

선형 이산계의 동적응답을 위한 스펙트럴해석법

김 성 환* · 이 우 식†

Spectral Analysis Method for the Dynamic Response of Linear Discrete Systems

Sunghwan Kim and Usik Lee

Key Words : Spectral Analysis Method(스펙트럴해석법), Fast Fourier Transform(고속푸리에 변환), Dynamic Response(동적응답), Linear Discrete System(선형 이산계)

Abstract

This paper introduces a fast Fourier transform (FFT)-based spectral analysis method for the transient responses as well as the steady-state responses of linear discrete systems. The force vibration of a viscously damped three-DOF system is considered as the illustrative numerical example. The proposed spectral analysis method is evaluated by comparing with the exact analytical solutions as well as with the numerical solutions obtained by the Runge-Kutta method.

1. 서 론

일반적으로 시스템의 동역학적 거동은 연립2차 선형 상미분방정식으로 표현할 수 있으며 그러한 동역학계를 선형 이산계(linear discrete system)라고 한다. 분포계(distributed system)의 경우에는 공간 이산화(spatial discretization)과정을 통하여 이산계(discrete system)모델로 근사화 할 수 있다. 선형 이산계의 동적응답을 구하는 방법으로서는 해석적인 방법과 수치해석 방법이 그동안 많이 개발되어 왔다. 특히, 지난 30여년간 컴퓨터 기술의 비약적인 발전에 따라 정확도가 높은 근사해를 구하기 위한 방법으로서는 컴퓨터를 기반으로 하는 다양한 수치해석 기법들이 개발되었다. 대표적인 방법에는 직접적분법(direct integration method), 모드해석법(modal analysis method), 이산시간시스템방법(discrete-time system method), 그리고 FFT(fast Fourier transform)를 활용하는 스펙트럴해석법(spectral analysis method: SAM)등이 있다. 앞의 세 가지 방법은 시간영역방법(time-domain method)에 속하며^(1,2), 스펙트럴해석법은 주파수영역방법(frequency-domain method)에 속한다⁽³⁻⁵⁾.

FFT를 활용하는 스펙트럴해석법에서는 DFT(discrete Fourier transform)를 사용하여 종속변수를 시간영역에서 주파수영역으로 변환시킴으로써 주어진 상미분방정식을 주파수를 매개변수로 하는 대수방정식으로 변환시키고, 이와 같이 유도된 대수방정식을 풀어서 각각의 이산주파수에서의 푸리에계수(Fourier coefficient)를 구한 후, IDFT(inverse discrete Fourier transform)를 사용하여 시간영역에서의 응답을 계산한다. 실제 계산에서는 DFT 또는 IDFT를 연산하는데 FFT가 사용된다. FFT는 매우 효율적인 컴퓨터 알고리즘이기 때문에 컴퓨터 연산시간을 단축시켜줄 뿐만 아니라 해의 정확도도 높여준다^(3,6).

FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 (1) 가진력이 너무 복잡하여 수치적분법을 사용하고자 할 때, (2) 실험 측정시 아날로그-디지털변환기를 사용하여 디지털 형태로 데이터를 저장하는 실험계측장비를 사용할 때, (3) 재료의 구성방정식(constitutive equation)이 시간영역 보다는 주파수영역에서 측정하기에 더 적합할 때, (4) 주파수에 종속적인 스펙트럴요소(spectral element)모델을 구조해석에 적용할 때 매우 유용하다.

기존의 문헌에서 보면⁽³⁻⁵⁾, FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 정상상태응답(steady-state response)뿐만 아니라, 초기조건이 0인 경우 가진력에 의한 과도응답(transient response)을 구하는 방법도 잘 개발되어 있다. 그러나 초기조건이 0이 아닌 경우에 대하여 과도응답을 구하는 방법은 아직까지 소

* 인하대학교 대학원 기계공학과

† 책임저자, 회원, 인하대학교 기계공학과

E-mail : ulee@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434

개되지 않고 있는 것으로 판단된다.

따라서, 본 연구의 목적은 초기조건이 0이 아닌 경우 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법을 이용하여 과도응답을 구하는 방법을 개발하는 것이다. 본 연구에서 제안한 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법을 검증하기 위해서, 수치 예제로 점성감쇠가 있는 3자유도 강제진동계의 응답을 구하였다.

2. DFT 이론

주기가 T 인 주기함수 $x(t)$ 는 다음과 같은 형태의 푸리에급수(Fourier series)로 나타낼 수 있다.

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \tag{1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\omega_n t}$$

여기서, $\omega_n = n (2\pi/T) = n\omega_l$ 이고, X_n 은 푸리에계수로서 다음의 적분식으로 구할 수 있다.

$$X_n = a_n - ib_n \tag{2}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

식 (1)과 식 (2)를 주기가 T 인 연속함수의 FT 쌍(Fourier transform pair)이라고 한다.

연속함수 $x(t)$ 를 시간영역에서 이산화하면 $\{x(t_r)\}$ 의 형태로 얻을 수 있다. 만약 N 개의 수로 이산화를 한다면 시간영역은 등간격 $\Delta = T/N$ 으로 나눌 수 있고, $x_r = x(t_r)$ 로 나타낼 수 있다. 여기서 $t_r = r\Delta$ ($r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$)이다. 그러면 식(2)의 푸리에계수는 다음과 같은 수치적분식으로 나타낼 수 있다.

$$X_n = \sum_{r=0}^{N-1} x(t_r) e^{-i\omega_n t_r} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)) \tag{3}$$

식 (3)을 DFT라고 하며, $x(t_r)$ 은 다음과 같은 역함수(inverse formula)로 구할 수 있다.

$$x(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{i\omega_n t_r} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)) \tag{4}$$

식 (4)를 IDFT라고 하며 식 (3)과 식 (4)를 DFT 쌍(discrete Fourier transform pair)이라고 한다. 식 (3)은 식 (2)에서 근사화 되었지만, IDFT을 통하여 시간영역에서의 이산화된 함수값으로 정확히 변환된다^(5,6). 식 (4)에서 X_n 은 $X_{N-n} = X_n^*$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N/2$)와 같이 배열된다. 여기서, X_n^* 는 X_n 의 공액복소수(complex conjugate)를 나타내며 $X_{N/2}$ 는 가장 높은 주파수인 나이퀴스트주파수(Nyquist frequency) $\omega_{N/2} = (N/2)\omega_l$ 에 해당하는 성분이다.

FFT는 DFT 또는 IDFT의 연산시간을 $N / \log_2 N$

으로 줄여주는 매우 효율적인 컴퓨터 알고리즘이다. FFT를 활용하는 스펙트럴해석법에서 비록 컴퓨터가 사용되지만 식 (3)과 식 (4)와 같이 해석적 표현을 그대로 사용하기 때문에 수치해석법의 하나가 아님을 주지할 필요가 있다. DFT와 FFT에 관한 더 자세한 내용은 문헌[6]에서 찾아볼 수 있다.

3. 스펙트럴해석법

FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 먼저 다자유도 동역학계를 위하여 개발될 것이다. 다자유도 동역학계의 전형적인 예로서, 점성감쇠가 있는 선형 동역학계의 운동방정식을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f(t)\} \tag{5}$$

식 (5)의 초기조건은 아래와 같다.

$$\{u(0)\} = \{u_0\}, \quad \{\dot{u}(0)\} = \{\dot{u}_0\} \tag{6}$$

여기서, $\{u(t)\}$ 는 절점자유도 벡터이고 $\{f(t)\}$ 는 절점에 작용하는 외력 벡터이다. $[M]$ 은 질량행렬, $[C]$ 는 감쇠행렬, $[K]$ 는 강성행렬이다. 식 (5)의 일반해는 다음과 같이 정상상태응답 부분인 $\{u_p(t)\}$ 와 과도응답 부분인 $\{u_h(t)\}$ 의 합으로 구할 수 있다.

$$\{u(t)\} = \{u_p(t)\} + \{u_h(t)\} \tag{7}$$

4. 정상상태응답

외력벡터 $\{f(t)\}$ 와 정상상태응답 $\{u_p(t)\}$ 를 DFT를 사용하여 스펙트럴 형태(spectral form)로 나타내면 다음과 같다.

$$\{f(t_r)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{F_n\} e^{i\omega_n t_r} \tag{8}$$

$$\{u_p(t_r)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{P_n\} e^{i\omega_n t_r}$$

식 (8)을 식 (5)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\{P_n\} = \left[[K] + i\omega[C] - \omega^2[M] \right]^{-1} \{F_n\} \tag{9}$$

$$\equiv [D(\omega_n)]^{-1} \{F_n\}$$

$$\{P_{N-n}\} = \{P_n^*\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N/2)$$

여기서 $[D(\omega)]$ 는 동적강성행렬(dynamic stiffness matrix)을 나타낸다.

식 (8b)를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\dot{\mathbf{u}}_p(t_r)\} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (i\omega_n) \{\mathbf{P}_n\} e^{i\omega_n t_r} \\ &\equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{\mathbf{P}}_n\} e^{i\omega_n t_r} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $\{\bar{\mathbf{P}}_{N-n}\} = \{\bar{\mathbf{P}}_n^*\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N/2$) 이다.

우선 식 (9)에서 푸리에계수 $\{\mathbf{P}_n\}$ 을 구한 후, 시간영역에서의 정상상태응답은 IFFT(inverse fast Fourier transform)을 사용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\mathbf{u}_p(t)\} \Leftarrow \text{IFFT}\{\mathbf{P}_n\} \quad (11)$$

5. 과도응답

다음과 같이 외력이 없는 경우의 운동방정식을 고려해 보자.

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}_h\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}_h\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}_h\} = \{\mathbf{0}\} \quad (12)$$

여기서 $\{\mathbf{u}_h(t)\}$ 는 과도응답 부분이다. 식 (12)의 해 $\{\mathbf{u}_h(t)\}$ 를 다음과 같은 형태로 가정할 수 있다.

$$\{\mathbf{u}_h(t)\} = [\Phi]\{\mathbf{x}_h(t)\} \quad (13)$$

여기서, $[\Phi]$ 는 모드행렬이며 다음과 같은 직교성을 만족한다.

$$[\Phi]^T [\mathbf{M}][\Phi] = [\mathbf{I}], \quad [\Phi]^T [\mathbf{K}][\Phi] = [\Omega^2] \quad (14)$$

식 (14)에서 $[\mathbf{I}]$ 는 단위행렬이고, $[\Omega^2]$ 는 대각선행렬이며 다음과 같이 정의된다.

$$[\Omega^2] = \text{diag}[\Omega_1^2 \quad \Omega_2^2 \quad \dots \quad \Omega_m^2] \quad (15)$$

여기서 $\Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_m$ 는 고유진동수이다.

식 (13)을 식 (12)에 대입한 후 식 (14)를 적용하면 다음과 같은 비연계(decoupled)된 모드방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{x}_{hk} + 2\zeta_k \Omega_k \dot{x}_{hk} + \Omega_k^2 x_{hk} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

여기서 ζ_k 는 k 번째 모드감쇠비이다. 식 (16)의 특성방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta_k(\lambda) &= \lambda^2 + 2\zeta_k \Omega_k \lambda + \Omega_k^2 \\ &= (\lambda - \lambda_{k1})(\lambda - \lambda_{k2}) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 λ_{k1} 과 λ_{k2} 는 공액복소수(즉, $\lambda_{k2} = \lambda_{k1}^*$)이다. 모드좌표상의 과도응답 $x_{hk}(t)$ 와 $\dot{x}_{hk}(t)$ 를 시간으로 미분한 $\dot{x}_{hk}(t)$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x_{hk}(t) &= a_k e^{\lambda_{k1}t} + a_k^* e^{\lambda_{k1}^*t} \\ \dot{x}_{hk}(t) &= a_k \lambda_{k1} e^{\lambda_{k1}t} + a_k^* \lambda_{k1}^* e^{\lambda_{k1}^*t} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

여기서, 상수 a_k 와 a_k^* 는 초기조건을 만족하도록 결정해야 한다.

$x_{hk}(t)$ 와 $\dot{x}_{hk}(t)$ 을 스펙트럴 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{hk}(t_r) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_{kn} e^{i\omega_n t_r} \\ \dot{x}_{hk}(t_r) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{H}_{kn} e^{i\omega_n t_r} \end{aligned} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)) \quad (19)$$

식 (3)을 사용하면 푸리에계수 H_{kn} 과 \bar{H}_{kn} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H_{kn} &= \sum_{r=0}^{N-1} x_{hk}(t_r) e^{-i\omega_n t_r} = a_k X_{kn} + a_k^* Y_{kn} \\ \bar{H}_{kn} &= \sum_{r=0}^{N-1} \dot{x}_{hk}(t_r) e^{-i\omega_n t_r} = a_k \lambda_{k1} X_{kn} + a_k^* \lambda_{k1}^* Y_{kn} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned} X_{kn} &= \frac{1 - e^{\alpha_{kn}N}}{1 - e^{\alpha_{kn}}}, \quad (\alpha_{kn} = (\lambda_{k1} - i\omega_n)\Delta) \\ Y_{kn} &= \frac{1 - e^{\beta_{kn}N}}{1 - e^{\beta_{kn}}}, \quad (\beta_{kn} = (\lambda_{k1}^* - i\omega_n)\Delta) \end{aligned} \quad (21)$$

이고, $H_{k(N-n)} = H_{kn}^*$, $\bar{H}_{k(N-n)} = \bar{H}_{kn}^*$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N/2$) 이다.

식 (19)에서 구한 $x_{hk}(t)$ 와 $\dot{x}_{hk}(t)$ 을 각각 모아서 벡터형식으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_h(t_r)\} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{\mathbf{H}_n\} e^{i\omega_n t_r} \\ \{\dot{\mathbf{x}}_h(t_r)\} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{\mathbf{H}}_n\} e^{i\omega_n t_r} \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_h\} &= \{x_{h1} \quad x_{h2} \quad \dots \quad x_{hm}\}^T \\ \{\dot{\mathbf{x}}_h\} &= \{\dot{x}_{h1} \quad \dot{x}_{h2} \quad \dots \quad \dot{x}_{hm}\}^T \\ \{\mathbf{H}_n\} &= \{H_{1n} \quad H_{2n} \quad \dots \quad H_{mn}\}^T \\ \{\bar{\mathbf{H}}_n\} &= \{\bar{H}_{1n} \quad \bar{H}_{2n} \quad \dots \quad \bar{H}_{mn}\}^T \end{aligned} \quad (23)$$

$$\quad (24)$$

식 (22)를 식 (13)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_h(t_r)\} &= \frac{1}{N} [\Phi] \sum_{n=0}^{N-1} \{\mathbf{H}_n\} e^{i\omega_n t_r} \\ \{\dot{\mathbf{u}}_h(t_r)\} &= \frac{1}{N} [\Phi] \sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{\mathbf{H}}_n\} e^{i\omega_n t_r} \end{aligned} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)) \quad (25)$$

식 (7)을 식 (6)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{u_0\} &= \{u_p(0)\} + \{u_h(0)\} \\ \{\dot{u}_0\} &= \{\dot{u}_p(0)\} + \{\dot{u}_h(0)\} \end{aligned} \quad (26)$$

식 (8)과 식 (25a)를 식 (26a)에 대입하고, 식 (10)과 식 (25b)를 식 (26b)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{u_0\} &= \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \{P_n\} + [\Phi] \sum_{n=0}^{N-1} \{H_n\} \right) \\ \{\dot{u}_0\} &= \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{P}_n\} + [\Phi] \sum_{n=0}^{N-1} \{\bar{H}_n\} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

식 (20)을 이용하면 식 (24)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \{H_n\} &= [X_n]\{a\} + [Y_n]\{a^*\} \\ \{\bar{H}_n\} &= [A_1][X_n]\{a\} + [A_1^*][Y_n]\{a^*\} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{a\} &= \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m\}^T \\ \{a^*\} &= \{a_1^* \ a_2^* \ \dots \ a_m^*\}^T \end{aligned} \quad (29)$$

$$[X_n] = \text{diag}[X_{1n} \ X_{2n} \ \dots \ X_{mn}] \quad (30)$$

$$[Y_n] = \text{diag}[Y_{1n} \ Y_{2n} \ \dots \ Y_{mn}]$$

$$[A_1] = \text{diag}[\lambda_{11} \ \lambda_{21} \ \dots \ \lambda_{m1}] \quad (31)$$

$$[A_1^*] = \text{diag}[\lambda_{11}^* \ \lambda_{21}^* \ \dots \ \lambda_{m1}^*]$$

식(28)을 식(27)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [\bar{X}]\{a\} + [\bar{Y}]\{a^*\} &= \{d\} \\ [A_1][\bar{X}]\{a\} + [A_1^*][\bar{Y}]\{a^*\} &= \{v\} \end{aligned} \quad (32)$$

여기서,

$$[\bar{X}] = \sum_{n=0}^{N-1} [X_n], \quad [\bar{Y}] = \sum_{n=0}^{N-1} [Y_n] \quad (33)$$

$$\{d\} = [\Phi]^T [M] \left(N\{u_0\} - \sum_{n=0}^{N-1} \{P_n\} \right) \quad (34)$$

$$\{v\} = [\Phi]^T [M] \left(N\{\dot{u}_0\} - \sum_{n=0}^{N-1} (i\omega_n)\{P_n\} \right)$$

식 (14)의 직교성을 이용하여 $[\Phi]^{-1} = [\Phi]^T [M]$ 를 식 (34)에 적용하였다. 식 (32)를 상수벡터 $\{a\}$ 또는 $\{a^*\}$ 에 관하여 연립하여 풀면 $\{a\}$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{a\} = \frac{i}{2} [R] \left([A_1^*]\{d\} - \{v\} \right) \quad (35)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [R] &= \text{diag}[R_1 \ R_2 \ \dots \ R_m] \\ R_k &= \frac{1}{\text{Im}(\lambda_{k1}) \sum_{n=0}^{N-1} X_{kn}} \quad (k=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (36)$$

우선 식 (35)에서 초기조건을 이용하여 $\{a\}$ 또는 $\{a^*\}$ 를 구한 후, 식 (28)을 이용하여 $\{H_n\}$ 을 구한다. 그리고 나서 다음과 같이 IFFT를 사용하여 $\{x_h(t)\}$ 를 구한다.

$$\{x_h(t)\} \leftarrow \text{IFFT}\{H_n\} \quad (37)$$

시간영역에서의 과도응답 $\{u_h(t)\}$ 는 식 (37)을 식 (13)에 대입하여 얻을 수 있다. 마지막으로 시스템의 초기조건을 고려한 동적응답은 식 (7)과 같이 정상상태응답 $\{u_p(t)\}$ 와 과도응답 $\{u_h(t)\}$ 의 합으로 구할 수 있다.

6. 수치예제

본 연구에서 제안한 FFT를 활용하는 스펙트럴 해석법을 검증하기 위해 다음과 같은 3 자유도의 강제진동계를 예제로 들었다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -2c & 0 \\ -2c & 3c & -c \\ 0 & -c & 3c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

식 (38)에서 $m = 10 \text{ kg}$, $c = 40 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$, $k = 1000 \text{ N}/\text{m}$ 이고, $f(t) = 4[1-s(t-1.2)] \text{ N}$ 이며, $s(t)$ 는 단위계단함수이다. 시스템의 초기변위와 초기속도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{u_1, u_2, u_3\} &= \{1, 0, 0\} \text{ (mm)} \\ \{\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3\} &= \{0, 1, 0\} \text{ (mm/s)} \end{aligned} \quad (39)$$

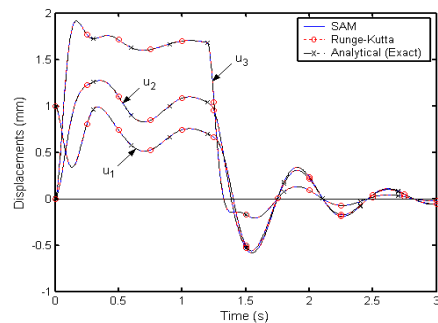
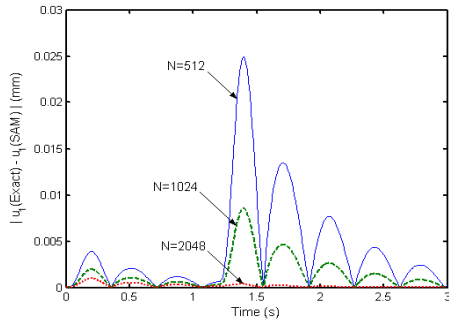
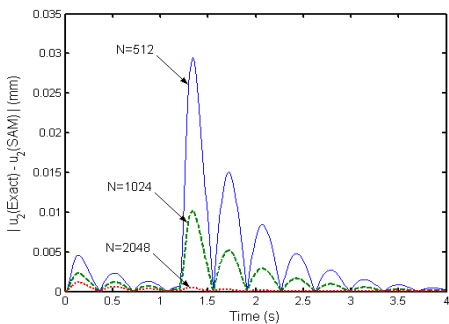


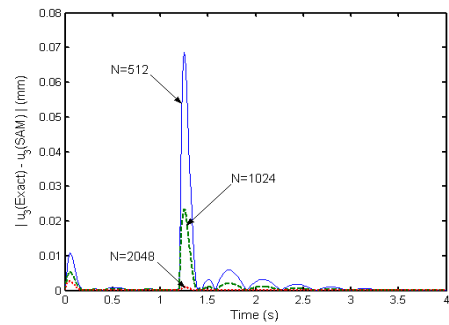
Fig. 1 Comparison of the time histories $u_1(t)$, $u_2(t)$ and $u_3(t)$ obtained by different solution methods



(a) Time history $u_1(t)$



(b) Time history $u_2(t)$



(c) Time history $u_3(t)$

Fig. 2 Convergence of the time histories as the number of samples N is increased

강제진동계의 동적응답 $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ 를 스펙트럴해석법, Runge-Kutta법과 해석적 방법(analytical method)으로 구하여 Fig. 1에서 비교하였다. 시간영역에서의 평균오차가 0.05% 이내의 정확도를 가진 해를 얻기 위하여, 스펙트럴해석법에는 DFT의 주기가 $T = 5$ 초, 샘플 개수(sampling number)는 $N = 2048$ 개를 사용하였으며, Runge-Kutta법에서의 시간간격은 0.0001초를 사용하였다. Fig. 1은 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법으로 구한 결과가 엄밀해(exact analytical solution)와 거의 같음을 보여주고 있다. Fig. 2는 샘플 개수(sampling number) N 을 증가시킬수록 스펙트럴해석법으로 구한 결과가 엄밀해에 수렴하는 것을 보여주고 있다. Fig. 1과 Fig. 2는 샘플 개수 N 을 2048개까지 증가시키면 스펙트럴해석법으로 구한 결과가 엄밀해에 충분히 수렴함을 보여주고 있다.

Table 1은 스펙트럴해석법과 Runge-Kutta법의 컴퓨터 연산시간과 시간평균오차를 비교하여 보여주고 있다. Table 1에서 보면 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법의 연산시간이 Runge-Kutta법의 연산시간보다 적게 걸리는 것을 알 수 있다.

7. 결론

본 연구에서는 초기조건이 0이 아닌 선형 이산계의 동적응답을 FFT를 활용하는 스펙트럴해석법을 사용하여 구하는 방법을 소개하였다. 본 연구에서 제안한 스펙트럴해석법은 점성감쇠가 없는 이산계 또는 스펙트럴요소모델로 표현된 분포계까지 적용할 수 있다. FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 점성감쇠가 있는 3자유도 강제진동계를 예제로 하여 검증하였다. FFT를 활용하는 스펙트럴해석법은 Runge-Kutta법으로 구한 해 뿐만 아니라 엄밀해와 비교해 볼 때 매우 높은 정확도를 보여주었다. 또한 같은 정도의 정확도를 갖는 해를 얻기 위한 연산시간이 Runge-Kutta법보다 적게 걸림을 확인하였다.

Table 1 Comparison of CPU times and time averaged errors

| Method | SAM (Present) | | | Runge-Kutta Method | | |
|-------------------------|---------------|--------|--------|----------------------|----------------------|-------|
| | N=512 | N=1024 | N=2048 | $\Delta t=0.0005(s)$ | $\Delta t=0.0001(s)$ | |
| CPU Time (seconds) | 0.182 | 0.323 | 0.792 | 0.984 | 3.428 | |
| Time Averaged Error (%) | $u_1(t)$ | 1.056 | 0.384 | 0.048 | 0.426 | 0.013 |
| | $u_2(t)$ | 0.922 | 0.335 | 0.042 | 0.371 | 0.010 |
| | $u_3(t)$ | 0.513 | 0.186 | 0.023 | 0.205 | 0.006 |

후 기

이 논문은 2003년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Newland, D. E., 1989, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, John Wiley & Sons, New York.
- (2) Meirovitch, L., 1980, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noodhoff, The Netherlands.
- (3) Doyle, J. F., 1997, *Wave Propagation in Structures, Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*, 2nd ed., Springer, New York.
- (4) Lee, U., Kim, J. and Leung, A.Y. T., 2000, "The Spectral Element Method in Structural Dynamics," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 6, pp. 451~465.
- (5) Ginsberg, J. H., 2001, *Mechanical and Structural Vibrations, Theory and Applications*, John Wiley & Sons, New York.
- (6) Newland, D. E., 1993, *Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, 3rd ed., Longman, New York.