

동심원 형상 홈이 파여진 원판이 회전하고 있을 때의 실린더 내부유동에 관한 연구

윤명섭[†]·박준상*·현재민**

Flow in a cylinder driven by rotating disk with concentric-grooved surface

Myung Sup Yoon, Jun Sang Park and Jae Min Hyun

Key Words: Rotating flow(회전유동), Rotating disk(회전원판), Grooved disk(디스크 홈), Ekman pumping(에크만 펌핑), Cylindrical container(실린더용기), Torque coefficient(토크상수), Swirl motion activation(스월모션 활성화), Disk roughness(디스크 거칠기)

Abstract

A numerical study is made of a flow in a cylinder with a rotating grooved endwall disk. The aim is to describe differences in the flow fields when there is concentric-grooved obstacle characterized by amplitude(a) and wave number(N). The Reynolds number(Re) is varied from 10^3 to 10^4 and the aspect ratio(Ar) fixed to 1.0 for the most part of the simulation. For the various cases of amplitude(a) and wave number(N), numerical results are acquired. As the endwall groove roughness increases until certain limit, the interior azimuthal velocity component(v) increases drastically. But over the limit, the swirl motion characterized by velocity v decreases and finally it approaches much alike $Ar=1.0-a$ case.

The reason of activating swirl motion is based on increasing of torque transported by endwall disk. Torque coefficients(C_T) are acquired for the various (a, N, Re) combinations and the limiting phenomena of swirl motion activation is explained.

기호설명

H	:	실린더 높이	N	:	R_d 내의 그루브 웨이브 넘버
R_c	:	실린더 반지름	a	:	R_c 로 무차원된 그루브의 진폭
R_d	:	디스크 반지름	λ	:	R_c 로 무차원된 그루브의 파장
b	:	gap의 크기, ($= (R_c - R_d) / R_c$)	ρ	:	유체의 밀도
Ar	:	실린더 왜장비, ($= H / R_c$)	p	:	$\rho(R_c \omega)^2$ 로 무차원된 압력
w	:	실린더 바닥면 회전각속도	ψ	:	유선 함수
ν	:	유체의 점성계수	T	:	디스크에 작용하는 토크
Re	:	레이놀즈 수, ($= w R_c^2 / \nu$)	C_T	:	토크상수, ($= 4T / \rho w^2 R_c^5$)
(r, θ, z)	:	R_c 로 무차원된 원통형 좌표계	Q_p	:	스월유량,
(u, v, w)	:	$R_c \omega$ 로 무차원된 속도			$(= \int_a^1 \int_0^1 v \, dr dz) / (1-a)$

[†] 한국과학기술원 대학원 기계공학과

E-mail : msyoon@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3052

* 한라대학교 기계공학과

** 한국과학기술원 기계공학과

1. 서론

밀바닥면이 일정한 각속도(w)로 회전하고 있는 실린더[반지름 R_c , 높이 H]내의 비압축성 유동은 회전유동분야에서 매우 고전적인 문제이다. 이러한 경우 유동은 회전 레이놀즈수(Re) 및 실린더 왜장비(Ar)의 두가지 무차원 수로 결정된다. 응용기술 측면에서 큰 Re 수와 $Ar \sim O(1)$ 인 경우에 많은 연구가 이루어졌으며, 여러 논문들에 내부 유동장에 대한 수치계산 및 실험결과가 잘 정리되어 있다(e.g., Pao⁽¹⁾, Lugt⁽²⁾, Fujimura⁽³⁾ et al.).

실린더내 회전유동에서의 대표적인 특징은 내부영역에서 세가지 방향의 속도성분 (u, v, w)가 z 방향으로 일정하다는 Taylor-Proudman 법칙(e.g., Greenspan⁽⁴⁾)과 에크만 경계층으로 불리는 $Re^{-1/2}H$ 두께의 점성경계층이 돌고있는 밀면(정지한 윗면)에 흡입(방출)을 일으킴으로써 $r-z$ 좌표평면에서 생기는 2차유동(meridional flow) 이다⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾.

하지만 대다수의 연구들은 바닥면이 평평하거나 매끄러운 경우이다. 응용기술 측면에서 회전하는 바닥면이 일정한 거칠기를 가질때 전반적인 유동변화와 바닥면에 작용하는 마찰계수에 대해 다룬 논문은 많지 않다. 따라서 본 연구는 이와 같은 관점에서 그루브가 존재하는 디스크의 회전 유동 현상에 대해 다루었다.

밀바닥면의 그루브 형태가 동심원 형태의 사각파인 경우에 대하여 Navier-Stokes 방정식의 수치모사를 수행하였다. 사각파의 높이 및 파장을 변화시킬때 내부유동의 변화 및 바닥면에 작용하는 마찰계수의 변화에 대하여 알아보고 그 상관관계를 분석하였다.

2. 지배방정식 및 수치기법

2.1 모델 및 지배방정식

Fig. 1은 연구에서 사용한 모델이다. 밀도가 ρ 이고 점성계수가 μ 인 비압축성 유체로 채워져 있고 밀면만이 일정한 각속도 w 로 회전하고 있는 정상상태의 문제이다. 밀면의 형상은 높이가 a 이고 파장이 λ 인 사각파(square wave)인 요철의 형상이다.

2차원 축대칭의 문제이며 길이, 속도, 압력을

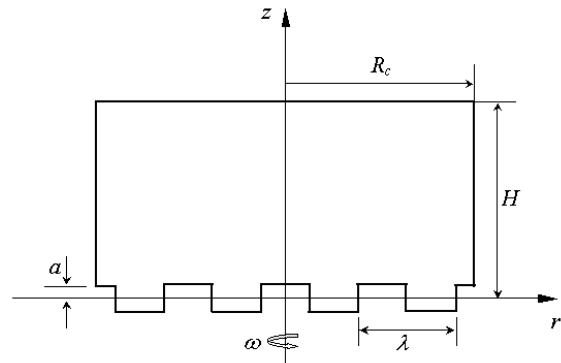


Fig. 1 Schematic diagram of the model.

각각 $R_c, R_c w, \rho(R_c w)^2$ 로 무차원하여 다음과 같은 무차원화된 지배방정식을 얻는다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + Re^{-1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] \tag{2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Re^{-1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right] \tag{3}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + Re^{-1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \tag{4}$$

경계조건은 다음과 같다.

$$u = w = 0, v = r \quad \text{at } z = a \cdot \text{sgn}[\cos(2\pi Nr)], 0 \leq r \leq 1.0 - b \tag{5}$$

$$u = w = 0, v = v_c(r) \quad \text{at } z = a, 1.0 - b \leq r \leq 1.0 \tag{6}$$

$$u = v = w = 0 \quad \text{at } z = Ar, 0 \leq r \leq 1.0 \tag{7}$$

$$u = v = w = 0 \quad \text{at } r = 1.0, 0 \leq z \leq Ar \tag{8}$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{as } r \rightarrow 0, 0 \leq z \leq Ar \tag{9}$$

식 (6)의 경계조건은 디스크와 실린더사이의 gap의 존재를 고려한 경계조건으로, Lang⁽⁵⁾의 논문에서와 같이 Couette 유동으로 가정한다.

$$v_c(r) = \frac{(1-b)^2}{1-(1-b)^2} \left[\frac{1}{r} - r \right] \quad \text{where } b = \frac{(R_c - R_d)}{R_c} \tag{10}$$

b 는 실린더와 디스크의 사이의 gap크기으로써,

모든 계산경우에 $b=0.025$ 의 값으로 고정시켰다.

2.2 수치기법

위에 정의된 문제의 해를 구하기 위해 대표적인 FVM 방법인 Patankar⁽⁶⁾의 SIMPLER 알고리즘을 이용하였고, QUICK scheme⁽⁷⁾을 사용하여 주어진 방정식을 풀었다.

3. 결과 및 고찰

3.1 Flat 디스크와 Groove 디스크 경우의 비교

기존의 평평한 바닥면이 회전하는 경우와 요철 바닥면이 회전하는 경우 실린더 내부유동의 차이를 알아보기 위해 다양한 파라미터(a, N, Re)를 변화시켰다. a 는 요철바닥면의 진폭이고 N 은 요철의 개수를 의미한다. a 와 $N(=R_d/R_c\lambda)$ 이 커질수록 바닥면의 거칠기가 증가한다고 볼 수 있다. 요철만의 효과를 명확히 알기 위하여 실린더의 채장비는 $Ar=1.0$ 으로 고정시켰다.

먼저, 디스크 요철의 직접적인 효과를 볼 수 있는 자오면($r-z$ plane)상의 유선을 Fig. 2에 나타내었다. (a)와 (b)의 경우 모두 $Re=10000$ 이고 (b)에서 요철의 진폭은 $a=0.1$, 요철 갯수는 $N=5$ 이다. 보다 다양한 요철의 형상 및 Re 에 대한 자오면상의 유선은 Fig. 5에 잘 나타나 있다.

Fig. 2를 볼 때, 요철이 있는 경우와 없는 경우의 양상은 정성적으로 별 차이가 없다. 즉, 회전 유동에서 전형적으로 나타나는 2차유동의 모습이 다. 실린더 내부와 디스크면의 와도 차이에 의해 바닥면에서(윗면에서) 에크만 흡입(방출)이 일어나고, 흡입된 유동은 디스크 표면을 따라 원심력의 효과로 반경방향으로 밀려나며, 다시 측벽을 타고 올라가 순환하는 구조이다.

정량적인 비교를 위하여 $z=0.5$ 지점에서의 속도 분포를 비교하였다. 이는 Fig. 3에 도시하였다. Fig. 3(a)에서 회전 바닥면에 요철이 있는 경우 v -profile의 기울기가 증가하는데, 이것은 곧 실린더 내부의 스윙운동(swirl motion)이 활성화 됐음을 말해준다. 또한 (b), (c)에서는 요철형상에 의한 속도분포의 요동(fluctuation)을 볼 수 있다. 본 논문에서는 스윙운동이 활성화되는 원인을 알아보고 스윙운동을 대표하는 물리적 변수와 디스크 거칠기(disk roughness)간의 상관관계를 알아보는 데 중점을 둔다.

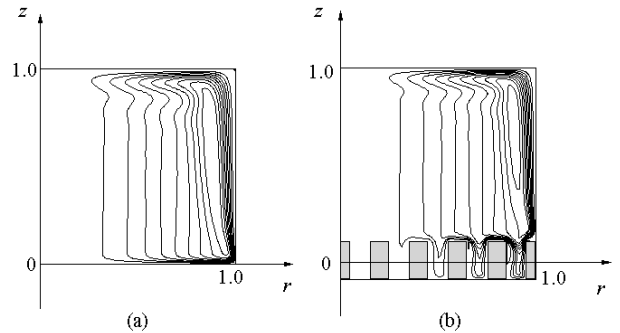


Fig. 2 Contour plots of meridional stream function.
 (a) $a=0$. $\Delta\psi=4\times 10^{-4}$, $\psi_{\max}=0.00397$.
 (b) $a=0.1$, $N=5$. $\Delta\psi=4\times 10^{-4}$, $\psi_{\max}=0.00428$.

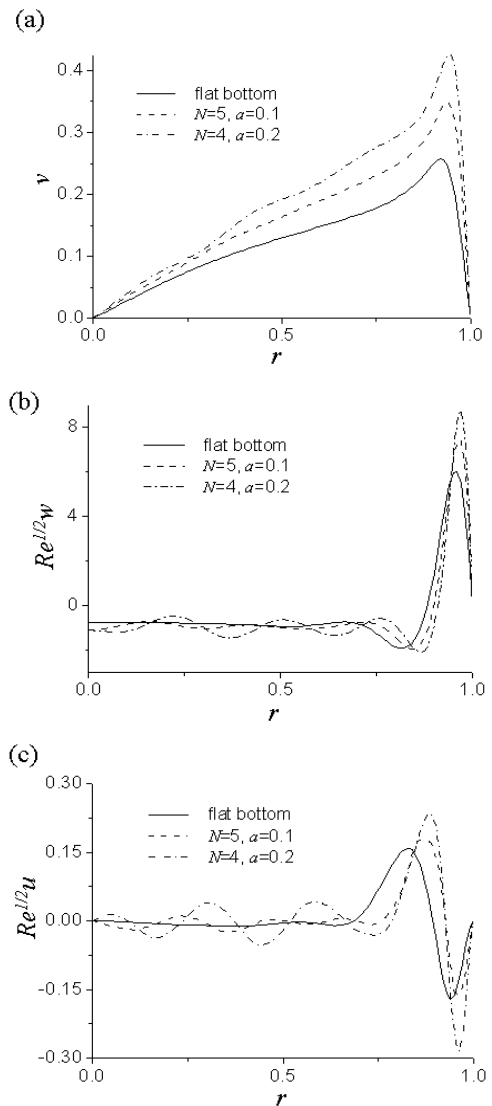


Fig. 3 (u, v, w) velocity profile comparison at $z=0.5$.
 (a) v -profile. (b) w -profile. (c) u -profile.

3.2 C_T 의 a, N, Re 의존성

von Karman은 회전하고 있는 무한평판디스크의 상사해를 구하여 일정한 회전반경까지 작용하는 토크상수가 $C_T=3.87/Re^{1/2}$ 임을 증명하였다⁽⁸⁾. 여기에서 토크(T) 및 토크상수(C_T)는 다음과 같이 정의된다.

$$T = 2\pi\mu \int_0^{1-b} \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{surface} r^2 dr \quad (11)$$

$$C_T = \frac{2T}{\frac{1}{2} \rho \omega^2 R_c^5} \quad (12)$$

Lang⁽⁵⁾은 실린더 용기의 바닥면이 돌고 있을 때, FDM방법으로 수치모사하여 다양한 Ar 및 Re 에 대하여 C_T 값을 구하였다. 본 연구에서는 FVM 방법으로 수치모사하여 a, N 및 Re 수를 변화시키는 경우 요철이 있는 바닥면에 작용하는 C_T 값을 구하였다.

Fig. 4에 두 가지 경우의 Re 수에 대한 C_T 값을 나타냈었다. Fig. 4(a)는 $Re=5000$ 의 경우이고 (b)는 $Re=10000$ 의 경우이다. 다양한 디스크 거칠기에 대한 토크상수의 값을 알아보기 위하여 N 은 0~20까지 a 는 0.1, 0.2, 0.3으로 변화시켰다. (a)와 (b) 그림에 공통적으로 나타나는 특징 가운데 하나는 특정 N 값에서 C_T 의 최대값이 나타난다는 것이다. $Re=5000$ 의 경우에는 $N=3$ 에서 C_T 의 최대값이 존재하고, $Re=10000$ 의 경우에는 $N=4$ 일 때 최대값이 나타난다. 그리고 이 최대값 이후에는 C_T 값이 점차 감소하여 $N=15$ 근처에서는 일정값으로 수렴을 한다. 공통적으로 나타나는 특징 두 번째는 $N=1\sim 6$ 구간에서 a 값이 증가할수록 C_T 값이 증가한다는 것이다.

이러한 결과를 설명하기 위하여 Fig. 5의 자오면상의 2차유동을 먼저 살펴보도록 하자. (a), (b), (c)는 각각 $Re=1000, 3000, 10000$ 의 경우이고 (1), (2)는 각각 $N=5, 7$ 의 경우이다. Re 및 N 값에 따라서 2차유동이 바닥면까지 침투하는 정도가 다를 수 있다. 고정된 Re 수에 대하여 $N=7$ 일 때가 $N=5$ 일 때보다 요철사이로 침투하는 유량이 적고, 고정된 N 값에 대하여 Re 수가 작을수록 침투하는 유량이 적어진다.

그 이유는 다음과 같다. N 이 커질수록, Re 수가 작아질수록 요철사이의 유동은 강제회전(rigid body rotation)에 가까워지고, 에크만 흡입(Ekman suction)되는 유량이 바닥면까지 도달하기가 힘들

어진다. 즉, N 이 커질수록 요철사이에 간격이 줄어들어 요철측면 점성경계층의 병합(merge)이 일어나고 Re 수가 작아질수록 요철측면 점성경계층의 두께가 두꺼워져 쉽게 병합이 일어난다. 이러한 점성경계층의 병합은 결과적으로 에크만 대류의 침투를 막고, 요철사이의 유동을 강제회전에 가깝게 한다.

Fig. 4는 이와 같은 맥락에서 잘 설명된다. 에크만 대류가 요철바닥면까지 침투를 하게 되면 요철의 측면에서 대류에 의한 각운동량 전달이 활발하게 일어나고, 그 만큼 바닥면에는 많은 토크가 걸리게 된다. 따라서 N 값의 어느 임계점까지는 토크상수가 증가하게 되고, 그 이후로는 강제회전으로 인한 각운동량의 전달 약화로 바닥면에 작용하는 토크도 감소하게 된다. Fig. 4(a)와 (b)에서 $Re=5000$ 일 때 임계점은 $N=3$ 에서 발생하고 $Re=10000$ 일 때 임계점은 $N=4$ 에서 발생한다. 임계점의 Re 수 의존성은 앞에서 이미 설명하였다. N 이 계속하여 증가하면 토크상수는 어느 값에 수렴을 하는 것을 알 수 있으며, 요철이 매우 촘촘할 때는 바닥면이 올라와 결과적으로 $Ar=1-a$ 인 경우와 거의 동일해진다.

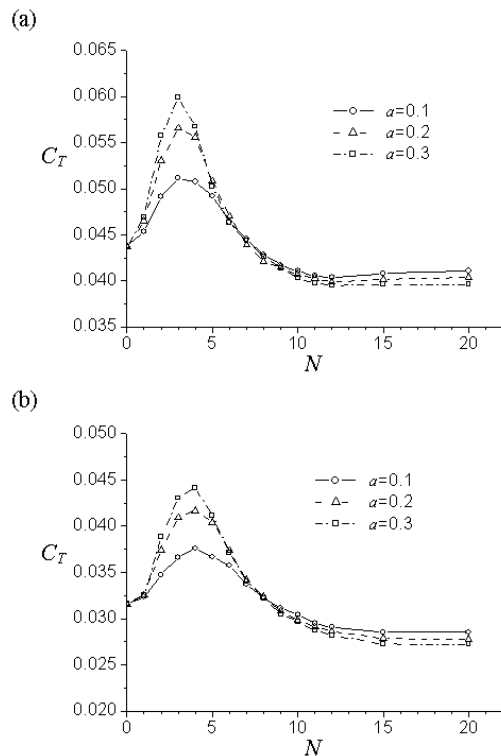


Fig. 4 Torque coefficient(C_T) for various wave number(N) and amplitude(a). (a) $Re=5000$. (b) $Re=10000$.

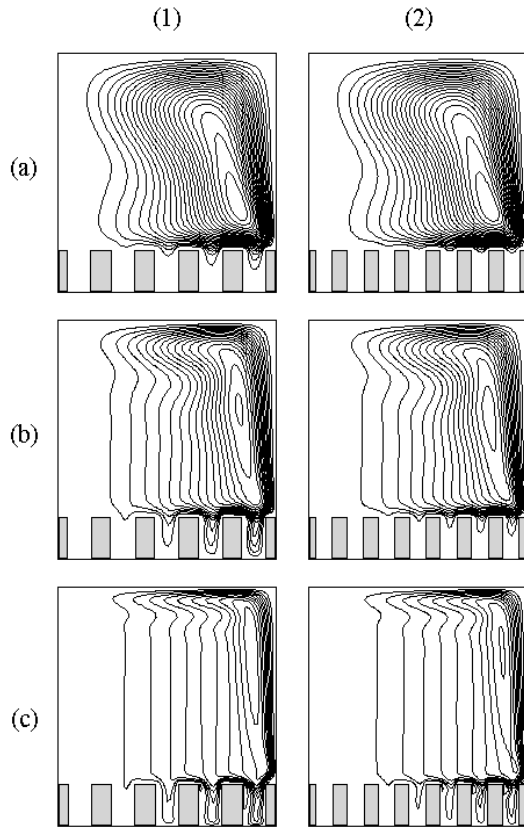


Fig. 5 Plots of the meridional stream function ψ in the $(r-z)$ plane. $\Delta\psi=4\times 10^{-4}$ for all cases. Values of Re are : (a)1000, (b)3000, (c)10000; values of N are : (1)5, (2)7

3.3 C_T 와 Q_p 의 상관관계

Fig. 3에서 요철이 존재하는 경우 실린더 내부에서의 v 속도가 증가하였다. (a, N, Re) 의 파라미터가 실린더 내부의 v 속도에 어떤 영향을 미치는지 알아보기 위하여 이를 대표할 수 있는 물리량을 다음과 같이 정의하였다.

$$Q_p = \int_a^1 \int_0^1 v \, drdz / (1-a) \quad (13)$$

즉, Q_p 는 단위시간에 $(r-z)$ 평면상을 통과하는 유량을 나타낸다. Lang⁽⁵⁾의 논문에서도 정의된 바 있는 물리량으로, 본 논문에서는 요철에 의한 실린더 내부의 스윙운동 활성화 정도를 알아보기 위해 요철 사이의 유량을 제외시켰다. 또한 동일한 면적을 통과하는 유량을 비교하기 위해 $(1-a)$ 의 비율을 고려하였다. Q_p 의 (a, N, Re) 에 따른 양상을 Fig. 6(a), (b)에 나타내었다. Fig. 4의 C_T 와 마찬가지로 어느 임계점까지 Q_p 가 증가하고, 그 이후로는 감소하는 것을 알 수 있다. 임계지점도

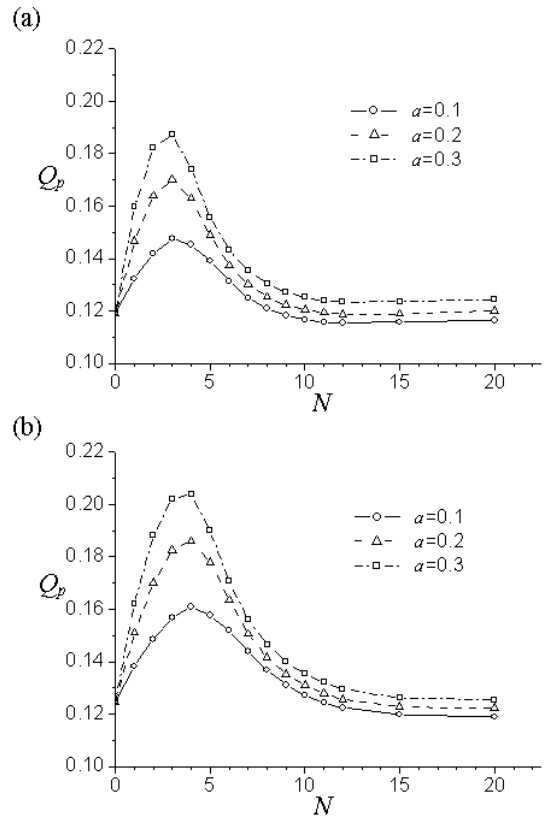


Fig. 6 Volume flow rate(Q_p) for various wave number(N) and amplitude(a). (a) $Re=5000$. (b) $Re=10000$.

(a)의 경우 $N=3$, (b)의 경우 $N=4$ 로 Fig. 4와 동일하다.

이런 증거(Fig. 4-6)들로 미루어 볼 때, Q_p 와 C_T 는 직접적인 연관성이 있으며, 예크만 대류의 침투정도가 실린더 내부의 스윙운동 활성화를 결정짓는다는 설명이 물리적으로 타당하다.

마지막으로 실린더의 쇠장비(Ar)가 1보다 큰 경우 요철의 효과는 어떻게 나타나는지 살펴보도록 한다.

3.4 Vortex breakdown의 변화

와붕괴(vortex breakdown) 현상은 delta wing에서 처음 관찰되었는데, 이 현상에 의해 날개에 작용하는 양력이 급격히 변화할 수 있는 기술적인 문제점이 있었다. 후에 이러한 현상이 밀폐된 원통용기 내부의 회전유동에서도 관찰되었고, 실험 및 수치모사하기에 간단하다는 장점으로 인하여 많은 연구가 진행되었다⁽²⁾.

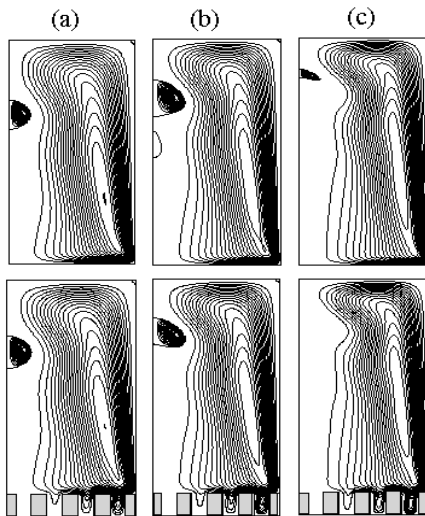


Fig. 7 Vortex breakdown changes at the existence of a grooved bottom ($Ar=2$, $N=4$, $a=0.1$).

(a) $Re=1600$. (b) $Re=2000$. (c) $Re=2700$.

Fig. 7은 기존의 와붕괴 현상과 요철이 있을 때의 와붕괴 현상을 비교한 것이다. 양(+), 음(-)의 유선을 각각 20개씩 나타냈다. Fig. 7(b)에서 2개의 버블(bubble)이 1개의 버블로 바뀌고, (c)에서는 1개의 버블이 사라지는 것을 확인할 수 있다. 이는 요철에 의하여 내부유동의 스윙운동 정도 및 중심축에서의 축방향 속도가 달라지기 때문이라 생각되며 좀더 면밀한 분석이 필요하다.

4. 결론

동심원 형상 홈이 파여진 원판이 회전하고 있을 때 요철의 형상(진폭, 과장)에 따른 실린더 내부의 유동변화를 살펴보고, 그 원인을 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 회전바닥면에 사각과 형상의 요철이 존재할 때, 고정된 Re 및 a 값에 대하여, $N(=R_d/R_c\lambda)$ 값의 어느 임계점 까지 스윙운동이 활성화되고 그 이후로는 스윙운동이 감소한다. 즉, 스윙운동을 최대화하는 최적의 N 값이 존재한다.

(2) 실린더 내부의 유동을 방해하지 않는 정도에서 요철의 진폭(a)을 키워주면, 고정된 Re 및 N 값에 대하여, 내부 스윙운동이 활성화된다.

(3) 요철 형상으로 스윙운동이 활성화되는 원인은 바닥면으로부터 각운동량(angular momentum)

을 전달받을 수 있는 면적이 늘어나기 때문이며, 이렇게 전달받은 각운동량이 자오면(meridional plane)상의 에크만 대류에 의하여 실린더 내부까지 전파되는 것이 중요하다.

(4) N 이 너무 커지면 요철 사이의 유동이 강제회전(rigid body rotation)에 가까워지며, 이것은 에크만 대류의 침투를 어렵게 한다. 대략 $N=15$ 이후로는 $Ar=1-a$ 의 경우와 흡사해진다.

(5) $Ar=2$ 인 경우에 바닥면의 요철형상에 의하여 와붕괴(vortex breakdown) 양상이 바뀌는 것을 확인하였다.

후 기

이 연구는 과학기술부 국가지정연구실 사업(과제번호:2-578)의 일환으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Pao, H.P., 1970, "A numerical computation of a confined rotating flow," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 37, pp. 480~487.
- (2) Lugt, H.J. and Haussling, H.J., 1982, "Axisymmetric vortex breakdown in rotating fluid within a container," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 921~923.
- (3) Fujimura, K., 2001, "Velocity measurements of vortex breakdown in an enclosed cylinder," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 123, pp. 604~611.
- (4) Greenspan, H.P., 1968, "The theory of rotating fluids," *Cambridge University Press, Cambridge*.
- (5) Lang, E., Sridhar, K. and Wilson, N.W., 1994, "Computational study of disk driven rotating flow in a cylindrical enclosure," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 116, pp. 815~820.
- (6) Patankar, S.V., 1980, "Numerical heat transfer and fluid flow," *Hemisphere/McGraw-Hill, New York*.
- (7) Hayase, T., Humphrey, J.A.C and Grief, R., 1992, "A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures," *J. Comput. Phys.*, Vol. 98, pp. 108~118.
- (8) Schlichting, H., 1989, "Boundary layer theory," *McGraw-Hill*.