삼각형 요소의 격자 세분화를 이용한 자유 표면 유동장의 유한 요소 해석

김기돈† · 양동열* · 정준호**

Finite Element Analysis of Fluid Flow with Free Surface by using Grid Refinement of Triangular Elements

Ki Don Kim, Dong Yol Yang and Jun Ho Jeong

Key Words : Free Surface(자유표면), Grid Refinement(격자세분화), FEM(유한요소법)

Abstract

The analysis involves an adaptive grid that is created under a criterion of element categorization of filling states and locations in the total region at each time step. By using an adaptive grid wherein the elements, finer than those in internal and external regions, are distributed at the surface region through refinement and coarsening procedures, a more efficient analysis of transient fluid flow with free surface is achieved. Using the proposed numerical technique, the collapse of a dam is analyzed. The numerical results agree well with the theoretical solutions as well as with the experimental results. Through comparisons with the numerical results of several cases using different types of grids, the efficiency of the proposed technique is verified.

1. 서 론

유동선단이 존재하는 유동장을 해석하는 방법에는 초기 격자의 절점이 이동하면서 해석하는 라그랑지안(Lagrangian) 격자기법[1]과 움직이지 않는 오일러리안(Eulerian) 격자기법[2], 그리고 라그랑지안과 오일러리안 기법을 접목시킨 ALE 기법[4]으로 나눌 수 있다. 일반적으로 널리 사용되고 있는 라그랑지안과 오일러리안 격자 기법에 대하여 보다 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 라그랑지안 격자기법에 의한 해석은 유동선단, 속도장, 압력장 등의 해석결과가 정확한 대신 격자의 변형이 많이 일어날 때마다 격자 재구성 과정을 반복해야 하기 때문에 복잡한 형상을 가진 다이(die)에서는 충전 해석이 용이하지 못하다. 이에 반하여 오일러리안 격자기법은 초기 격자가 형상의 변형 없이 그대로 사용되거나 선택적으로 사용되기 때문에 기하학적으로 복잡한 다이 형상에서의 해석이 용이한 반면, 정확한 유동선단 예측과 자유 경계면에서의 경계조건 처리에 어려움이 따른다. 최근의 연구 경향을 보면 라그랑지안 격자기법보다 오일러리안 격자기법에 보다 더 활발한 연구 활동이 진행되고 있는데, 그 이유로는 첫째, 실제 산업 현장에서 사용되는 다이의 형상, 즉 제품 형상이 매우 복잡하여 특히 일반 유체, 용융금속, 고분자 유동 등을 해석하는데 있어 라그랑지안 격자기법은 한계가 있다는 점과 둘째, CAE 를 위한 상업화 된 코드는 비숙련자가 전혀 어려움 없이 원하는 결과를 손쉽게 얻어내는 것을 목표로 하고 있기에 수치해석 도중 사용자의 작업이 거의 필요 없는 오일러리안 격자기법이 상업화 된 코드에 보다 적합하기 때문이다. 오일러리안 격자 기법의 대표적인 방법은 Harlow 와 Welch 에 의한 MAC[2]법과 Hirt 와 Nichols 에 의한 VOF[3]법이 있다. 이 기법은 FDM 기법을 근간으로 발전되어 지금까지도 자유 유동장 처리기

† KAIST 기계공학과 대학원
E-mail : kidon.kim@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3260 FAX : (042)869-3254
* KAIST 기계공학과
** KIMM 지능형정밀기계연구부

법의 기본 개념을 제공하고 있다. MAC 은 단위체(cell)들을 가로질러 이동하는 인자(maker)들을 따라가며 유동장을 해석하는 방법으로 유체의 유동 특성을 잘 표현하고 있으나 유동의 진전에 있어 비압축성 조건을 만족시키기 어렵다는 단점이 있다. VOF 법은 비압축성 연속방정식을 근간으로 한 VOF (Volume of Fluid)를 각 단위체 마다 계산하고 계산된 VOF 를 가지고 유동장을 정의하는 방법이다. 이 기법은 FEM 분야에서도 응용 발전되어 고분자 사출성형 공정에서는 Broyer[4] 등에 의하여 고분자의 충전해석기법이 개발되었고, 금속 주조공정에 있어서는 Dhatt[5] 등에 의하여 용융금속의 충전해석을 위한 연구 결과가 발표된 사례가 있다.

앞에서도 언급한 바와 같이 오일러리안 격자기법은 많은 장점을 가지고 있는 반면, 유동선단과 검사체적(control volume)에서의 유출입량 계산과 정확한 유동선단 형상의 예측, 부분충전 검사체적에서의 자유단 경계조건 처리에 많은 어려움이 따른다. 또한, 유동장을 계산하기 위한 격자와 검사체적과는 서로 직접적으로 연계되어 있기 때문에, 유동장에서 수치해석 결과의 정확도를 높이기 위한 보다 미세한 크기의 격자사용은 격자 총수의 증가와 더불어 검사체적의 증가를 가져와 해석에 소요되는 시간이 기하급수적으로 커지는 결과를 낳게 된다. 이러한 문제점을 해결하고자 일반적인 사각형 검사체적에 적용되는 표면에서의 격자세분화 기법을 Jeong 과 Yang[6]이 제안하여 보다 정확한 유동선단 및 유체 유동의 물리적 현상을 예측하였다.

본 연구에서는 격자세분화 기법을 삼각형의 검사체적에 적용하는 방법을 제안하여 유동 선단부를 포함한 유동장 전체에 있어서 삼각형 격자에서의 수치해석 결과의 신뢰도를 높이고자 한다.

2. 본 론

2.1 지배방정식

비정상 비압축성 점성 유동장 해석을 위한 지배방정식은 가속도와 중력장을 모두 고려한 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식을 사용하였다.

연속(continuity)방정식:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad in \quad \Omega \tag{1}$$

Navier-Stokes 방정식:

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ &\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}(u) + \rho f_i \quad in \quad \Omega \end{aligned} \tag{2}$$

여기서, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}$,

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i = 1,2, \quad j = 1,2$$

그리고 t, u_i, p, ρ, μ, f_i 는 각각 시간(time), x_i 방향속도(velocity)성분, 압력(pressure), 밀도(density), 점도(viscosity), 내력(internal force)이며 σ_{ij} 는 응력(stress), d_{ij} 는 변형율 텐서(strain tensor)이다.

자유표면 $\partial\Omega_s$ 에서는 다음과 같은 응력에 대한 평형방정식이 적용된다.

$$\begin{aligned} &\sigma_n = -p + 2\mu_{air}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 \quad on \quad \partial\Omega_s \\ &\tau = \mu_{air}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_t} + \frac{\partial u_t}{\partial x_n}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 σ_n, τ, μ_{air} 는 각각 수직응력(normal stress), 전단응력(shear stress), 공기의 점도이다. 첨자 n, t 는 유동선단에서의 수직과 수평 단위 방향 벡터를 의미한다. 유동선단에서 표면장력(surface tension), 점성응력(viscous stress), 공기압은 고려하지 않는다. 벽면 경계면에 대한 수직 속도성분 u_{nw} 은 다음과 같이 처리한다.

$$u_{n^w} = 0 \quad on \quad \partial\Omega_{wall} \tag{5}$$

게이트(gate) 경계면 $\partial\Omega_{\text{inflow}}$ 에는 다음과 같은 필수경계조건(essential boundary condition)이 적용된다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad on \quad \partial\Omega_{\text{inflow}} \tag{6}$$

여기서 $\bar{u}_i$ 는 게이트 경계면에 설정된 속도 성분이다. 해석 초기(t=0)에는 설정된 속도 값 u_i° 을 전체 영역에 대해 정의되며, 본 연구에서는 u_i° = 0 이 사용된다.

$$u_i = u_i^\circ \quad on \quad \Omega \quad at \quad t = 0 \tag{7}$$

2.2 유한요소수식화

유동장에 대한 지배방정식 (1)과 (2)을 복합유한요소 수식화(mixed FE formulation)를 사용하여 약형(weak form)으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\rho\dot{u}_i\bar{u}_i + \rho u_j u_{i,j}\bar{u}_i + \bar{d}_{ij}(-p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij})d\Omega \;=\; \int_\Omega \rho\, f_i\, \bar{u}_i d\Omega \\ &\int_\Omega \bar{p}\left(\frac{p}{\kappa} + u_{i,i}\right)d\Omega \;=\; 0 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $u_i, \bar{u}_i, \kappa$ 는 각각 속도함수, 가중함수, 체

적 탄성 계수(bulk modulus) 이다. 식(8)의 복합 유한 요소 수식화를 위해서 삼각형의 P1+/P1 요소를 사용하였다. 이 요소는 무게 중심에 4 번째 절점이 존재하며 Galerkin 방법에 의한 Navier-Stokes 방정식의 안정한 해를 얻기 위한 Brezzi-Babuska 조건을 만족한다. 이와 같은 MINI 요소는 이차원에서 최소의 절점 수를 가지며 삼각형 요소로써 복잡한 형상을 나타내기 적합하며 선형 요소로써 격자 세분화 방법의 적용에 유용하다. 무게 중심에 있는 4 번째 절점은 속도 분포에 대하여 부분적인 선형 근사를 나타내며 3 개의 부속 삼각형으로 분할한다. 속도에 대한 형상함수는 세 개의 선형 요소와 한 개의 버블(bubble)함수로 정의되며 압력은 세 개의 선형 형상함수를 사용한다. 본 연구에서 버블 함수는 수치 적분을 위해서 아래와 같이 요소의 꼭지점에서 0 값을 가지며 부속의 삼각형에서는 부분 선형적이다.

$$u_k = \sum_{k=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{3} U_{k\beta} N_\beta + U_{kb} N_b, \quad \bar{u}_i = \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{3} \bar{U}_{i\alpha} N_\alpha + \bar{U}_{ib} N_b$$
$$N_b = C_1 \cdot N_1 N_2 N_3 \tag{9}$$
$$p = \sum_{\gamma=1}^{3} p_\gamma N_\gamma, \quad \bar{p} = \sum_{\delta=1}^{3} \bar{p}_\delta N_\delta,$$

여기서 $U_{k\beta}$ 과 $\bar{U}_{i\alpha}$ 는 속도함수와 가중함수(weighting function)에 대한 절점 값, N_β , N_α , N_b 는 속도성분, 가중함수에 대한 형상함수(shape function)과 버블 함수이며, p_γ 과 $\bar{p}_\delta$ 는 압력함수와 가중함수에 대한 절점(node)값, N_γ 와 N_δ 는 압력성분과 가중함수에 대한 형상함수이다.

각 요소에 해당하는 행렬을 구성할 때 삼각형 요소의 경우 4 번째 절점에 대한 속도 근사가 이루어지지만 'static condensation' 과정이 각 요소 수준에서 수행되어 3 절점의 삼각형 해석으로 되돌아간다. 식 (9)를 식 (8)에 대입하면 다음과 같은 유한요소 방정식을 얻게 된다.

$$M\dot{U} + CU + N(u) = F \tag{10}$$

여기서,

$$M = \int \rho N_\alpha N_\beta \delta_{ij} d\Omega ,$$
$$C = \int (-N_{\alpha,i} N_\gamma + \mu N_{\alpha,j} N_{\beta,i} + \mu \delta_{ij} N_{\alpha,k} N_{\beta,k}) d\Omega ,$$
$$N(u) = \int \rho \delta_{ij} N_\alpha N_{\beta,k} u_k d\Omega$$
$$F = \int N_\alpha f_i d\Omega$$
$$\bar{p}_\delta \left(-\int \frac{1}{\kappa} N_\delta N_\gamma d\Omega\right) p_\gamma + \bar{p}_\delta \left(-\int N_{\beta,j} N_\delta d\Omega\right) u_{j\beta} = 0$$

비선형 방정식인 식 (10)를 계산하기 위해 본 연구에서는 Predictor-Corrector 방법을 사용하였다.

2.3 적응 격자

부분 충전 검사 체적에서의 속도장을 정확하게 구하기는 오일러리안 격자기법의 특성상 매우 어렵다. 부분 충전 검사체적을 완전 충전된 검사체적으로 가정한 유동장을 가지고 속도장과 압력장을 계산했기 때문에 이러한 가정에서부터 비롯되는 수치적 오차는 필연적으로 존재하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 적응 격자 세분화 기법은 유동의 선단 부분의 격자를 미세하게 세분화하여 새로운 계산 영역을 설정함으로써 보다 실제의 유동과 비슷한 조건에서 해석이 수행될 수 있다. 이와 같은 적응 격자 세분화는 선단 부분에서만 격자의 세분화가 이뤄지므로 계산 영역의 요소수가 전체를 세분화한 방법에 비해 적으므로 계산시간의 감소와 저장용량을 절약할 수 있다. 또한, 선단의 세분화 정도를 조절하여 아주 유연한 자유 표면의 결과를 얻을 수 있다.

2.3.1 VOF 법에 적용된 적응 격자 기법

적응 격자기법의 적용을 위해서는 세분화가 될 표면 요소와 이미 세분화와 결합과정을 거친 내부와 외부요소로 전체 영역이 나누어진다. 이와 같은 적응 격자 기법을 요약하면 다음과 같다.

step 1: 전체 영역의 요소들이 내부, 외부 및 표면 요소로 분리
step 2: 현재의 새로운 표면 요소들을 이미 정한 수준으로 세분화 과정을 수행
step 3: 새로운 내부 및 외부의 요소들 중 세분화가 이뤄진 요소에 대한 결합과정을 수행
step 4: 격자 세분화의 확장

세분화의 과정은 삼각형 요소의 경우 4 개의 요소로 분리되며 4 개의 요소로 분리됐던 내부 및 외부의 요소들은 하나의 요소로 결합된다. 이와 같은 세분화와 결합의 과정에서 한 요소의 세분화의 수준은 주변 요소의 세분화의 수준과 일치하거나 한 단계의 차이를 넘어서는 안 된다. 이와 같은 규약은 유한 요소 해석에서의 편의성을 위한 것으로 한 변에서의 불연속 절점의 개수가 2 개 이상인 경우 해석상의 어려움이 발생한다.

다음의 조건들을 만족시키는 경우에 격자의 세분화와 세분화된 격자의 결합 과정이 이뤄지게 된다.

i)세분화를 위한 조건:

a)세분화된 표면 요소의 세분화 수준이 미리 정한 세분화 수준을 넘지 않아야 한다.

b)내부 및 외부 요소인 경우 다음의 조건을 만족시켜야 한다.

$$N - N^a < -1$$

여기서, N 과 N^a 은 요소의 세분화 수준과 주변 요소의 세분화 수준을 의미한다.

ii)세분화된 격자의 결합 조건:
이미 4 개로 분리 되었던 요소이고 아래의 조건을 만족시켜야 한다.

$$N - N^a > -1$$

위와 같은 조건을 만족하는 요소들에 대하여 세분화와 결합 과정을 수행한 후 표면 요소만 급격히 세분화 되는 것을 방지하기 위해 격자세분화를 확장하는 과정을 거치게 된다. 이와 같은 확장은 표면 요소에서 내부의 격자로 진행된다.

2.3.2 불연속 절점의 처리

2 차원 삼각형 요소를 4 개의 요소로 세분화 하는 경우 주변 요소의 절점과 일치하지 않는 절점이 발생한다. 주변 요소의 세분화 수준에 따라서, 즉 세분화 수준이 한 단계 높거나 같은 경우에 따라 각 요소의 면에 불연속 절점이 발생할 수 있다.

Fig. 1 의 경우, 요소는 1 에서 3 개까지의 불연속 절점을 갖게 된다. 이와 같은 경우에 유한요소 해석을 위해서 절점에 특별한 제한 요건들이 필요하지만, 삼각형 요소의 특성을 살려 *.5 수준의 Fig. 1 과 같은 요소를 생성할 수 있다. 여기서 '*' 는 불연속 절점이 있는 주변 요소의 세분화 수준을 의미한다.

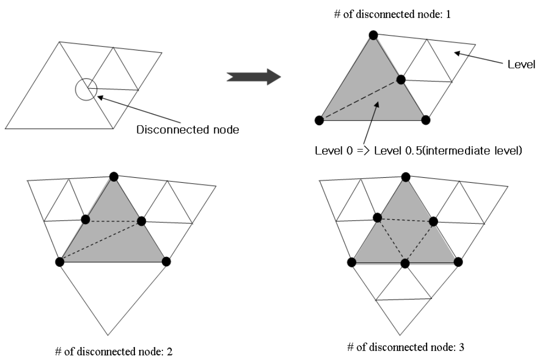


Fig. 1 Generation of *.5 level element

이와 같은 *.5 수준의 요소는 항상 내부의 요소에 생성되기 때문에 자유 표면의 형상을 위해 표면 격자를 세분화한 것에 영향을 미치지 않으며, 단지 세분화된 격자에 대한 해석만을 더 수행함으로써 격자 세분화로 발생하는 불연속 절점의 문제를 쉽게 처리할 수 있다. *.5 수준의 요소는 유한 요소 해석을 수행하는 과정 전에 잠시 생성되었다가 다시 해석이 수행된 후 바로 제거되어 각 요소의 VOF 값 등을 계산하는 부분에 영향을 미치지 않게 된다.

3. 해석 결과

3.1 붕괴하는 물 댐의 해석

본 절에서는 자유 표면의 비정상 유동의 해석의 대표적인 문제인 댐이 붕괴 문제에 대하여 제안한 방법을 검증한다. 3 가지 경우의 격자 형태에 대하여 해석이 진행되는데, case Ⅰ, Ⅱ는 고정 격자이며 case Ⅲ은 적응 격자 세분화가 적용된다. 각 경우에 대하여 유동의 선단을 Martin[7]의 실험 결과와 비교하고 전체 자유 표면에 대한 이론 및 실험적 해가 없어 가장 격자의 밀도가 높은 case Ⅰ의 경우를 전체 자유표면의 근접한 해라고 가정하여 case Ⅱ, Ⅲ을 비교한다. 각 경우의 초기 격자의 수를 살펴보면, case Ⅱ는 case Ⅰ의 격자 수의 1/4 이며 case Ⅲ는 case Ⅰ의 격자 수의 1/64 이다. 해석하고자 하는 댐의 형상은 Fig. 2 와 같이 댐 기둥의 넓이에 대한 높이의 비(b/a)가 2 이다. 계산에 사용된 물질 상수는 물의 밀도 1000kg/m^3, 점성 0.001kg/m·s 그리고 중력가속도 9.8m/s^2 등이다.

해석의 결과 표현에는 무차원화된 시간 $T = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ 를 사용하여 나타낸다. Fig. 3 은 case Ⅰ에 대하여 T=1., 2., 2.9 에 대한 예측된 자유 표면과 속도 분포를 나타낸다. Case Ⅰ의 경우 초기의 격자가 매우 세분화 되어 있어 안정적인 속도 분포와 부드럽고 실제에 가까운 자유 표면의 결과를 얻는다. Fig. 4 은 case Ⅱ에 대하여 해석된 자유 표면과 속도 분포를 나타낸다. Case Ⅰ의 결과와 비교하여 case Ⅱ는 유동의 선단 부분이 부정확함을 알 수 있다. 적응 격자 세분화 과정이 적용된 case Ⅲ에서는 세분화 수준이 3 으로 설정되어 해석된다. Fig. 5 는 case Ⅲ의 각 시간에 대한 격자의 구성과 자유표면 속도장의 분포를 나타낸다. 위의 결과와 같이, 자유 표면에서 효과적으로 격자 세분화 과정이 수행되면서 부드러운 자유표면과 안정적인 속도 분포를 얻는다.

Fig. 6 은 바닥과 맞닿아 흐르는 유동 선단의 위치를 Martin[7]의 실험과 비교한 결과를 나타낸다. Case Ⅰ, Ⅲ은 실험 결과와 매우 근접한 결과를

나타내지만, case Ⅱ의 경우는 자유 표면을 구성하는 격자 크기의 한계로 실험 결과와 부분적인 오차를 나타내고 있다. 해석 중의 평균적인 격자와 절점의 수를 각 경우에 대하여 Table 1 에 비교하였으며 더불어 각 경우의 계산 시간에 대한 비교도 덧붙였다. 비교 결과에서 보듯 case Ⅰ의 경우가 가장 많은 시간과 메모리를 소모하며 case Ⅲ은 사용된 평균 격자의 수에서 가장 적은 메모리를 사용하였고 계산 시간에서는 case Ⅱ에 비하여 약 60% 정도 더 많은 시간이 소요되었다. 이와 같은 결과는 계산의 사용된 격자의 수에서 평균적으로는 효율적 이었지만, 표면에서 격자 세분화를 하는 과정의 수행으로 실제의 유동 계산 외에 많은 시간이 소요됨을 알 수 있다.

결론적으로 더 많은 격자를 사용한 case Ⅱ에 비해 초기 격자가 적은 상태로 격자 세분화를 적용한 case Ⅲ가 전체적인 자유 표면을 구성함에 있어 case Ⅰ과 더욱 일치하였으며 case Ⅲ의 경우 가장 효율적인 메모리가 사용됨을 알 수 있다. 계산 시간에 있어서는 case Ⅰ과 case Ⅱ의 사이에 case Ⅲ의 계산 시간 결과가 존재한다. 자유 표면을 갖는 비정상 유동인 댐의 붕괴 문제 해석으로부터 적응 격자 세분화의 효율성을 보였다.

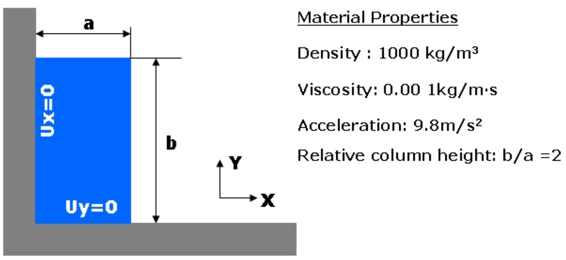
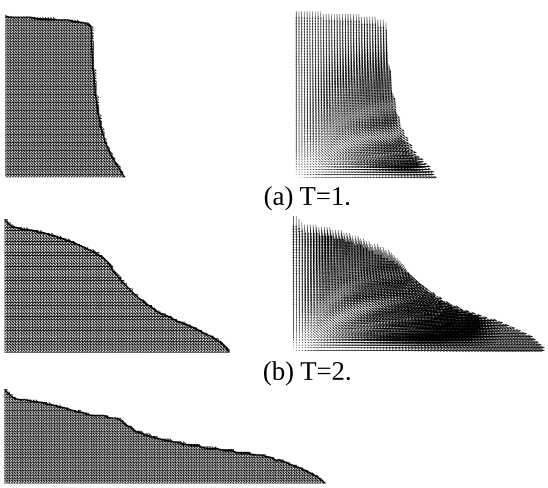
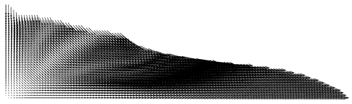


Fig. 2 Schematic diagram of initial water dam and boundary condition on wall





(c) T=2.9

Fig. 3 Predicted free surfaces, element configurations and velocity field obtained in case I

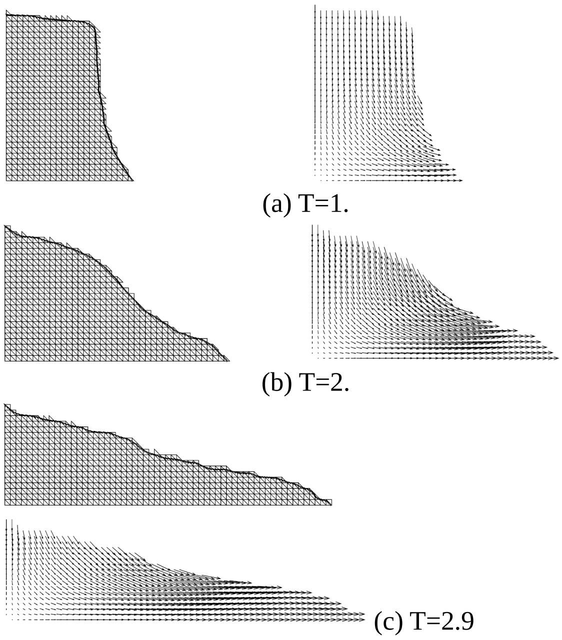


Fig. 4 Predicted free surfaces, element configurations and velocity field obtained in case II

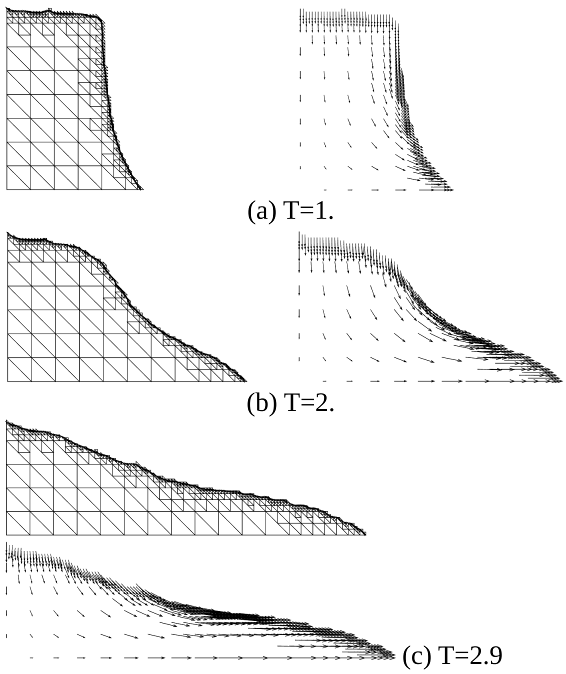


Fig. 5 Predicted free surfaces, element configurations and velocity field obtained in case III

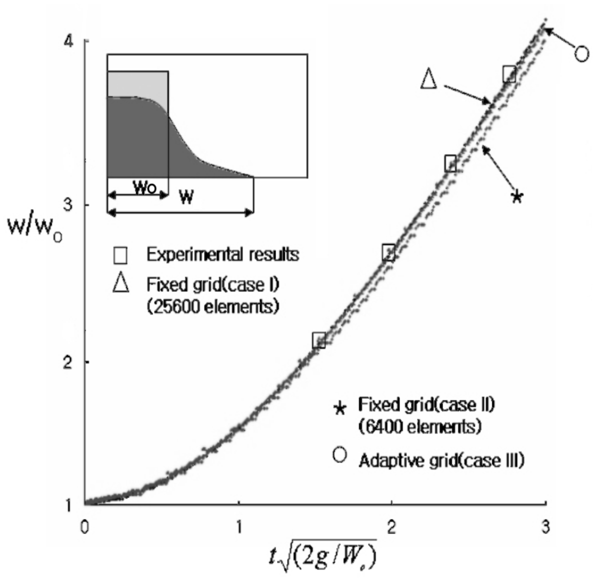


Fig. 6 Predicted front position variation versus time compared with experimental result by Martin[7]

Table 1 Comparison of results obtained in cases

	case I (Fine Fixed Grid)	case II (Fixed Grid)	case III (Adaptive)
Total # of nodal points	13041	3321	231
Total # of elements	25600	6400	400
Total # of control volumes	4336	1768	1248
Relative computational time	12.3	1.	1.6

4. 결 론

삼각형 검사체적을 갖는 요소에 대한 적응격자 세분화 기법의 타당성 검토를 위하여 물 댐의 붕괴 시 유체의 흐름을 예측하는 예제에 대하여 적용한 바 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 적응 격자 세분화 기법의 적용은 부분 충전 검사체적에서의 미충전 부분의 제거가 가능하여 유동 선단에 의하여 예측된 형태에 보다 접근한 유동장을 얻을 수 있었다.

(2) 유동선단부의 격자를 미세하게 생성시킴으로써 속도장과 압력장을 보다 효율적이면서 정확하게 계산할 수 있었다.

(3) 적응격자 세분화 기법을 물 댐의 붕괴 문제의 수치 모사에 적용하여 안정적인 유체의 흐름 현상 예측과 실험 결과에 근접한 해석 결과를 얻을 수 있었다.

참고문헌

(1) Balasubramaniam Ramaswamy and Mutsuto Kawahara, 1987, “Lagrangian Finite Element Analysis Applied to Viscous Free Surface Fluid Flow,” Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 7, pp. 953-984.

(2) Harlow, F.H. and Welch, J. E, 1995, “Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface,” Phys. Fluids, Vol. 8, pp. 2182-2189.

(3) Hirt, C. W. and Nicholds, B. D., 1981, “Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries,” J. Comput. Phys., Vol. 39, pp. 201-225.

(4) Broyer, E., Gutfinger, C. and Tadmor, Z., 1975, “A Theoretical Model for the Cavity Filling Process in Injection Molding,” Trans. Soc. Rheol., Vol. 19, pp. 423-444.

(5) Dhatt, G., Gao, D.M. and Ben, Cheikh A., 1990, “A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds,” Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 30, pp. 823-831.

(6) J. H. Jeong and D. Y. Yang, 1998,”Finite Element Analysis of Transient Fluid Flow with Free Surface using VOF Method and Adaptive Grid,” Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.26, pp. 1127-1154.

(7) J. C. martin and W. J. Moyce, 1952, “An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane,” Philos. Trans. Ser. A, Math. Phys. Sci., Vol. 244, pp. 312-324.