

직방성체에서 재료주축과 경사진 균열의 임계응력

임원균[†] · 조형석^{*}

Critical Stress for a Crack Inclined to Principal Material Direction in Orthotropic Material

Won-Kyun Lim and Hyoung-Seok Cho

Key Words: Crack extension(균열진전); Orthotropic material(직방성재료); Biaxial loading(2축하중); Inclined crack(경사균열); Critical stress(임계응력); 재료주축(Principal material direction)

Abstract

The problem of predicting the fracture strength behavior in orthotropic plate with a crack inclined with respect to the principal material axes is analyzed. Both the load to cause fracture and the crack direction of crack growth are of interest. The theoretical results based on the normal stress riation theory show significant effects of biaxial loading and the fiber orientation on the crack growth angle and the critical stress. The additional term in the asymptotic expansion of the crack tip stress field appears to provide more accurate critical stress prediction.

1. 서 론

적층복합재료의 파괴를 예측하는데 있어서의 기본문제는 이미 존재하는 균열이나 결함에서 균열이 진전하려는 하중과 이의 균열진전방향의 결정에 있다. 이와 같은 문제는 매우 복잡하다. 왜냐하면 일반적으로 3차원 응력상태가 노치를 가진 적층판에 존재하기 때문이다. 이의 해석에 앞서 우선적으로 고려해야할 문제는 단일 판재에 대한 균열진전방향과 균열진전을 일으키는 하중을 결정하는 일이다.

균열을 가진 복합재료의 강도거동 예측에 대한 이론적 연구는 그다지 많지 않다. 여기에는 수직

응력비기준[1], 텐서다항식기준[2], 최소변형율에너지밀도기준[3], 임계변형율에너지기준[4] 등이 있다. 이러한 소수의 이론적 수법 중에서 수직응력비이론은 직방성복합재료 내 균열진전거동을 비교적 정확히 나타내 주고 있다[5-7].

앞서의 연구[7]에서는 균열이 재료주축과 평행하게 놓인 균열에 대한 임계응력을 예측하였다. 본 연구에서는 보다 일반적인 균열로서 균열과 재료주축이 평행하지 않으며 일정한 각도를 이루는 균열이 2축방향으로 균일하중을 받는 중앙균열의 문제를 다룬다. 이를 위하여 수직응력비이론은 적용하며, 재료의 주축방향과 균열경사각이 이루는 각이 균열진전각도와 임계응력에 미치는 영향을 정량적으로 제시하고자 한다.

2. 2축하중을 받는 균열선단주위의 응력

Fig. 1과 같은 2축하중을 받는 무한 이방성평판 내 경사균열의 해석함수식은 Savin[8]에 의한 경사하중을 받는 타원공 해석해를 중첩하여 구할 수 있다. 이와 같은 수법으로 구한 균열선단에서

[†] 명지대학교 기계공학과

E-mail : limwk@mju.ac.kr

TEL : (031)330-6422 FAX : (031)321-4959

^{*} 명지대학교 대학원

의 응력성분들은 최승룡[9]에 의하여 다음과 같이 구하여졌다.

직각좌표로 표시한 식(1)의 응력성분들 중에서 σ_{xx} 의 우측 마지막 항은 직교이방성체내 균열선단 부근의 응력함수에 대한 급수전개식에서 비특이항 응력성분을 나타낸 것으로서, 이의 성분은 외부작용응력 σ^∞ 와 수평하중비 k , 균열경사각 α 그리고 특성방정식의 근 s_1, s_2 의 항으로 되어 있다.

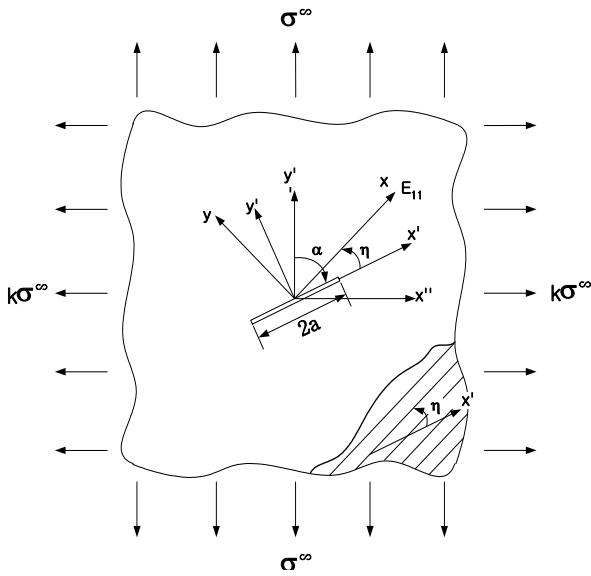


Fig. 1 Infinite center cracked plate under biaxial loading

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_2^2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{s_1^2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\ & + \sigma^\infty \operatorname{Re} [(\cos \alpha + s_1 \sin \alpha)(\cos \alpha + s_2 \sin \alpha) \\ & + k(\sin \alpha - s_1 \cos \alpha)(\sin \alpha - s_2 \cos \alpha)] \quad (1) \end{aligned}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right) \right] \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

여기서 K_I 과 K_{II} 는 모드I 과 모드II의 응력확대계수로서 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_I = & (\sigma^\infty \sin^2 \alpha + k \sigma^\infty \cos^2 \alpha) \sqrt{\pi a} \\ = & \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{2} [(1+k) - (1-k) \cos 2\alpha] \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{II} = & -(k \sigma^\infty - \sigma^\infty) \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\pi a} \\ = & \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{2} (1-k) \sin 2\alpha \quad (5) \end{aligned}$$

3. 균열축에 대한 특성방정식의 근

Fig. 1과 같은 일방향복합재료에서 재료주축인 x, y 축에 대한 특성방정식은 다음과 같다.

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (6)$$

여기서 a_{ij} 는 컴플라이언스 계수로서 직교이방성체에서는 $a_{12} = a_{26} = 0$ 이다. 상기 특성방정식으로부터 구한 특성방정식의 근을 s'_1, s'_2 이라고 하면 균열축인 x', y' 에 대한 이들의 값은 다음의 Lekhnitskii[10] 축변환식을 이용할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_1 = & \frac{s'_1 \cos \eta - \sin \eta}{\cos \eta + s'_1 \sin \eta} \\ s_2 = & \frac{s'_2 \cos \eta - \sin \eta}{\cos \eta + s'_2 \sin \eta} \quad (7) \end{aligned}$$

식(7)의 근은 실수가 아니며 복소수나 순허수의 값을 가진다. 이렇게 변환된 특성방정식의 근 s_1, s_2 을 식(1)~(3)에 대입하여 균열선단주위의 응력분포를 구할 수 있다.

4. 임계응력의 결정

이방성 복합재료 내 균열의 진전방향과 임계 응력의 예측을 위하여 Buczek 와 Herakovich[1]에 의해 개발된 수직응력비기준을 적용하였다. 복합 재료에 있어서 균열의 진전은 Fig. 2 에서와 같이 섬유 방향에 따라 다른 이방성강도함수 $T_{\theta\theta}$ 를 가정하고, 이를 원주인장응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 에 나누어줌으로써 얻은 값 즉, 수직응력비 R_0 가 최대인 방향으로 균열이 진행하며, 균열진전은 이의 값이 임계 값, R_0max 에 도달했을 때 일어난다고 가정한다. 이에 대한 필요충분조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_0(r_0, \theta) = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_0, \theta)}{T_{\theta\theta}} \quad (8)$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 R_0}{\partial \theta^2} < 0 \quad (9)$$

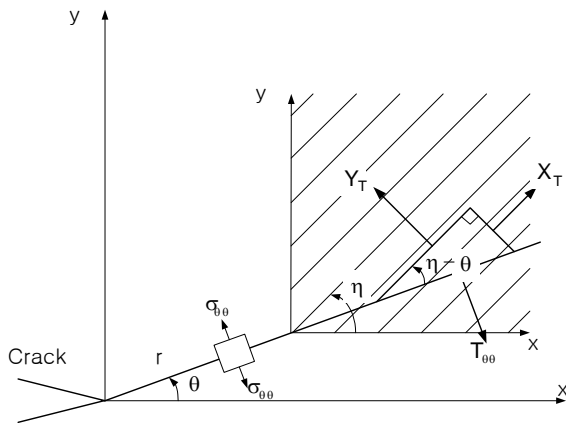


Fig. 2 Normal stress ratio parameters.

여기서 $T_{\theta\theta}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$T_{\theta\theta} = X_T \sin^2(\eta - \theta) + Y_T \cos^2(\eta - \theta) \quad (10)$$

위의 식에서 X_T 는 재료주축 방향의 인장강도이

고, Y_T 는 재료주축과 수직방향의 인장강도이다.. 한편 균열선단 주위의 원주응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (11)$$

식(1)~(3)을 식(11)에 대입하면 다음의 원주응력 분포식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (A \sin^2 \theta - 2E \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} (B \sin^2 \theta - 2F \sin \theta \cos \theta + D \cos^2 \theta) \\ & + \sigma^\infty L \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} A = & \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_2}{z_2} - \frac{s_1}{z_1} \right) \right] \\ B = & \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_2^2}{z_2} - \frac{s_1^2}{z_1} \right) \right] \\ C = & \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1}{z_2} - \frac{s_2}{z_1} \right) \right] \\ D = & \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) \right] \\ E = & \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \right] \\ F = & \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1}{z_1} - \frac{s_2}{z_2} \right) \right] \\ L = & \operatorname{Re} [(\cos \alpha + s_1 \sin \alpha) (\cos \alpha + s_2 \sin \alpha) \\ & + k (\sin \alpha - s_1 \cos \alpha) (\sin \alpha - s_2 \cos \alpha)] \end{aligned} \quad (13)$$

식(10)과 식(12)를 식(8)에 대입하고 정리하면 수직응력비 R_0 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} R_0 = & \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{(K_I A + K_{II} B) \sin^2 \theta + (K_I C + K_{II} D) \cos^2 \theta}{X_T \sin^2(\eta - \theta) + Y_T \cos^2(\eta - \theta)} \\ & - \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{2(K_I E + K_{II} F) \sin \theta \cos \theta}{X_T \sin^2(\eta - \theta) + Y_T \cos^2(\eta - \theta)} + L_R \end{aligned} \quad (14)$$

여기서

$$L_R = \frac{\sigma^\infty L \sin^2 \theta}{X_T \sin^2(\eta - \theta) + Y_T \cos^2(\eta - \theta)}$$

여기서 L_R 은 $\sigma_{\theta\theta}$ 의 원주응력성분에서 비특이항인 $\sigma^\infty L \sin^2 \theta$ 을 고려하였을 때 부가되는 새로운 항으로, 여기에는 특성방정식의 근, 수평하중비, 균열경사각, 재료강도 그리고 균열축과 재료주축이 이루는 각도들이 포함되어 있다.

수직응력비 이론의 가정으로부터 균열진전은 수직응력비의 최대값, $R_0(\max)_a$ 에서 일어나므로 순수모드 I의 경우 $R_0(\max)_a$ 는 식(14)에 $k=0$, $\eta=0$, $\alpha=90^\circ$ 와, $\theta=\theta_0=0$ 을 대입하여 구할 수 있으며 이는 다음과 같다.

$$R_0(\max)_{\alpha=90^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{K_{IC} C}{Y_T} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{\sigma_c^\infty}{Y_T} \sqrt{\pi a} \\ = \sigma_c^\infty \sqrt{\frac{\pi a}{2r}} \frac{1}{Y_T} \tag{15}$$

여기서 $K_{IC} = \sigma_c^\infty \sqrt{\pi a}$ 이고, $C=1$ 이다. 한편 혼합모드인 경우 $R_0(\max)_a$ 는 식(14)에 $\theta=\theta_0$ 을 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_0(\max)_a \\ = \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{(K_I A + K_{II} B) \sin^2 \theta_0 + (K_I C + K_{II} D) \cos^2 \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} \\ - \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{(2K_I E + 2K_{II} F) \sin \theta_0 \cos \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} + L_R(\theta_0) \tag{16}$$

여기서 $L_R = \frac{\sigma_c^\infty L \sin^2 \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)}$ 이다.

식(16)에 식(4)와 (5)인 K_I 과 K_{II} 를 대입하여 정리하면 상기식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_0(\max)_a = \sqrt{\frac{\pi a}{2r}} \cdot \frac{\sigma_c^\infty}{2} \cdot \left[\frac{(GA + HB) \sin^2 \theta_0 + (GC + HD) \cos^2 \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} \right. \\ \left. - \frac{(2GE + 2HF) \sin \theta_0 \cos \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} + \sqrt{\frac{2r}{\pi a}} \frac{2L \sin^2 \theta_0}{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)} \right] \tag{17}$$

여기서

$$G = [(1 + k) - (1 - k) \cos 2\alpha]$$

$$H = (1 - k) \sin 2\alpha \tag{18}$$

식(15)와 식(17)를 같다고 놓으면 혼합모드의 임계응력비, $\sigma_c^\infty / \sigma_c^\infty$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\sigma_c^\infty}{\sigma_c^\infty} = \left[\frac{2}{Y_T} \cdot \{X_T \sin^2(\eta - \theta_0) + Y_T \cos^2(\eta - \theta_0)\} \right] / \\ \left[\{(GA + HB) \sin^2 \theta_0 + (GC + HD) \cos^2 \theta_0\} \right. \\ \left. - (2GE + 2HF) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \sqrt{\frac{2r}{\pi a}} 2L \sin^2 \theta_0 \right] \tag{19}$$

5. 수치해석결과 및 고찰

수치해석을 위하여 Fig. 1과 같이 2축하중을 받는 직방성복합재료 내 중앙경사균열에 대하여 해

Table 1 Properties of orthotropic materials(GPa)

	Material A	Material B
E_{11}	126.0	2.0
E_{22}	10.0	1.389
μ_{12}	5.61	0.769
ν_{12}	0.305	0.3
X_T	1.45	2.0
Y_T	0.0533	1.0

석을 수행하였다. 본 해석에서 사용된 재료의 특성치는 Table 1과 같으며 이방성재료 특성치가 비교적 큰 것을 ‘재료A’로 하고 작은 것은 재료B로 하였다. 균열각 α 는 모두 90도로 하였으며 균열선단으로부터의 거리 $r_0/a=0.01$ 로 놓았다.

Fig. 3은 재료A에 대하여 섬유배향각 η 에 대한 초기균열진전각도 θ_0 를 보여준 것으로서 수평하중비의 변화에 따라서 달리 도시하였다. 그림에서 실선은 균열선단주위의 응력식에서 특이응력 성분만을 고려하여 해석한 결과이고, 점선은 응력식에서 2차항인 비특이항까지를 고려한 결과이다. 특이항만을 고려한 해석결과에서는 모든 수평하중비에 대하여 동일한 값을 가지며 하나의 선으로 나타난다. 그러나 비특이항까지 고려한 결과는 수평하중비의 값에 따라서 약간씩 변화를

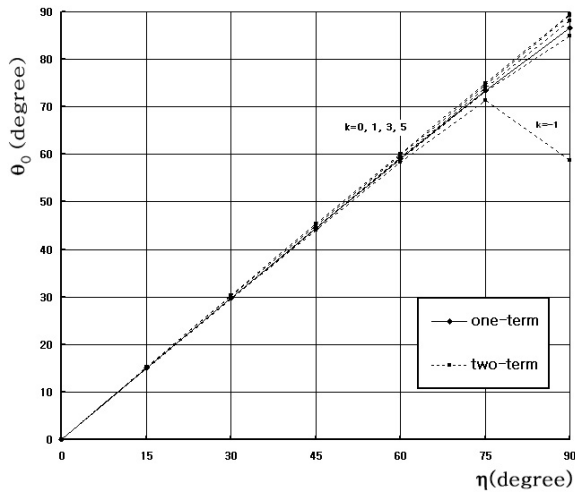


Fig. 3 Variation of θ_0 with η [Material A]

보이나 이의 차이는 매우 작다. 전반적으로 이방성 재료특성이 큰 재료에서 균열의 진전은 재료의 주축 방향을 따라서 일어남을 알 수 있다.

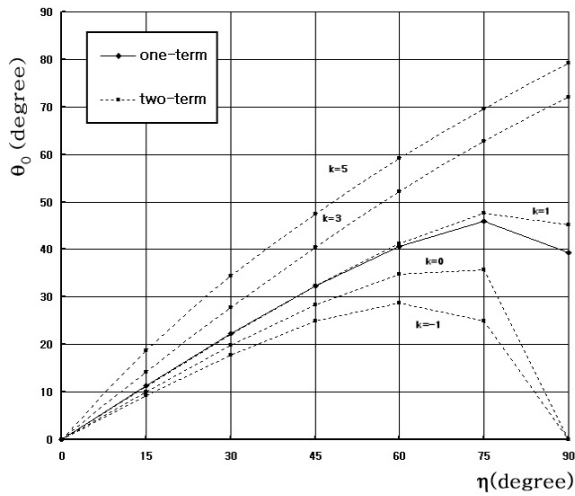


Fig. 4 Variation of θ_0 with η [Material B]

재료B에 대한 균열진전각도의 해석결과는 Fig. 4에 나타내었다. 앞에서와 마찬가지로 특이항만을 고려한 경우의 균열진전각은 수평하중비에 관계없이 모두 같은 값을 보이므로 하나의 실선으로 나타난다. 비특이항을 고려한 결과와 비교하여 볼 때 균열진전각은 수평하중비의 값에 많은 영향을 받고 있음을 알 수 있다. 일반적으로 균열은 재료주축 방향을 벗어나 진전할 수 있음을 알 수 있다. 이러한 현상은 섬유배향각의 값이 클수록 그리고 수평하중비의 값이 1보다 작은 값

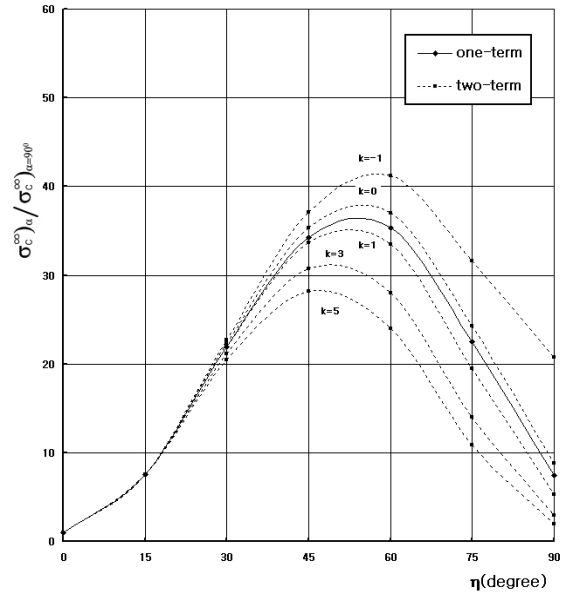


Fig. 5 Variation of $\sigma_c^\infty/\sigma_c^\infty|_{\alpha=90^\circ}$ with η [Material A]

을 가질수록 더욱 뚜렷하게 나타난다. 그러나 수평하중비가 인장으로 크게 작용하는 경우에는 재료주축의 방향과 근접하게 일어날 수 있다.

Fig. 5는 재료A의 섬유배향각 η 의 변화에 따른 임계응력비를 수평하중비 k 에 따라 도시하였다. 임계응력비 또한 균열진전각과 같이 특이항만 고려한 경우 수평하중비에 상관없이 일정한 값을 나타낸다. 그러나 비특이항까지 고려한 결과는 수평하중비의 값에 따라서 많은 변화를 보인다. 일반적으로 임계응력은 섬유배향각 $\eta=45^\circ$ 부근까지 상승하다가 이후에는 다시 감소한다. 이와 같은 현상은 재료특성치에 따라 약간씩 달라질 것으로 생각된다. 또한 수평하중비의 값이 압축으로 커질수록 임계응력의 값은 큰 값을 가진다.

재료B에 대한 임계응력의 해석결과는 Fig. 6에 나타내었다. 여기에서도 특이항만의 해석결과는 하나의 실선으로 나타난다. 전체적으로 재료A의 해석결과와 비교하여 비슷한 경향을 보이고 있으나 비특이항까지 고려한 임계응력의 크기는 수평하중비의 값에 그다지 많은 변화를 보이지 않는다. 수평하중비에 따른 임계응력의 최대값은 수평하중비의 값이 1일 때에 일어나며, 수평하중이 압축으로 작용하면 임계응력의 값은 점점 작아진다.

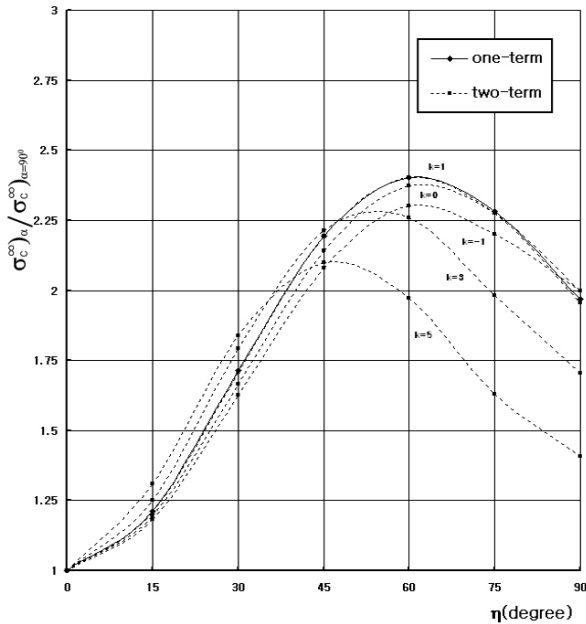


Fig. 6 Variation of $\sigma_c^{\infty}(\alpha) / \sigma_c^{\infty}(\alpha=90^\circ)$ with η [Material B]

6. 결론

2축하중을 받는 직방성재료에서 재료주축과 경사를 이루는 균열을 수직응력비 기준을 적용하여 파괴강도를 예측하였다. 얻어진 결론을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 이방성 특성치가 비교적 큰 재료에서 균열의 진전은 수평하중에 상관없이 섬유배향각을 따라서 일어난다. 그러나 임계응력의 크기는 수평하중의 영향을 많이 받으므로 비특이항을 고려한 임계응력의 예측이 필요하다.
- (2) 이방성 특성치가 작은 등방성에 가까운 재료에서 균열의 진전은 수평하중비에 따라서 많이 달라진다. 그러나 임계응력에서는 수평하중의 영향을 크게 받지 않으며 이의 차이는 아주 작다.
- (3) 직방성 재료에서 임계응력의 크기는 섬유배향각이 약 45도 부근까지는 상승하다가 그 이후는 다시 점점 작아지는 변화를 볼 수 있었다.

참고문헌

(1) Buczek, M.B and Herakovich, C.T., 1985, "A Normal Stress Criterion for Crack Extension

Direction in Orthotropic Composite Materials", J. Compos. Mater, Vol. 19, pp.544-553.

(2) Tsai, S.W and Wu, E.M., 1971, "A General theory of Strength for Anisotropic Materials", J. Compos. Mater, Vol. 5, pp.58-80

(3) Sih, G.C., Chen, E.P., Huang, S.L. and McQuillen, E.J., 1975, "Material Characterization on the Fracture of Filament-Reinforced Composites", J. Compos. Mater, Vol. 9, pp.167-186.

(4) Kadi, H.E and Ellyin, F., 1995, "Crack Extension in Unidirectional Composite Laminate", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 51, pp.27-36.

(5) Beuth Jr, J.L. and Herakovich, C.T., 1989, "Analysis of Crack Extension in Anisotropic Materials Based on Local Normal Stress", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 11, pp.27-46.

(6) 임원균, 최승용, 2002, "2축하중을 받는 직교 이방성체내 경사균열의 해석", 대한기계학회논문집 A, 제26권 제6호, pp.993-1000.

(7) 임원균, 조형석, 2003, "2축하중을 받는 직교 이방성재료 내 균열의 임계응력", 대한기계학회 '03년도 춘계학술대회 논문집, pp.37-42.

(8) Savin, G.N., 1961, Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press, Oxford.

(9) Choi, S.Y, 1996, "Biaxial Load Effects on the Crack Extension in Orthotropic Materials, MS Thesis, MyongJi University.

(10) Lekhnitskii, S.G., 1963, Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Holden-Day, San Francisco, USA