

SPH에 가상일 원리를 적용한 탄성 접촉 알고리즘

서송원* · 민옥기†

An elastic contact algorithm in SPH by virtual work principle

Seo Songwon, Min Oakkey

Key Words: Virtual work principle(가상일의 원리), Contact algorithm(접촉 알고리즘), Penalty method(벌칙 기법), Reproducing condition(재현 조건)

Abstract

There is few research about contact problem in SPH because it is primarily suitable to analyze the large deformation problem. However, an elasto-plastic problem with small deformation need to be considered about contact characteristics. The numerical formulating methods for SPH is induced to be able to obtain solutions based on a variational method in contact problem. The contact algorithm presented is applied to the elastic impact problem in 1D and 2D. The results show that an imaginary tension and a numerical instability which happen in impacting between different materials can be removed and contact forces which could not have been calculated are able to obtain.

1. 서 론

SPH는 주로 대변형 문제를 해석하기 적합하여 초고속 충돌 등에 적용되어 왔고, 이 경우 충돌 면에서의 접촉 특성은 해석 결과에 거의 영향을 미치지 않으므로 무시되어 왔다. 그러나, 변형이 적은 탄소성 변형과 같은 경우에는 접촉 특성이 상당한 영향을 미치게 된다. 특히 핵함수를 통해 입자의 정보를 얻는 SPH의 특성으로 인해 밀도 차이가 많이 발생하는 이종 재료간의 충돌 해석에서 수치 불안정의 문제나 두 충돌체 간의 접촉과 상관없이 유화 길이 내에 들어오는 경우 무조건 참조함으로써 생기는 가상 응력과 수치 불안정 문제 및 충돌 후 충돌면이 분리되지 않고 가상의 인장을 발생시키는 문제 등이 여전히 남아 있다.

이를 해결하기 위해서 서로 다른 충돌체 간의

관계를 핵함수를 이용하지 않고 접촉력이나 속도 보정 등을 통해서 해결하려는 시도가 있어 왔다.

Campbell[4,5]은 Belytschko[6]가 제시한 pinball 알고리즘의 개념을 이용하여 충돌 후 입자끼리의 상호 침투 여부를 판별하고 침투 속도를 통해 접촉력의 적용여부를 판별하였다. 그러나, 이 논문에서는 초고속(2km/s)에 대해서 수행한 결과만을 보여주었다.

Parshikov[8]는 각각의 입자들이 유체 입자처럼 독립적으로 상호 접촉한다고 보고, Riemann 문제 해의 음향학적 근사법을 이용해 수직으로 작용하는 속도와 압력값을 구하였다. 이 값을 SPH 지배 방정식과 구성 방정식에 넣어 수정함으로써 접촉 작용을 묘사하고자 하였다.

Min[3]은 충돌 후 접촉면에서 발생하는 가상 인장과 분리의 문제를 가상 입자의 개념을 도입하여 해결하고자 했다. 초기에 법선 벡터를 가상 입자에 설정해 줌으로써 실제 입자의 법선 벡터를 찾고 충돌면에 수직인 속도항만을 기존의 속도와 대체시킴으로써, 가상 인장의 발생 없이 충돌면이 분리됨을 원통좌표계 수치 해석을 통해 보여 주었다.

* 연세대학교 대학원 기계공학과

† 연세대학교 기계공학부

E-mail : minokey@yonsei.ac.kr

TEL : (02)2123-2817 FAX : (02)362-2736

본 연구에서는 전술한 바와 같이 탄성 접촉 시 발생하는 몇 가지 문제를 해결할 수 있는 접촉 알고리즘을 제시하는 데 있다. 접촉 문제에 대한 SPH 수식화를 가상일의 원리에 근거해 유도하고, 접촉 조건을 만족시키기 위해 penalty 방법을 적용하는 데 있어 적절한 상수의 계산법을 제시한다. 그리고, 경계 법선 벡터의 설정과 접촉 판단 조건을 제시하고 1차원과 2차원 수치 해석을 통해 그 타당성을 검증하고자 한다.

2. 이론

2.1 SPH 기본 이론

2.1.1 SPH 근사법

SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)는 요소나 격자가 아닌 입자를 통해 해석 대상을 구성하고 핵함수(kernel or shape function)라는 보간 함수를 이용하여 인접한 물리량과 입자간 관계로부터 각 입자들의 물리량을 계산한다. 이를 위해 임의의 입자 물리량을 결정하는 데 이용하는 핵함수 근사와 연속계의 적분을 이산계인 입자에서의 총합으로 근사하는 입자 근사를 이용하게 된다.

SPH는 Dirac Delta 함수의 수학적 개념에 기초하는 데, Dirac Delta 함수 대신 핵함수로 불리는 다른 함수를 사용하게 되며, 이 핵함수는 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$\int_{\Omega} W(r_0 - r, h) dr = 1 \tag{1}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(r_0 - r, h) = \delta(r_0 - r) \tag{2}$$

여기서 $W(r_0 - r, h)$ 는 핵함수이고, h 는 유화 길이(Smoothing Length)로 핵함수의 폭을 나타낸다. 위 조건을 만족하는 핵함수와 Montecarlo 적분 이론을 통해 임의의 연속함수 f 의 핵함수 근사와 입자 근사식을 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\langle f(r_0) \rangle = \int_{\Omega} f(r) W(r_0 - r, h) dr \tag{3}$$

$$f(r)_i = \sum_{j=1}^n f(r_j) W(r_i - r_j, h) V_j \tag{4}$$

V_j 는 입자 j 의 부피를 나타내며 m_j/ρ_j 로 표시된다. 핵함수로는 가장 널리 사용되는 Cubic B-spline 형 함수를 주로 사용한다.

2.1.2 기초 방정식

유체 동력학의 지배 방정식은 연속, 운동량, 에

너지 보존식으로써 식(3)과 (4)를 이용해 SPH 수식화를 시키면 다음 식과 같다.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\alpha} \rightarrow \frac{d\rho}{dt}_i = -\rho_i \sum_j m_j \frac{U_j^\beta}{\rho_j} W_{\tilde{y},\beta(i)} \tag{5}$$

$$\frac{dU^\alpha}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \rightarrow \tag{6}$$

$$\frac{dU^\alpha}{dt}_i = -\sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) W_{\tilde{y},\beta(i)}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} \rightarrow \tag{7}$$

$$\frac{dE}{dt}_i = -\sum_j m_j (U_i^\alpha - U_j^\beta) \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\Pi_{ij}}{2} \right) W_{\tilde{y},\beta(i)}$$

ρ 는 밀도, U^α 는 속도, E 는 내부 에너지, t 는 시간, x 는 위치, σ 는 전응력, 상첨자 α, β 는 텐서 표기로 공간에서의 방향을 각각 나타낸다. 그리고, Π_{ij} 는 충격 문제 해석 시 수치적 발산을 막기 위한 인공 점성을 뜻한다. 그 외에 응력-변형률 관계식, 상태 방정식 등을 통해 SPH 해석을 수행하게 된다.

2.1.3 재현 조건

앞 절에서 제시한 핵함수 근사식에서 핵함수는 대상 영역의 내부에서는 조건식(1)을 대체로 잘 만족하지만 경계 부근에서 일관성 조건을 만족시키지 못한다. 이 조건을 만족시키기 위해 Liu[1] 등은 RKPM(Reproducing Kernel Particle Method)에서 SPH 핵함수에 새로운 보정 함수(Correction Function)를 도입함으로써 일관성 조건을 만족시키도록 하였다. 즉, 함수 $u(x)$ 에 대한 재현 함수

$$u^h(x) = \int_{\Omega} C(x-y) W(x-y, h) u(y) d\Omega \tag{8}$$

에 대하여 RKPM은 보정 함수 $C(x-y)$ 를 결정하기 위하여, 수정된 핵함수에 다음과 같은 조건을 부여하였다.

$$\int_{\Omega} C(x, y) W(x-y) d\Omega = 1 \tag{9}$$

$$\int_{\Omega} x C(x, y) W(x-y) d\Omega = x \tag{10}$$

식(9)와 식(10)을 만족시키도록 보정된 핵함수는 원래의 핵함수가 가지는 경계에서의 오차를 거의 제거해주는 효과를 나타낸다. 몇 단계의 계산과정을 통해 이산화된 함수 근사식과 수정 핵함수는 아래와 같이 표현된다.

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^N N_j(x) u_j \tag{11}$$

$$N_j(x) = [C_0(x) + C_1(x) \cdot (x - x_j)] / W(x - x_j) V_j \tag{12}$$

여기서 계수 C_0 와 C_1 는 단위 분할 조건식(9)와 선형 일관성 조건식(10)을 통해 얻을 수 있고, 수정 핵함수의 1차 미분 형태도 추가적인 수학적 과정을 통해 구할 수 있다[1,9,10].

Fig.1은 1차원에서 원래의 핵함수, 핵함수 미분값과 수정된 핵함수, 핵함수 미분값의 차이를 잘 보여주고 있다. 원래의 핵함수에 비해 수정된 핵함수는 내부에서는 거의 차이가 없는 반면, 경계에서는 앞의 조건을 만족시키기 위해 형상에 큰 변화가 있음을 알 수 있다.

2.2 접촉 이론

유한 요소법과는 달리 SPH는 접촉면이 불연속적인 입자로 모델링 되어 있기 때문에 새로운 접촉 조건과 고려가 필요하다. 본 연구에서는 변분법을 이용하여 제한 조건을 갖는 에너지 범함수를 수식화하고, 벌칙 기법을 사용하여 접촉력을 구하였다.

2.2.1 경계치 문제

접촉할 수 있는 두 물체는 기본적으로 운동 방정식, 변형률속도-변위 속도 관계식, 구성 방정식과 초기 및 경계 조건 그리고, 다음과 같은 일반적으로 고체 사이의 접촉을 지배하는 Kuhn-Tucker 조건을 만족시켜야 한다[7].

- i) 물체가 상호 침투하지 않는다는 가정으로부터 접촉간극은 항상 0보다 커야 한다.
- ii) 접촉면이 고착되어 있지 않다는 가정으로부터 접촉 압력은 반드시 압축력이어야 한다.
- iii) 접촉 압력과 접촉 간극 중에서 적어도 하나

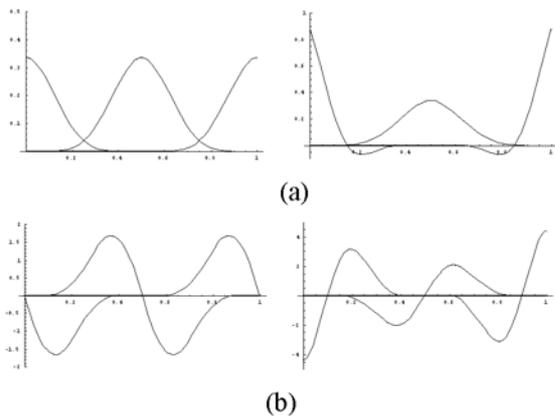


Fig.1 Comparison of original and modified (a) kernel (b) derivative of kernel in 1D

는 0이어야 한다.

2.2.2 가상일의 원리

접촉 문제의 약형을 얻기 위해 운동 방정식과 경계 조건식, 변형률속도-변위 속도 관계식을 만족하는 가상속도의 변분 δv_i 를 곱하여 물체의 체적 V 및 표면적 A 에 대하여 적분하면 다음 식을 얻는다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta v_i dV + \int_{\Omega} \rho b_i \delta v_i dV + \int_{\Omega} \rho \dot{v}_i \delta v_i dV + \int_{\Gamma} (t_i - \bar{t}_i) \delta v_i dA = 0 \tag{13}$$

위 식 좌변 제1항에 가우스의 발산정리를 적용하고, 벌칙 기법을 통해 접촉으로 인해 발생하는 부등식 구속 극화 문제를 비구속 극화 문제로 변환시키면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\delta W = \delta W^{int} + \delta W^{con} + \delta M - \delta W^{ext} \tag{14}$$

여기서

$$\delta W^{int} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta v_{i,j} dV \tag{15}$$

$$\delta M = \int_{\Omega} \delta v_i \rho \dot{v}_i dV \tag{16}$$

$$\delta W^{con} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_1 \dot{g}_n \delta \dot{g}_n + \lambda_2 g_n \delta \dot{g}_n) d\Gamma = 0 \tag{17}$$

$$\delta W^{ext} = \int_{\Omega} \rho b_i \delta v_i dV + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i \delta v_i dA \tag{18}$$

여기서 λ_1 은 상호 침투 속도에 대한 벌칙 상수, λ_2 는 상호 침투량에 대한 벌칙 상수, \dot{g}_n 은 상호 침투 속도, g_n 은 상호 침투량을 각각 나타낸다.

2.2.3 접촉 문제의 SPH 수식화

가상일의 원리로부터 유도된 약형식 (14)를 앞서 기술한 SPH 이산화 방법을 통해 수식화하면 다음과 같다.

$$M \dot{v}_i + F^{int} + F^{con} = F^{ext} \tag{19}$$

여기서

$$M = \sum_j \rho_j N_j V_i \tag{20}$$

$$F^{int} = \sum_j m_i m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) W_{ij, \beta(i)} \tag{21}$$

$$F^{con} = \sum_{B_c} (\lambda_1 \dot{g}_n + \lambda_2 g_n) N_{B_c} A_{B_c} \tag{22}$$

$$F^{ext} = \sum_j b_j N_j V_i + \sum_{B_t} \bar{t}_j N_j A_{B_t} \tag{23}$$

여기서, B_i 는 접촉 조건을 만족하는 입자를, B_j 는 traction이 미리 주어진 경계 입자를 나타낸다. 식(19)을 통해 입자 i 의 가속도를 구할 수 있으며 시간 적분법을 통해 속도와 위치를 결정하게 된다.

2.2.4 벌칙 상수의 계산

접촉력에 해당되는 식(22)에는 각각 침투량과 침투 속도로 인해 발생하는 힘을 의미하는 데, 우선 접근 속도에 의한 수직 응력은 1차원 탄성과 이론[2]에서 얻을 수 있다. 즉,

$$\lambda_1 \dot{g}_n = \frac{\rho_j C_j}{\rho_j C_j + \rho_i C_i} \rho_i C_i \dot{g}_n \quad (24)$$

반면, 침투량에 따른 발생 응력은 입자간 불침투성을 만족시키기 위해 변형하면서 생기는 복원력으로 보고, 다음과 같이 단축 변형에 따른 탄성 계수와 변위의 관계로 놓을 수 있다.

$$\lambda_2 g_n = - \frac{E_i E_j}{E_i + E_j} \frac{g_n}{h_0} \quad (25)$$

h_0 는 입자의 초기 유효 길이로 변형량에 대한 기준 길이가 된다.

2.2.5 경계 법선 벡터

SPH에서 물체간 접촉 관계를 구현하기 위해서는 경계 법선 벡터의 설정과 접촉 여부의 판별이 선행되어야 한다. 경계 입자의 판단은 Sulsky[11]가 제안한 방법을 통해서 하고, 경계 법선 벡터는 다음의 식을 이용해 계산된다.

$$n_i = \pm (\nabla \psi / |\nabla \psi|)_i \quad (26)$$

여기서,

$$(\nabla \psi)_i = - \sum_j \psi_j \nabla W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (27)$$

위의 방법으로 얻은 경계면에서의 법선벡터를 Fig.2에서 보여주고 있는 데, 경계를 따라 대체로 양호한 결과를 나타내고 있다.

경계 법선 벡터가 결정되면 이것을 이용해 경계 입자들이 실제로 접촉하고 있는지를 판단하게

된다. 식(28)을 만족할 경우 일단 입자들이 접촉할 가능성이 있다고 판단한다[11].

$$Max(n_i \cdot r_{ij} - n_j \cdot r_{ij}) \leq \frac{1}{2} (h_i + h_j) \quad (28)$$

그러나, 침투량을 계산하기 위해서는 실제로 접촉면에 법선인 n_{av} 를 계산할 필요가 있으며, 본문에서는 다음 식(29)와 같은 방법을 사용한다.

$$\begin{aligned} & \text{if } Max(n_i \cdot r_{ij} - n_j \cdot r_{ij}, (n_j - n_i) \cdot r_{ij}) \\ & \text{then } (n_{av} = n_i, n_{av} = n_j, n_{av} = \frac{n_j - n_i}{|n_i - n_j|}) \end{aligned} \quad (29)$$

3. 수치 해석

3.1 1차원 해석

유도된 SPH 접촉 알고리즘의 적용 타당성 확인을 위해 수치 해석을 수행하였다. Fig.3은 두 개의 1차원 steel 봉이 같은 속도로 충돌하는 모델을 나타낸다. Table 1에는 해석에 사용된 steel 재료의 물성치와 EOS 상수 값들을 나타내었다.

접촉 알고리즘을 적용한 결과를 Fig.4~Fig.6에 나타내었다. Fig.4는 b지점에서 일반적인 kerneling을 사용했을 경우와 접촉 알고리즘을 적용하였을 경우의 시간에 따른 속도 선도를 해석치와 함께 보여주고 있다. 기존 SPH 방법으로 얻은 속도 선도는 접촉 후 가상 인장의 발생으로 분리되지 않고 다시 속도가 감소한 반면, 접촉 알고리즘을 적용한 결과는 해석치와 같이 충돌 후 분리되어 반대방향으로 운동하는 것을 알 수 있다.

이러한 현상은 응력 선도 Fig.5에서도 나타나는데 접촉 지점 a에서 응력과 발생은 충돌체 길이의 2배 만큼의 압축과 발생 후 분리가 되어야 하나 kerneling을 하는 경우 접촉면을 오가는 지속적인 압축 인장과 나타나는 걸 볼 수 있다. 충돌 후 두 물체가 완전 탄성체라면 이론상으로 반대방향으로 동일한 속도 크기를 가지고 움직여야 하는 데, 접촉 조건을 부여한 경우 충돌 후 1.7μsec 부근에서 원래 속도 크기의 약90% 이상의 반발 속도로 운동을 하는 것을 Fig.6을 통해 확인할 수 있다.

Table 1 Material properties and constants for Mie-Gruneisen EOS of steel and aluminum

c_0 (m/s)	s	Γ_0	ρ_0 (kg/m ³)	μ_0 (GPa)	Y_0 (MPa)
4580	1.49	2.02	7850	77	600
5330	1.34	2.00	2790	25	550

Fig.2 Normal vectors on boundaries of material

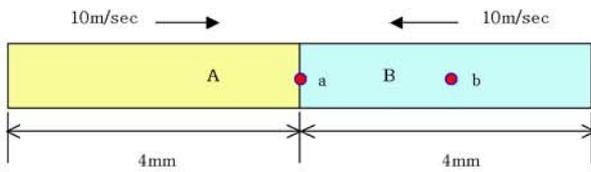


Fig.3 1D Analysis model for numerical analysis

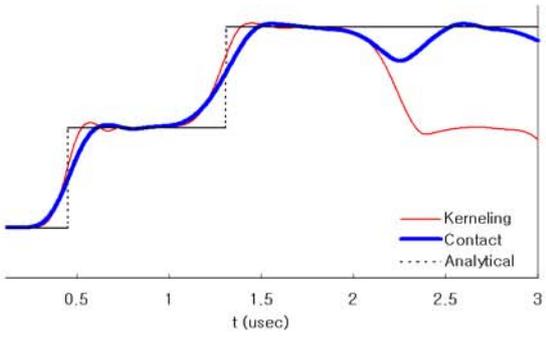


Fig.4 Velocity profiles with time at b

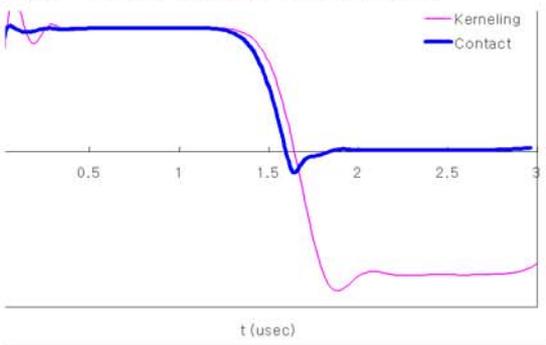


Fig.5 Stress-time history at a

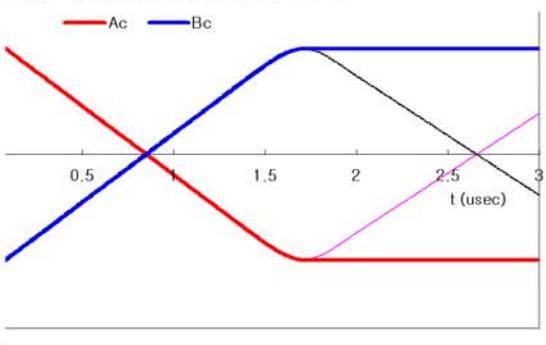


Fig.6 A change of average velocities with time

Fig.7은 steel과 aluminum의 이중 재료가 충돌하는 경우 좌표에 따른 응력 선도를 보여주는 것으로 kerneling을 사용할 경우 큰 밀도차로 인해 수치적 불안정 현상을 나타내지만, 접촉 알고리즘을 통해 이를 제거할 수 있음을 확인할 수 있다.

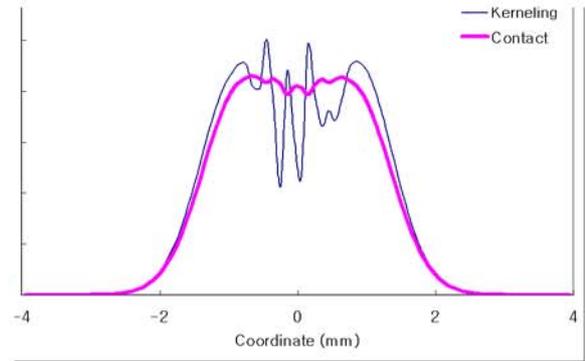


Fig.7 Comparison of stresses with coordinate when impact occurs between different materials

여기서, 침자 k는 kerneling을 c는 접촉 알고리즘을 적용했음을 뜻한다.

3.2 2차원 해석

접촉 알고리즘을 2차원 문제에 적용해 보기 위해 Fig.8과 같은 2차원 구가 충돌하는 모델을 선택하였다. 원주를 따라 입자를 배치하였고 각각 반경이 5mm이고 접근 속도는 10m/sec이다. 이 그림에서는 접촉력이 최대일 때 유효 응력에 대한 등고선도를 보여주고 있는데, 접촉부에서 가장 큰 응력을 나타내면서 대칭적이고 원형 형태를 잘 띠고 있음을 알 수 있다.

Fig.9는 접촉부에서 발생하는 총 접촉력을 FEM의 결과와 비교한 그림이다. Circular는 입자 배치를 Fig.8과 같이 원주를 따라 한 것이고, rectangular는 원형을 사각격자 형태로 나누어 배치한 것이다. Circular 배치의 경우 입자의 실제 접촉 판단이 어려운 관계로 FEM의 결과보다 작게 나오고 있으나 매끄러운 곡선 형태를 띠는 반면, 사각 배치는 접촉면이 일직선 형태를 띠게 되어 접촉 판단과 접촉량 계산이 용이하여 FEM결과와 거의 유사한 결과를 보임을 알 수 있다. 그러나, circular 형태의 입자 배치가 경계면의 형태가 실제와 더 가깝기 때문에 접촉량의 계산 방법을 좀 더 개선할 필요가 있다고 본다.

4. 결론

SPH에서 거의 다루어지지 않았던 탄성 접촉 문제에 대한 접근을 시도 하였다. 변분법에 기초하여 접촉 문제의 해를 구할 수 있는 SPH 수식화 기법을 제시하였다.

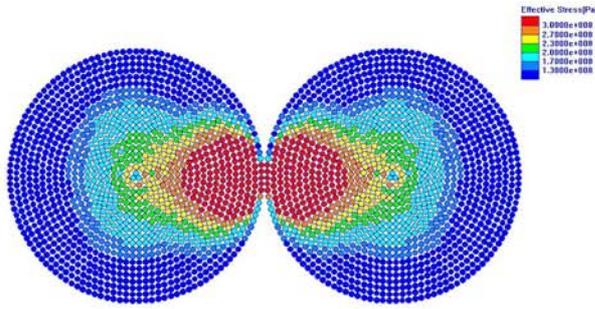


Fig.8 Effective stress contour for two ball impacting

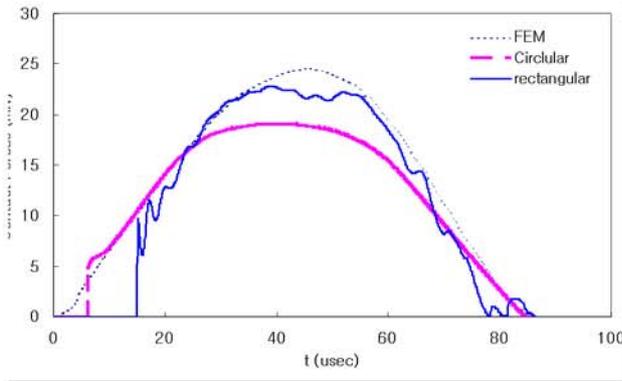


Fig.9 A change of contact forces with time in impacting between two 2D spheres

제시된 SPH 접촉 알고리즘의 타당성을 검증하기 위해 1차원 동충 재료와 이종 재료의 탄성 충돌 문제에 적용을 하여 보았다. 이 방법을 이용해 기존의 kerneling을 통한 충돌 해석에서 문제시 되었던 가상 인장이나 수치 불안정 문제를 제거할 수 있었고, 충돌 후 물체가 분리되지 않는 문제도 해결이 가능하였다.

2차원 문제로는 두 개의 충돌하는 구에 대하여 접촉력을 구하고 FEM의 결과와 비교하였다. 그 결과 유사한 접촉력 특성을 보였으나 입자 배치의 영향이 나타나서 향후 이와 관련된 개선 연구가 필요하다고 본다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01-2001-000-00390-0)의 지원으로 수행되었음.

참고문헌

(1) Wing Kam Liu, Sukky Jun, 1998, Multiple-

scale reproducing kernel particle methods for large deformation problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41, 1339-1362

(2) M.A. Meyers, 1994, *Dynamics Behavior of Materials*, John Wiley & Sons, Inc.

(3) Min Oakkey, Lee Jeongmin, Kim Kukwon, Lee Sungsoo, 2000, A Contact Algorithm in the Low Velocity Impact Simulation with SPH, *KSME International Journal*, Vo.14, No.7, pp.705-714

(4) J. Campbell, R. Vignjevic, L.Libersky, 2000, A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 184, 49-64

(5) R. Vignjevic, J. Campbell, L.Libersky, 2000, A treatment of zero-energy modes in the smoothed particle hydrodynamics method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 184, 67-85

(6) Ted Belytschko and Mark O.Neal, 1991, Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods, *International journal for numerical methods in engineering*, 31, 547-572

(7) A.Czekanski, S.A.Meguid, 2001, Solution of dynamic frictional contact problems using nondifferentiable optimization, *Inter. J. Mech. Sci.*, 43, 1369-1386

(8) Anatoly N.Parshikov, Stanislav A..Medin, Igor I.Loukashenko, Valery A.Milekhin, 2000, Improvements in SPH method by means of interparticle contact algorithm and analysis of perforation tests at moderate projectile velocities, *Inter. J. Impact Engrg.*, 24, 779-796

(9) W.K.Liu, Y.Chen, C.T.Chang, T.Belytschko, 1996, Advances in multiple scale kernel particle methods, *Comput. Mech.*, 18, 73-111

(10) Sukky Jun, Wing Kam Liu and Ted Belytschko, 1998, Explicit Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Problems, 41, 137-166

(11) P.W.Randles, L.D.Libersky, 1996, Smoothed Particle Hydrodynamics : Some recent improvements and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139, 375-408