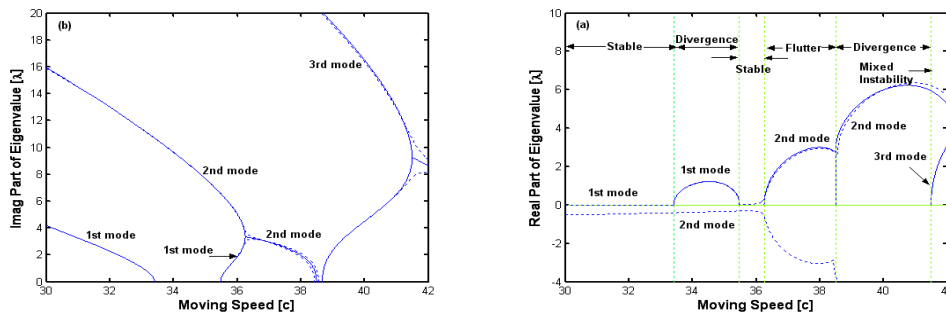


Fig. 3 The moving speed dependence of the lowest three eigenvalues when $E=2 \times 10^{11}$ N/m^2 and $P=2500$ N/m : — for $\eta=0$ and for $\eta=6.8 \times 10^{-4}E$

적분형 구성식을 사용하여 스펙트럴요소를 일반화된 형태로 유도하였다. 유도된 스펙트럴요소모델의 정확성을 검증하기 위해 엄밀한 이론해 및 유한요소해석 결과와 비교 검토하였다. 수치예제에서는 점탄성재료를 Kelvin 모델로 가정하였다. 수치해석을 통하여 점탄성 효과가 진동과 안정성에 미치는 영향을 고찰하였다.

후기

이 논문은 2003년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

(1) Wickert, J. A. and Mote, C. D., 1988, "Current Research on the Vibration and Stability of Axially Moving Materials," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 20, pp. 3-13.

(2) Fung, R. F., Huang, J. S. and Chen, Y. C., 1997, "The Transient Amplitude of the Viscoelastic Traveling String: An Integral Constitutive Law," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 201, No. 1, pp. 153-167.

(3) Fung, R. F., Huang, J. S., Chen, Y. C. and Yao, C. M., 1998, "Nonlinear Dynamic Analysis of the Viscoelastic String with a Harmonically Varying Transport Speed," *Computers & Structures*, Vol. 66, No. 6, pp. 777-784.

(4) (Zhang, L. and Zu, J. W., "Non-linear Vibrations of Viscoelastic Moving Belts, Part I and II," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 216, No. 1, 1998, pp. 75-105.

(5) Zhang, L. and Zu, J. W., 1999, "Non-linear Vibrations of Parametrically Excited Viscoelastic Moving Belts, Part I and II," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66, No. 2, pp. 396-409.

(6) Hou, Z. and Zu, J. W., 2002, "Non-linear Free Oscillations of Moving Viscoelastic Belts," *Mechanism and Machines Theory*, Vol. 37, pp. 925-940.

(7) Marynowski, K. and Kapitaniak, T., 2002, "Kelvin-Voigt versus Burgers Internal Damping in Modeling of Axially Moving Viscoelastic Web," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 37, pp. 1147-1161.

(8) Flügge, W., 1975, *Viscoelasticity*, end ed., Springer, Berlin.

(9) Findley, W. N., Lai, L. S. and Onarna, K., 1976, *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*, New York, North Holland.

(10) Christensen, R. M., *Theory of Viscoelasticity*, New York, Academic Press, 1982.

(11) White, L., 1986, "Finite Element in Linear Viscoelasticity," *Proc. Second Conference on Matrix Method in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-68-150, pp. 489-516.

(12) Chen, T. M., 1995, "The Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method Applied to Quasi-static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko

Beams," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 38, pp. 509-522.

(13) Dalenbring, M., 2003, "Validation of Estimated Isotropic Viscoelastic Material Properties and Vibration Response Prediction," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 265, pp. 269-287.

(14) Le-Ngoc, L. and McCallion, H., 1999, "Dynamic Stiffness of An Axially Moving String," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 220, No. 4, pp.749-756.

(15) Abolghasemi, M. and Jalali, M. A., 2003, "Attractors of a rotating viscoelastic beam," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 38, pp.739-751

(16) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company, New York.

(17) Petyt, M., 1990, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press, New York.

부록 A

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}] &= \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ \text{symm} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{K}] &= \frac{EI}{30l^3} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ \text{symm} & & & K_{44} \end{bmatrix} \quad (A1) \\
 [\mathbf{C}_G] &= \frac{\rho A c}{30} \begin{bmatrix} 0 & 6l & 30 & -6l \\ -6l & 0 & 6l & -l^2 \\ -30 & -6l & 0 & 6l \\ 6l & l^2 & -6l & 0 \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{C}_V] &= \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 12\eta l & 6\eta l & -12\eta l & 6\eta l \\ & 4\eta l^2 & -6\eta l & 2\eta l^2 \\ & & 12\eta l & -6\eta l \\ \text{symm} & & & 4\eta l^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= -K_{13} = K_{33} = 360 + 36r - 36s \\
 K_{12} &= K_{14} = -K_{34} = 180l + 3rl - 3sl \\
 K_{24} &= 60l^2 - rl^2 + sl^2 \\
 K_{22} &= K_{44} = 120l^2 + 4rl^2 - 4sl^2 \quad (A2) \\
 r &= \frac{Pl^2}{EI}, \quad s = \frac{\rho A c^2 l^2}{EI}
 \end{aligned}$$