# 페트로프-갤러킨 개념에 기초한 자연요소법에 관한 연구

이 홍 우† · 조 진 래*

# Study on the Natural Element Method using Petrov-Galerkin Concepts

Hong-Woo Lee and Jin-Rae Cho

**Key Words :** Petrov-Galerkin Natrual Element Method(페트로프 갤러킨 자연요소법), Delaunay Triangulation(델라우니 삼각화), Voronoi Diagram(보로노이 다이어그램).

**Abstract**

In this paper, a new meshfree technique which improves the numerical integration accuracy is introduced. This new method called the Petrov-Galerkin natural element(PG-NE) is based on the Voronoi diagram and the Delaunay triangulation which is based on the same concept used for conventional natural element method called the Bubnov-Galerkin natural element(BG-NE). But, unlike BG-NE method, the test shape function is differently chosen from the trial shape function. The proposed technique ensures that the numerical integration error is remarkably reduced.

## 1. 서 론

유한요소법과 같이 요소를 기반으로 한 수치기법의 단점을 극복하기 위한 방안으로 많은 연구자들이 무요소법(meshless)의 개념에 관심을 기울이기 시작하였으며, 1992 년 Nayroles 등이 DEM (Diffuse Element Method)[(1)]을 발표한 이후로 편미분 방정식의 새로운 해법으로 무요소 개념에 대한 집중적인 연구가 이루어져 왔다. 대표적으로 EFG (Element Free Galerkin) [(2)], RKPM(Reproducing Kernel Particle Method) [(3)], H-P Clouds[(4)], Partition of Unity[(5)] 등이 무요소 개념을 바탕으로 제안된 방법들이다. 제안된 대부분의 무요소법들은 공통적으로 필수경계조건의 처리와 약 형식(weak form)의 수치적분에 있어서 문제점을 내포하고 있다.

최근의 자연요소법(NEM ; Natural Element Method) [(6-7)]은 보로노이 다이어그램(Voronoi diagram)과 델라우니 삼각화(Delaunay triangulation)와 같은 기하학적 개념을 도입하여 필수경계조건의 직접적 처리를 가능하게 하였다. 이는 기존의 무요소법과는 달리 Sibson 및 Laplace 보간함수가 완전한 보간특성을 가짐에 기인한다. 하지만, 자연요소법에서도 수치적분 오차에 대한 문제점은 여전히 미해결 과제로 남아 있으며, 적분오차에 대한 자연요소법의 정확도 및 수렴성 저하는 참고문헌[(6-7)]에서 보고되고 있다.

본 논문에서는 자연요소법의 가장 두드러진 특징인 보간특성을 유지하는 동시에 수치적분 오차를 감소시키는 방안에 대하여 논의하고자 한다. 저자들이 제안하는 수치기법을 이용하여 기존 무요소법들이 내재하고 있는 주요 두 가지 단점 –필수경계조건의 처리와 수치적분 오차 –을 해결하고, 조각시험을 통해 제안된 기법의 수치적분 안정성을 검토하도록 한다.

## 2. Natural Neighbor Interpolation Function

### 2.1 보로노이 다이어그램과 델라우니 삼각화

본 논문에서 보로노이 다이어그램과 델라우니 삼각화는 2 차원 유클리드(Euclide) 공간 $R^2$ 에서 정의한다. 먼저, 평면상의 서로 다른 점집합 $P$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

† 부산대학교 기계설계공학과 대학원
E-mail : leehongw@pusan.ac.kr
TEL : (051)510-3206 FAX : (051)514-7640
* 부산대학교 기계공학부

$$P=\{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3,\cdots,\mathbf{p}_n\},\ \mathbf{p}_I\in \mathrm{R}^2 \quad (1)$$

점집합 $P$ 의 1 차 보로노이 다이어그램은 평면상의 서로 다른 점의 분포로부터 국부영역 $V_I$ 로 평면을 분할하게 되며, 수학적으로 다음과 같이 정의된다.[6-7]

$$V_I=\{\mathbf{p}\in \mathrm{R}^2 : d(\mathbf{p},\mathbf{p}_I)<d(\mathbf{p},\mathbf{p}_J)\}\forall\, J\neq I \quad (2)$$

여기서, $d(\mathbf{p}_I,\mathbf{p}_J)$ 는 점 $\mathbf{p}_I$ 와 $\mathbf{p}_J$ 사이의 거리를 나타내는 유클리드 메트릭(metric)이다. Fig. 1 에 7 개의 절점에 대한 보로노이 다이어 그램을 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 보로노이 다이어그램은 각 점을 닫힌 부영역 또는 경계가 없는 부공간으로 분할하게 된다.

델라우니 삼각화는 보로노이 다이어그램의 기하학적 듀얼(dual)로서 보로노이 다각형의 경계를 공유하는 절점을 연결하여 구성할 수 있다. 델라우니 삼각형은 주어진 점으로부터 구성할 수 있는 모든 삼각형 분할 중에 최소각을 최대화하는 특성을 가지고 있으며, 항상 빈 외접원 기준(empty circumcircle criterion)을 만족한다.[6-7] 즉, 임의의 델라우니 삼각형 $DT$ 의 외접원 내부에는 다른 점을 전혀 포함하지 않는 기하학적 특징을 보인다.

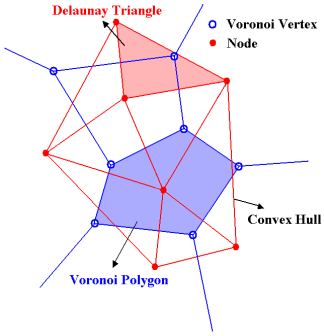



Fig. 1 Voronoi diagram and Delaunay triangulation

### 2.2 Sibson 보간함수

Fig. 2(a)에 평면상에 균일하게 분포된 4 개의 절점으로 이루어진 임의의 점 $\mathbf{p}$ 에 대한 보로노이 다이어그램을 나타내었다. 점 $\mathbf{p}$ 에 의한 보로노이 다각형 $V_{\mathbf{p}}$ 의 면적을 $A(\mathbf{p})$ 라 두고 2 차 보로노이 다각형 $V_{\mathbf{p}I}$ 의 면적을 $A_I(\mathbf{p})$ 로 두자. 여기서, 2 차 보로노이 다각형 $V_{IJ}$ 는 점 $\mathbf{p}_I$ 에 가장 가깝고 점 $\mathbf{p}_J$ 에 두번째로 가까운 점들의 집합으로 다음과 같이 정의할 수 있다.[6-7]

$$V_{IJ}=\{\mathbf{p}\in \mathrm{R}^2 : d(\mathbf{p},\mathbf{p}_I)<d(\mathbf{p},\mathbf{p}_J)<d(\mathbf{p},\mathbf{p}_K)\}\quad \forall\, K\neq I,J \quad (3)$$

임의의 점 $\mathbf{p}$ 에서 절점 $\mathbf{p}_I$ 에 해당하는 Sibson 보간함수 $\phi_I(\mathbf{p})$ 는 1 차 보로노이 다각형 면적 $A(\mathbf{p})$ 와 2 차 보로노이 다각형 면적 $A_I(\mathbf{p})$ 의 비로 정의된다.[6-7]

$$\phi_I(\mathbf{p})=\frac{A_I(\mathbf{p})}{A(\mathbf{p})},\ A(\mathbf{p})=\sum_{J=1}^{m}A_J(\mathbf{p}),\ \mathbf{p}\in \mathrm{R}^2 \quad (4)$$

여기서, m 은 점 $\mathbf{p}$ 에 관련된 자연 이웃 점(natural neighbor)의 개수이다.

### 2.3 Laplace 보간함수

Laplace 보간함수를 정의하기 위해 2.2 절의 점집합 $P$ 를 도입하고, $P$ 에 속해있는 절점 $\mathbf{p}_I$ 에 관련된 보로노이 다각형을 식 (2)와 같이 정의한다. Sibson 보간에서 2 차 보로노이 다이어그램을 정의한 것과는 달리 보로노이 다각형 $V_I$ 와 $V_J$ 의 1 차원 공통 면(facet)인 $\omega_{IJ}$ 를 다음과 같이 정의한다.[7]

$$\omega_{IJ}=\{\mathbf{p}\in \overline{V}_I\cap\overline{V}_J,\ J\neq I\},\ \overline{V}_I=V_I\cup\partial V_I \quad (5)$$

여기서, $V_I$ 와 $V_J$ 사이에 공통의 모서리가 존재하지 않으면 $\omega_{IJ}$ 는 공집합이 된다. 따라서, $d(\mathbf{p}_I,\mathbf{p}_J)\neq 0$ 을 만족하면 다음과 같은 관계가 성립된다.[7]

$$\sum_{\substack{J=1\\J\neq I}}^{m}\frac{|\omega_{IJ}|\mathbf{p}_J}{d(\mathbf{p}_I,\mathbf{p}_J)}=\mathbf{p}_I\left[\sum_{\substack{J=1\\J\neq I}}^{m}\frac{|\omega_{IJ}|}{d(\mathbf{p}_I,\mathbf{p}_J)}\right] \quad (6)$$

여기서, $|\cdot|$ 는 1 차원에서 모서리 길이를 의미한다. **Fig. 2**(b)와 같은 2 차원 평명 상의 보로노이 다각형을 고려하면, 점 $\mathbf{p}$ 는 4 개의 자연 이웃 점을 가지고 있다. 그림에서와 같이 2 차원일 경우 절점 $\mathbf{p}_I$ 에 관련된 보로노이 모서리 길이 $s_I(\mathbf{p})=|\omega_{\mathbf{p}I}|$ 로 표현되며, 절점 $\mathbf{p}_I$ 의 보로노이 모서리와 점 $\mathbf{p}$ 의 수직거리 $h_I(\mathbf{p})=0.5d(\mathbf{p},\mathbf{p}_I)$ 로 기술된다. 따라서, 2 차원인 경우 Laplace 보간함수 $\phi_I(\mathbf{p})$ 는 식 (7)로부터 다음과 같이 정의된다.[7]

$$\phi_I(\mathbf{p})=\frac{\alpha_I(\mathbf{p})}{\sum_{J=1}^{m}\alpha_J(\mathbf{p})},\ \alpha_I(\mathbf{p})=\frac{s_I(\mathbf{p})}{h_I(\mathbf{p})},\ \mathbf{p}\in \mathrm{R}^2 \quad (7)$$

식 (7)에서 알 수 있듯이 2 차원일 때의 Laplace

보간함수는 보로노이 모서리와 관련된 길이비로 정의된다.

자연 이웃 점 기반의 보간 기법을 이용한 벡터 함수의 보간은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{p}) = \sum_{I=1}^{m} \phi_I(\mathbf{p})\mathbf{u}_I \tag{8}$$

여기서, $\mathbf{u}_I$ ( $I = 1, 2, \cdots, m$ )는 $m$ 개의 자연 이웃 점에서의 절점 벡터를 의미하며, $\phi_I(\mathbf{p})$ 는 절점 $\mathbf{p}_I$ 에 해당하는 Sibson 또는 Laplace 보간함수를 나타낸다.

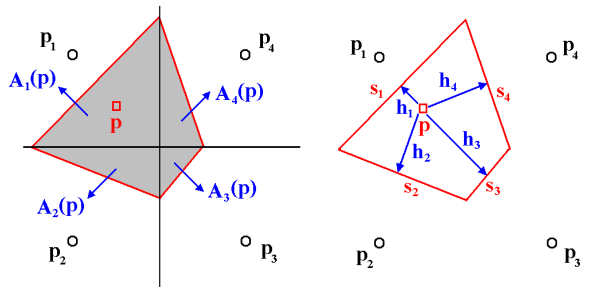



**Fig. 2** Natural neighbor-based interpolation for the four uniform node distribution (a) Sibson interpolation (b) Laplace interpolation

## 3. Petrov-Galerkin Natural Element Method

### 3.1 자연요소법에서의 수치적분 오차

전체 영역이 $\Omega \subset \mathrm{R}^2$ 이고 경계가 $\Gamma$ 인 2 차원 선형 탄성체를 고려하자. 영역의 경계 $\Gamma$ 는 필수경계 $\Gamma_u$ 와 자연경계 $\Gamma_t$ 로 구분할 수 있다. 따라서, 선형 탄성문제에 대한 정적 평형방정식은 다음 식과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{9}$$

여기서, $\sigma_{ij}$ 는 Cauchy 응력 텐서, $b_i$ 는 체적력을 나타내며, $(\cdot)_{,j} = \partial(\cdot)/\partial x_j$ 를 의미한다. 한편, 필수 및 자연경계조건은 다음 식으로 표현된다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \tag{10a}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_t \tag{10b}$$

여기서, $n_i$ 는 영역 $\Omega$ 의 외부로 향하는 단위 법선 벡터이며, $\bar{u}_i$ 와 $\bar{t}_i$ 는 각각 미리 규정된 변위 및 표면력을 의미한다.

선형 탄성거동을 가정하면, 응력과 변형률 사이의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{11}$$

여기서, $C_{ijkl}$ 은 물성계수 텐서이며, $\varepsilon_{kl}$ 은 미소 변형률 텐서로서 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \tag{12}$$

이러한 평형방정식의 약 정식화를 위해 변위 시도함수(trial function) $\mathbf{u} \in \mathrm{V} = [\mathrm{H}^1(\Omega)]^2$ 과 운동학적 가용 시험함수(kinematically admissible test function) $\mathbf{v} \in \mathrm{V}_0 = [\mathrm{H}_0^1(\Omega)]^2$ 를 선정한다. 여기서, $\mathrm{H}^1(\Omega)$ 는 1 차의 Hilbert 함수공간이며, $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ 는 필수경계 $\Gamma_u$ 에서 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 인 조건을 만족하는 함수로 이루어진 1 차 Hilbert 함수공간을 의미한다. 식 (9)에 시험함수 $v_i$ 를 곱하여 전체 영역 $\Omega$ 에 대하여 적분하면 최종적으로 다음과 같은 약 형식을 얻을 수 있다.

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\, d\Omega = \int_\Omega b_i v_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i v_i \, d\Gamma \tag{13}$$

식 (13)의 약 형식으로부터 이산화 방정식을 얻기 위해 시도함수와 시험함수를 다음과 같은 근사함수로 가정한다.

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_I \phi^I(\mathbf{x}) u_i^I \tag{14a}$$

$$v_i(\mathbf{x}) = \sum_I \psi^I(\mathbf{x}) v_i^I \tag{14b}$$

여기서, $\phi^I(\mathbf{x})$ 와 $\psi^I(\mathbf{x})$ 는 각각 시도함수 및 시험함수를 이산화하는 전역 절점 형상함수(global nodal shape function)이며, $u_i^I$ 와 $v_i^I$ 는 각각 절점 $I$ 에 해당하는 시도함수 및 시험함수의 절점값을 의미한다. 부브노프-갤러킨(Bubnov-Galerkin)법에 기반을 둔 유한요소법과 무요소법에서는 동일한 형상함수를 이용해 시도 및 시험함수를 근사화하며, BG-NE(Bubnov-Galerkin Natural Element)법에서는 형상함수로서 Sibson 또는 Laplace 보간함수를 사용한다. 유한요소법과 BG-NE 법에서 이러한 전역 절점 형상함수는 해당하는 절점에서 단위값을 가지며, 함수의 지지영역 경계에 접근할수록 '0' 으로 수렴하게 된다. 전역적 관점에서 볼 때, 식 (13)의 약 형식에서 우변은 시도함수와 시험함수의 교차영역(intersection region)에서만 정의되며 나머지 영역에서는 모두 '0' 의 값을 가지게 된다. 따라서, 식 (13)의 약 형식은 전역 절점 함수를 이용하여 다음과 같이 이산화 할 수 있다.

$$\sum_I \sum_J \left[ \int_{\Omega_{te}^I} C_{ijkl} \psi_{,j}^I v_i^I \phi_{,l}^J u_k^J \, d\Omega \right]$$

$$= \sum_I \left[ \int_{\Omega_{te}^I} b_i \psi^I v_i^I \, d\Omega + \int_{\Gamma_t^I} \bar{t}_i \psi^I v_i^I \, d\Gamma \right] \quad (15)$$

여기서, $\psi^I$ 는 절점 $I$ 에 해당하는 시험 형상함수(test shape function)로서 절점 시험함수 영역 $\Omega_{te}^I$ 에서만 정의되며, $\phi^J$ 는 절점 $J$ 에 해당하는 시도 형상함수(trial shape function)로서 절점 시도함수 영역 $\Omega_{tr}^J$ 에서만 정의된다. 식 (16)의 이산화 방정식은 절점 $I$ 의 시험함수 영역 $\Omega_{te}^I$ 에서 적분이 수행된다.

잘 알려진 바와 같이 일정 변형률 유한요소(CS-FE : Constant Strain Finite Element)[8]에서 식 (15)의 적분을 위한 국부 영역 $\Omega_{te}^I$ 는 절점 $I$ 를 공유하는 삼각형 요소로 구성되며, 해당 형상함수는 유한요소의 구성과정에서 $\Omega_{te}^I$ 내에서만 정의되도록 설정되어 있다. 따라서, 유한요소법에서 요소 자체가 함수의 적분과정에서 매우 적절한 국부 영역을 제공하게 되며, 적분 함수의 지지영역과 적분영역의 불일치로 인한 적분오차는 발생하지 않게 된다. 반면, BG-NE 의 경우 델라우니 삼각형을 적분영역으로 설정하기 때문에 CS-FE 와 동일하게 영역을 분할하게 되지만, 절점 $I$ 에 해당하는 시험 형상함수의 지지영역 $\Omega_{te}^I$ 는 델라우니 삼각형 경계를 기준으로 나누어지지 않는다. 이러한 적분영역과 형상함수 지지영역의 불일치는 다항함수가 아닌 형상함수의 도입으로 인한 적분오차에 비해 훨씬 심각한 오차를 유발하게 된다.

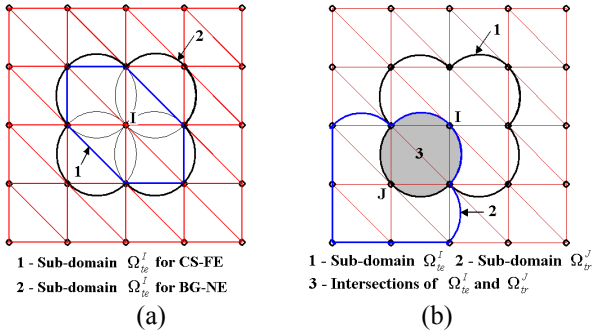



**Fig. 3** Supports of shape functions for CS-FE and BG-NE (a) Test function centered at node $I$ for CS-FE and BG-NE (b) Test and Trial function centered at node $I$ and $J$ for BG-NE, respectively

**Fig. 3**(a)에 균일 절점분포에 대한 CS-FE 와 BG-NE 에서의 절점 시험 형상함수 지지영역 $\Omega_{te}^I$ 를 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 CS-FE 에서는 시험 형상함수의 지지영역 $\Omega_{te}^I$ 와 적분영역인 삼각형 요소의 경계가 정확하게 일치하고 있다. 반면, BG-NE 에서 Laplace 보간함수의 지지영역 $\Omega_{te}^I$ 는 적분영역인 델라우니 삼각형의 경계와 일치하지 않음을 보여준다. **Fig. 3**(b)에 나타낸 것처럼 Laplace 보간함수를 이용하여 시도 및 시험함수를 구성한 경우(BG-NE)에 두 함수의 교차영역은 델라우니 외접원이 겹치는 지점에서 형성되며, 이로 인해 적분함수의 지지영역과 적분영역의 불일치가 발생하게 된다.

Dolbow 와 Belytschko[9]는 이와 같은 불일치로 인해 EFG 에서 발생하는 적분정도의 저하를 억제하기 위하여 경계상자기법(bounding box technique)을 이용하여 형상함수 지지영역의 경계와 일치하도록 배경격자를 생성하였다. 하지만, Laplace 보간함수처럼 복잡한 형상의 지지영역을 갖는 함수의 경계에 배경격자를 일치시키는 작업은 거의 불가능하며, 설령 일치하는 배경격자를 생성시켰다 할지라도 복잡한 영역에서 적분할 수 있는 일반적인 수치적분 기법은 아직 알려져 있지 않다. 따라서, 본 논문에서는 기존의 BG-NE 법에서와 같이 델라우니 삼각형을 수치적분을 위한 배경격자로 사용하고, 델라우니 삼각형을 기반으로 한 보간함수를 시험 형상함수로 재구성함으로써 적분함수의 지지영역과 적분영역의 경계를 일치시키는 방안을 제시하고자 한다.

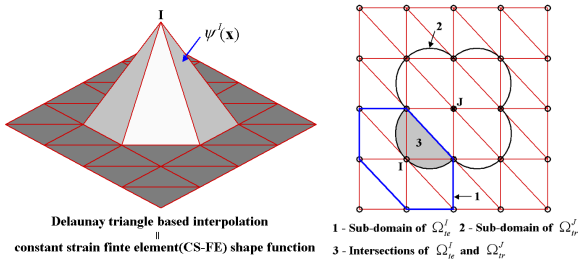
### 3.2 델라우니 삼각형 기반의 시험 형상함수

Sukumar 등[6-7]의 기존 BG-NE 법에서는 시도 및 시험함수를 Laplace 보간함수를 이용하여 구성하였으며, 이는 적분함수의 지지영역과 적분영역의 불일치를 유발하여 심각한 적분정도의 저하를 야기시켰다. 이와 같은 적분오차로 인하여 BG-NE 법은 조각시험을 통과하지 못할 뿐만 아니라, 점근적 수렴률(asymptotic rate of convergence)을 보장하지 못하는 경우도 발생하게 된다. 본 논문에서는 이러한 적분오차를 억제하기 위하여 시험함수의 지지영역을 적분영역과 동일하게 구성하는 방법을 제시하고자 한다. 이는 기존의 부브노프-갤러킨 기반의 NE 법과는 달리 시도함수와 시험함수를 다르게 구성하기 때문에 페트로프-갤러킨 기반의 NE 법으로 볼 수 있다. 따라서, 새로운 NE 법을 기존의 BG-NE 법에 대비하여 PG-NE(Petrov-Galerkin Natural Element) 법으로 명명하도록 한다.

PG-NE 법에서 시험함수는 델라우니 삼각형 기반

의 형상함수를 이용하여 구성한다. 즉, 식 (14)에서 시도 형상함수 $\phi^I(\mathbf{x})$ 는 BG-NE 법의 형상함수인 Laplace 보간함수를 이용하고, 시험 형상함수 $\psi^I(\mathbf{x})$ 는 $\mathbf{x}$ 가 속해있는 델라우니 삼각형의 절점을 이용하여 새롭게 구성한다. 이러한 델라우니 삼각형 기반의 형상함수는 CS-FE 의 형상함수와 동일하며, 적분점 $\mathbf{x}$ 에서의 함수계산은 중심좌표(barycentric coordinates)를 이용하여 얻을 수 있다.

**Fig. 4**(a)에서 구성된 형상함수의 지지영역은 절점 $I$ 를 둘러싼 델라우니 삼각형의 합 영역과 동일하며, 이로인해 적분영역과 적분함수 지지영역의 불일치로 인한 적분오차를 억제할 수 있는 매우 적절한 형상함수를 제공하게 된다. 즉, **Fig. 4**(b)에서 절점 $I$ 의 시험함수영역 $\Omega_{te}^I$ 와 절점 $J$ 의 시도함수영역 $\Omega_{tr}^J$ 의 교차영역은 적분영역인 $\Omega_{te}^I$ 내부에서만 정의됨을 알 수 있다. 따라서, 어떠한 경우에 있어서도 적분함수와 적분영역이 항상 일치하게 되며, BG-NE 법의 가장 큰 단점인 적분의 부정확성에 의한 오차를 크게 줄일 수 있게 된다.




(a) (b)

**Fig. 4** Supports of shape functions in Petrov-Galerkin natural element method(PG-NEM) (a) nodal test shape function – Delaunay triangle based interpolation function (b) Test and Trial function centered at node $I$ and $J$ for PG-NE, respectively

한편, 델라우니 삼각형은 정의된 델라우니 삼각형 정보로부터 단지 간단한 몇 개의 대수학적 관계식으로부터 쉽게 얻을 수 있다. 시험 형상함수는 델라우니 삼각형 기반의 형상함수를 이용하여 근사화하고, 시도함수는 Laplace 보간기법을 이용하여 구성하면 PG-NE 법의 이산화 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \tag{16}$$

여기서, $\mathbf{K}$ 는 강성행렬(stiffness matrix), $\mathbf{f}$ 는 하중벡터(load vector)를 나타내며, 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega_{te}^I} \left(\mathbf{B}_v^I\right)^T \mathbf{C}\mathbf{B}^J \, d\Omega \tag{17a}$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega_{te}^I} \phi^I \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t^I} \psi^I \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \tag{17b}$$

위의 방정식에서 $\mathbf{B}_v^I$ 와 $\mathbf{B}^J$ 는 각각 시도 형상함수와 시험 형상함수의 미분이며, $\mathbf{C}$ 는 선형 등방성 재료의 물성행렬(material property matrix)를 의미한다.

## 4. Numerical Experiments – Patch Test

조각시험은 비적합 유한요소의 수렴성 검증을 위해 가장 널리 쓰이고 있는 방법이다. 본 논문에서 조각시험은 다음의 크게 두가지 조건에 대하여 수행한다. 첫째, 변위 조각시험으로 선형의 변위장을 경계 $\Gamma_u$ 에 부여하여, 해석영역의 선형 변위장이 정확히 근사화 되는지를 판단한다. 둘째, 평형 조각시험으로 단축 평면 응력장을 구현하는 능력을 검증한다. **Fig. 5** 에 변위 및 평형 조각시험을 위한 모델을 도시하였으며, $u_0 = 1\times10^3$ m, $P_0 = 1$ Pa 을 적용하였다. 해석을 위해 두 경우 모두 평면응력 조건을 적용하였으며, 25 개의 균일 절점(Grid A)과 5 개의 불균일 절점(Grid B) 분포에 대하여 CS-FE, BG-NE 및 PG-NE 법을 이용한 해석을 수행하였다.

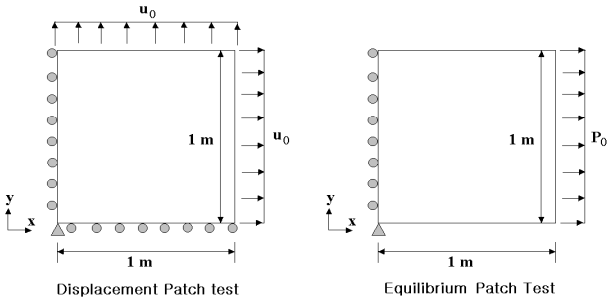



**Fig. 5** Models for patch test

변위상대오차($E_{disp}$)와 에너지 상대오차 놈($E_{energy}$)에 대한 조각시험 결과를 **Table 1** 에 정리하였다. BG-NE 법의 경우 변위 및 에너지 상대오차 놈의 결과는 정확도가 $10^{-3}$ 에서 $10^{-2}$ 사이에 존재한다는 것을 보여준다. 그러므로, BG-NE 법의 결과는 기계 정확도(machine precision)인 $10^{-16}$ 에 비하여 높은 오차를 나타내며, 조각시험을 통과하지 못한다는 것을 알 수 있다. 반면, PG-NE 법 및 CS-FE 법은 기계 정확도에 근접한 오차를 보이고 있으며, 이는 조각시험을 통과하였음을 나타내고 있다. 이러한 조각시험의 결과는 Laplace 보간함수가 선형의 변위장을 정확히 재구성할 수 있다는 사실을 고려할 때, 약 형식의 수치적분과정에서 오차의

원인 대부분이 제공되고 있다는 것을 파악할 수 있다. Sibson 보간함수를 적용한 BG-NE 법의 수치적분에 대한 이러한 평가는 Sukumar 등[6]의 논문에 자세히 언급되어 있다.

**Table 1** Relative error norms for the patch test

| Test | Grids | Method | $E_{disp}$ | $E_{energy}$ |
|---|---|---|---|---|
| Test 1 | A | PG-NE | 1.30E-16 | 1.32E-15 |
| | | BG-NE | 9.78E-3 | 3.72E-2 |
| | | CS-FE | 1.02E-16 | 0.00E-0 |
| | B | PG-NE | 1.43E-16 | 9.14E-16 |
| | | BG-NE | 1.76E-2 | 6.53E-2 |
| | | CS-FE | 8.89E-17 | 1.05E-16 |
| Test 2 | A | PG-NE | 2.48E-15 | 1.08E-14 |
| | | BG-NE | 1.40E-2 | 4.76E-2 |
| | | CS-FE | 1.56E-15 | 7.22E-15 |
| | B | PG-NE | 3.45E-16 | 1.42E-15 |
| | | BG-NE | 2.39E-2 | 4.15E-2 |
| | | CS-FE | 3.03E-16 | 9.38E-16 |

이상의 조각시험 결과에서 수치적분 오차를 내포하고 있는 BG-NE 법과는 달리 델라우니 삼각형 기반의 시험 형상함수를 구성한 PG-NE 법에서는 적분오차가 거의 발생하지 않는다는 것을 충분히 확인할 수 있다.

## 5. 결 론

이전의 Sibson 또는 Laplace 보간기법을 채용한 BG-NE 법은 MLS, RKPM 등의 근사기법의 단점을 보완할 수 있는 형상함수 자체의 우수한 성능 – 보간 특성, 불규칙한 절점배치에 대한 강인한 함수구성, 적분 배경격자의 자동적인 생성 – 에도 불구하고 수치적분과정에서 상당한 오차를 유발하여 조각시험을 통과하지 못할 뿐만 아니라 해석오차의 점근적 수렴(asymptotic convergence)을 보장하지 못하는 경우가 발생하기도 하였다. 이러한 BG-NE 법의 단점을 보완하기 위한 방안으로 델라우니 삼각형 기반의 시험 형상함수를 도입하여 적분함수와 적분영역 경계의 불일치로 인한 적분오차의 발생을 최대한 억제시킬 수 있게 하였으며, 시도 형상함수의 구성은 BG-NE 법과 동일하게 Laplace 보간기법을 적용하였다. 시험함수에 이용되는 델라우니 삼각형 기반의 형상함수는 일반적인 CS-FE 의 형상함수와 동일하며, Laplace 보간함수의 구성과정에서 델라우니 삼각형 정보는 이미 알려져 있으므로 시험 형상함수 적용을 위한 부가적인 계산비용은 거의 발생하지 않게 된다. PG-NE 법의 개념은 Dolbow 와 Belytschko[9]가 EFG 에서 수치적분 정도를 향상시키기 위해 제시한 경계상 자기법의 기본 개념과 동일한 배경에서 출발하지만, 미리 정해진 적분영역인 델라우니 삼각형의 경계와 일치하는 시험 형상함수를 구성함으로써 적분영역 내부에서만 적분함수가 정의되도록 하기 때문에 방법상으로는 상반된 접근법이라 볼 수 있다.

## 후 기

본 연구는 산자부 지역전략산업 석·박사 인력양성사업(2003.6-2006.4)지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

(1) Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P., 1992, “Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements,” *Computational Mechanics*, Vol. 10, pp. 307 –318.

(2) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., 1994, “Element-free Galerkin methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256.

(3) Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. F., 1995, “Reproducing kernel particle methods,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081-1106.

(4) Duarte, C. A. and Oden, J. T., 1996, “An h-p adaptive method using clouds,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 237-262.

(5) Melenk, J. M. and Babuska, I., 1996, “The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 289-314.

(6) Sukumar, N., Moran, B. and Belytschko, T., 1998, “The natural element method in solid mechanics,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, pp. 839-887.

(7) Sukumar, N, Moran, B., Semenov, A. Yu and Belikov, V. V., 2001, “Natural neighbor Galerkin methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 1-27.

(8) Becker, E. B., Carey, G. F. and Oden, J. T., 1981, *Finite Elements: An Introduction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J..

(9) Dolbow, J. and Belytschko, T., 1999, “Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods,” *Computational mechanics*, Vol. 23, pp. 219-230.