사각 물체가 존재하는 밀폐계의 종횡비 변화에 따른 내부 자연대류 현상에 대한 수치적 연구

이재룡†·하만영*

Numerical Simulation of the Natural Convection in Horizontal Enclosure of Different Aspect Ratio with an Array of Square Cylinder

Jae Ryong Lee and Man Yeong Ha

Key Words: natural convection(자연대류), 열전달(heat transfer), aspect ratio(종횡비)

Abstract

The physical model considered here is a horizontal layer of fluid heated below and cooled above with a periodic array of evenly spaced square cylinders placed at the center of the layer, whose aspect ratio here varies from unity to twelve. Periodic boundary condition is employed along the horizontal direction to allow for lateral freedom for the convection cells. Two-dimensional solution for unsteady natural convection is obtained using an accurate and efficient Chebyshev spectral multi-domain methodology for a given Rayleigh numbers of 10^6.

기호설명

g	: *gravity*
L	: *length of the enclosure*
n	: *normal direction*
Nu	: *local Nusselt number*
$\overline{Nu}$	: *surface-averaged Nusselt number*
x_i	: *dimensionless i -directional coordinate*
x_i^*	: *dimensional i -directional coordinate*
p	: *dimensionless pressure*
Pr	: *Prandtl number*
Ra	: *Rayleigh number*
t	: *dimensionless time*
t^*	: *dimensional time*
t_p	: *period of time integration*
T	: *temperature*
u_i	: *dimensionless velocity in the i -direction*
u_i^*	: *dimensional velocity in the i -direction*
α	: *thermal diffusivity*
β	: *thermal expansion coefficient*
ν	: *kinematic viscosity*
θ	: *dimensionless temperature*

† 부산대학교 기계공학과 대학원
E-mail : multidomain@pusan.ac.kr
TEL : (051)510-3090 FAX : (051)512-9835
* 부산대학교 기계공학부

1. 서 론

수직으로 온도구배가 존재하는 밀폐계내부의 Rayleigh-Benard 대류현상은 지난 100여년간 연구가 진행되어온, 유체유동 연구의 대표적인 예이다. 온도가 일정한 평면위에서의 유체경계층은 Rayleigh수가 1708일 때 불안정해지고 정상상태의 순환 cell을 형성한다.(1) Rayleigh 수가 증가함에 따라 유동은 다양한 불안정성을 유발하고, Ra=10^7에서 완전난류영역으로 천이된다.(2) ~ (5)

공학적 관점에서는 형상이 단순 경계층보다 복잡해 진다. 관심이 있는 형상은 밀폐계 내부에

물체가 존재하는 경우이다. House *et al*[6]는 밀폐계 내부에 존재하는 전도체의 영향에 대해서 발표하였다. 또한, 보다 높은 Ra수에 대한 영역에 대해서 Ha *et al*[7]가 발표하였다. 최근에 Ha *et al*[8] 는 정사각 밀폐계 내부에 다양한 온도조건을 가지는 물체가 존재하는 경우에 대한 결과를 발표하였다. *Ra*수 또한 복잡한 유동 패턴을 보일 만큼 충분히 큰 영역까지 고려하였다.

본 연구에서는 내부에 물체가 존재하는 밀폐계의 종횡비에 따른 내부의 유동의 변화를 예측하기 위해 수치적 연구를 수행하였다. 밀폐계의 종횡비는 1에서 12까지 확장하면서 계산을 수행하였고, *Ra*수는 10^6으로 하였으며, 이는 복잡한 유동현상을 잘 표현할 수 있을 정도의 값이다. 내부 유체 유동의 연속성을 보장하기 위해서, 수평방향으로 Periodic 경계조건을 사용하였다.

2. 지배방정식

연속 방정식, 일정 물성치의 비압축성의 운동량 보존 방정식 (Navier-Stokes eqaution) 그리고 에너지 방정식이 본 계산에서 사용되었다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mathrm{Pr} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathrm{Ra}\ \mathrm{Pr}\, \theta\, \mathbf{k}_2 \qquad (1b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \nabla^2 \theta \qquad (1c)$$

무차원 변수들은 다음과 같이 정의하였다.

$$t = \frac{t^* \alpha}{L^2}, \quad x_i = \frac{x_i^*}{L}, \quad u_i = \frac{u_i^* L}{\alpha},$$

$$P = \frac{P^* L^2}{\rho \alpha^2}, \qquad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \qquad (2)$$

위 식에서, ρ, T 그리고 α 는 각각 밀도, 차원의 온도 그리고 열확산성이다. (2) 식에서 *는 차원변수를 나타내며, u_i, p, t 그리고 θ는 각각 무차원된 속도, 압력, 시간 그리고 온도를 나타낸다. 본 연구에서의 중요한 무차원 파라미터로는 Pr수와 Ra 수가 있다. 즉,

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \qquad Ra = \frac{g\beta L^3 (T_h - T_c)}{\nu \alpha} \qquad (3)$$

여기서 ν, g 그리고 β 는 각각 동점성계수, 중력, 열팽창 계수이다. 본 계산에서는 Pr수를 0.71로 고정하였다. 이는 공기의 물성치를 나타낸다. 그리고 Ra수는 106으로 하였다.

여기서, 무차원 변수들은 다음과 같다.

3. 수치해석 방법

본 연구에서 사용한 밀폐계는 종횡비가 1에서 12까지 변한다. 그림 1에서의 형상은 종횡비가 6일때의 밀폐계 내부를 나타낸 것이다. 두개의 평행평편 사이의 높이가 L이고, 그 사이에 좌우 각각 $W = L/3$ 인 사각 실린더가 일정하게 배열되어 있다. 아래 평판은 고온, T_h이고, 윗 평판은 T_c로 고정되어 있다. 본 연구에서의 형상은 z 방향으로 불변이라고 가정한다. 그렇기 때문에 사각의 단면적을 가지는 2차원의 실린더라고 표현할 수 있다. 유체의 물성치는 일정하다고 가정하였으며, 단, 부력항에 따르는 유체의 밀도는 Boussinesq 가정을 따른다고 가정하였다.

공간이산화를 위해서 spectral multi-domain 방법을 사용하였다. 이 방법은 전체 계산영역을 작은 직사각형의 부 영역으로 나누어서 계산하는 방법이다. 각각의 부 영역에서는 Chebyshev

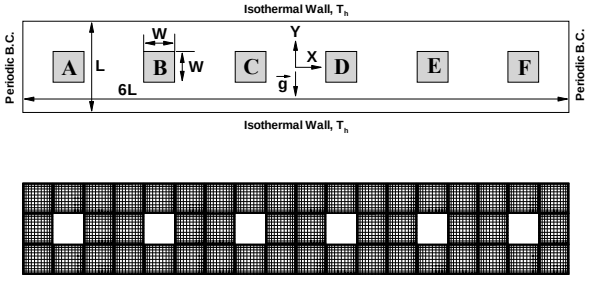


Figure 1. Schematics of computational geometry and corresponding grid distribution

expansion을 사용하였으며, 이로 인하여 격자점은 비균일 Gauss-Lobatto 점들로 이루어진다. 각각의 부 영역은 15x15의 격자점으로 이루어져 있다.

시간 적분을 위해서 two-step 시간 분할법(time-splitting method)를 사용하였다. 대류항에 대해서는 3차 Adams-Bashforth scheme을 적용하였고, 점성항에 대해서는 Crank-Nicolson scheme을 사용하였다.

각각의 Nu수에 대한 정의는 다음과 같다.

$$Nu = \left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_{wall} \qquad \overline{Nu} = \frac{1}{W}\int_0^W Nu\, dS$$

$$< Nu >= \frac{1}{t_p}\int_0^{t_p} Nu\, dt \quad < \overline{Nu} >= \frac{1}{t_p}\int_0^{t_p} \overline{Nu}\, dt \qquad (4)$$

여기서, n 은 벽면에 수직한 방향이고 W는 계산 영역의 가로면 전체 길이를 나타내며, tp는 시간 적분 구간을 나타낸다.

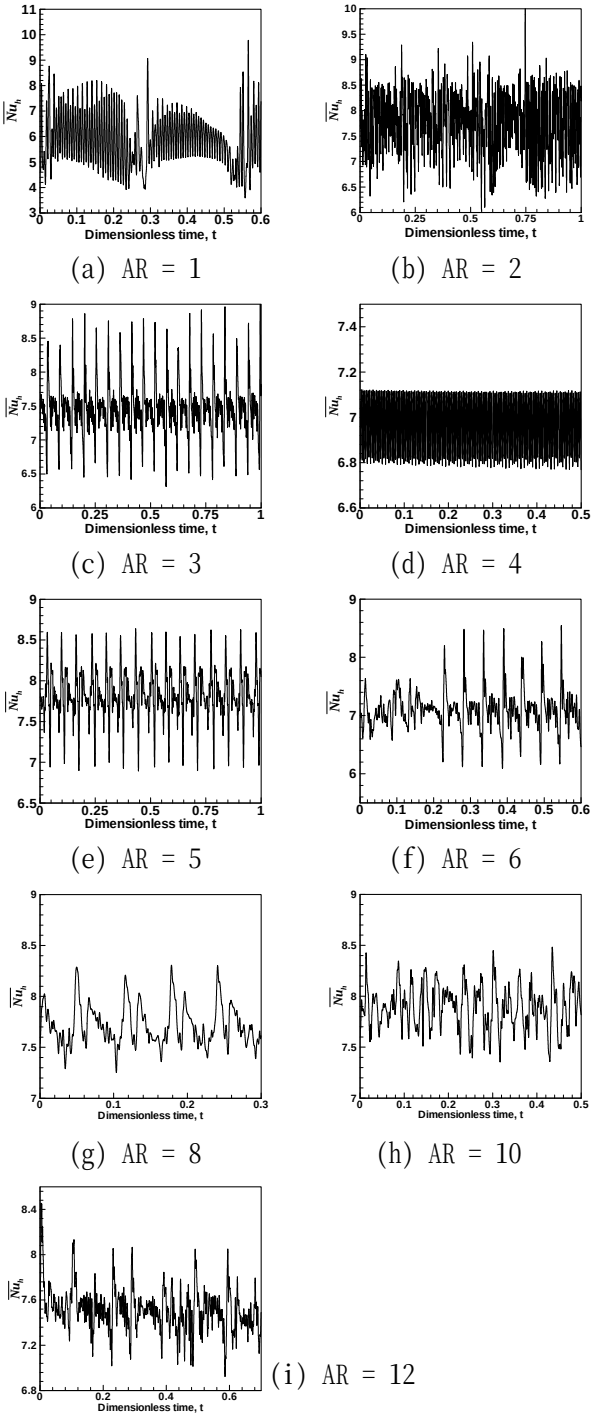
4. 결과 및 해석

그림 2는 각각의 종횡비에 따른 평균 Nu수를 시간의 함수로 표현한 것이다. 종횡비가 1일 때와 2인 경우에는 계산 도메인이 제한되어 있어서 충분한 wave 길이를 가지지 못한다. 주기조건을 강제로 맞추기 위해서 순환 cell의 wave 길이는 Drazin(1)이 밝혔던 것과는 달리 2보다 작은 cell이 쌍을 이룬다. 특히, 1인 경우는 1/2의 특이한 구조의 쌍을 형성한다. 계산 영역이 주어진 Ra수에 비해서 충분한 cell 쌍의 wave 길이를 확보해주지 못하며, 또한 강제로 주어진 주기조건을 만족하기 위해서 cell의 패턴이 내부 실린더를 경계로 하여 형성된다. 그림 2(a)에서 시간 평균한 온도분포를 나타내었다. 이것은 다음과 같은 symmetry를 만족한다.

$$\text{Symmetry about } y=L/2: \quad \left\{u',v',\theta',\frac{L}{2}-x',y'\right\} \leftarrow \left\{u,-v,\theta,\frac{L}{2}+x,y\right\} \qquad (5a)$$

$$\text{Periodicity along } x: \quad \{u',v',\theta',x',y'\} \leftarrow \{u,v,\theta,x+nL,y\} \qquad (5b)$$

일반적으로, 종횡비가 1인 경우는 주어진 계산 영역에 하나의 고온 plume과 저온 plume이 존재한다. 본 연구에서는 고온의 plume이 왼쪽으로 이동하고 저온의 plume이 오른쪽으로 이동하는 것을 볼 수 있다. 그렇기 때문에 두개의 plume의 상대적인 위치는 시간이 지남에 따라서 변할 수



(a) AR = 1 (b) AR = 2 (c) AR = 3 (d) AR = 4 (e) AR = 5 (f) AR = 6 (g) AR = 8 (h) AR = 10 (i) AR = 12

Figure 2. Surface-avergaed Nusselt number at hot wall for the cases of different aspect ratio

있으며, 유동장 역시 이동하는 plume의 위치에 큰 영향을 받는다. 이러한 수평으로 이동하는 plume은 당연하게 mean wind를 유발하는데 이것은 사각 실린더의 아래·위 영역에서 관찰할 수 있다. 수평 방향으로의 이동에 대한 지배방정식은 모멘텀 방정식 (1b)의 수평 성분(horizontal component)을 평균함으로서 구할 수 있다.[9),(10)]

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \Pr \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \qquad (6)$$

종횡비가 2인 경우도 종횡비 1인 경우와 비슷하다. 주어진 Ra수에 대해서 wave 길이가 약 2 정도 되지만, 수평 방향으로 강제적인 주기조건을 만족하기 위해서 속도장이 다소 제약을 받는다. 이는 그림 2(b)의 평균 Nu수의 시간함수에서 확인할 수가 있다. roll cell의 움직임이 매우 큰 주파수를 가지면서 이동하는 것을 알 수가 있다. 그림 3(b)에서 확인할 수 있는 것처럼, 고온 및 저온의 plume은 사각실린더 사이의 영역에서 발달되어 있다. 수평 방향으로의 plume의 이동이 없이 약한 크기의 oscillation에 의한 열전달율의 변화라고 할 수 있다. 종횡비가 3인 경우는 약 2의 wave 길이를 가지면서 가운데에 존재하는 사각 실린더를 둘러싸는 cell이 존재한다. 종횡비가 6인 경우와 8 그리고 12인 경우는 종횡비가 3인 경우와 거의 흡사한 유동패턴을 보인다. 열 경계층으로부터 형성된 고온의 plume이 사각 실린더 사이에서 성장하여 상승기류를 형성하고 반면, 저온

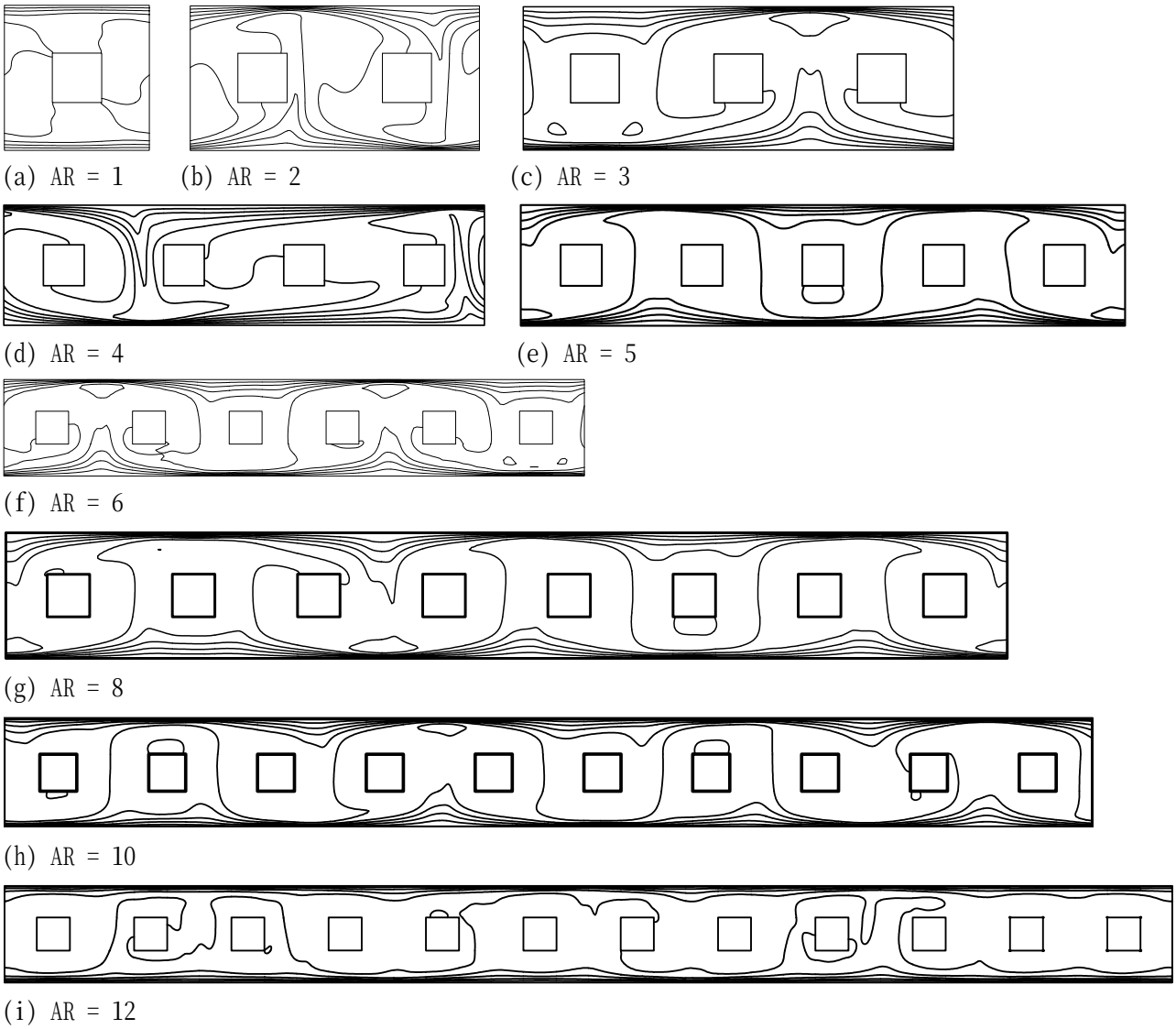


Figure 3. Time-averaged isotherms for the case of different aspect ratio at $Ra = 10^6$

벽면에서부터 형성된 저온의 기류는 열 경계층의 불안정성 때문에 진동을 하다가 사각 실린더의 좌우로 반복 이동을 한다. 시간 평균한 유동장을 그림 3 (c), (f), (g), (i)에 나타내었다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 작은 범위에서 고주파수를 보이는 것이 경계층의 불안정성 때문에 생기는 plume의 진동이고, 저 주파수를 가는 패턴이 저온 plume이 사각 실린더를 지나는 순간의 열전달율을 보여주는 것이다. 고온의 plume은 수평이동이 없었기 때문에 시간평균을 한 후에도 사각 실린더의 사이영역에 존재하는 반면, 저온의 plume은 주기적인 평행이동으로 인해서 사각 실린더에 걸쳐 있는 현상이 된다. 종횡비가 3인 경우에 대한시간 평균한 유동장이 그림 3(c)에 나타내어져 있다. 고온 plume은 고정되어 있는 반면 저온 plume은 주기적은 수평이동을 하기 때문에 cell의 wave 길이 특성은 {1, 2} 혹은 {2, 1}의 형태로 나타난다. 이와 같은 cell의 길이 특성을 가지는 해는 종횡비가 6인 경우와 8인 경우 그리고 10인 경우에도 똑같이 나타난다. 물리적 계산영역이 2배로 커지지만 쌍으로 이루어진 cell의 주기적 특성을 가지는 해의 패턴은 정확하게 일치하는 것을 알 수 있다.

종횡비가 4인 경우는 내부 유동의 cell의 큰 이동은 없지만, 높은 주파수를 가지는 진동하는 열 경계층이 형성되어 가속이 되면서 하나의 고정된 plume으로 이동되는 것을 확인할 수 있다. 그림 2(d)에서 나타난 바와 같이 평균 Nu수의 의 시간함수가 높은 주파수를 가지는 것을 알 수 있다. 이것은, 고온벽면으로 성장되어 있는 저온 plume의 약한 oscillation으로 인한 열전달율의 변화라고 할 수 있다. 그러나 plume의 평행 이동이 없이 한 곳에 고정되어 있기 때문에, 고온 벽면에서의 열전달 에너지는 다른 경우와 비교할 때, 작은 편이다. 계산영역 내부에서 형성될 수 있는 cell 쌍의 wave 길이 형태는 {1, 1, 1, 1}, {2, 2}, {1, 3}또는 {3, 1} 의 패턴을 가질 수가 있다. 어느 해일지라도 지배방정식 (1)을 만족하며, 본 연구에서는 {1, 3}의 형태를 가지는 것을 도시하였다. 종횡비가 5인 경우는 종횡비가 6인 경우와 비교해볼 때, 평균 Nu수의 시간에 대한 함수는 패턴이 비슷하지만 유동 흐름의 패턴은 틀리다. 즉, 종횡비가 5인 경우는 열 경계층의 불안정성에 의해 발달된 어느 하나의 plume이 내부 사각실린더를 따라 옆으로 이동을 하기 시작하면 그 옆에서 발달되어 있는 plume이 차례로 옆으로 이동을 한다. 그러다가 주기 조건을 가진 경계까지 이동을 하면 다시 반대의 방향으로 같은 방법으로 되돌아간다. 종횡비가 6일 때는 고정된 고온의 plume 사이를 저온의 plume이 주기적으로 왕복이동을 한 반면, 종횡비가 5인 경우는 차례로 옆의 plume 들을 밀어내면서 진행을 해 나간다. plume이 횡으로 이동할 때의 평균 Nu수의 주파수를 살펴보면, peak 값을 가지는 순간의 power spectrum은 종횡비 6인 경우와 비슷하지만, 그때의 주파수는 shift 되어서 오차가 조금 있다. 즉, 종횡비 5와 6의 경우, plume의 이동에 따른 열전달 에너지는 비슷하지만, plume이 수평방향으로 이동하는 순간의 주파수는 시간차를 가진다고 할 수 있다.

종횡비가 12인 경우는 4인 경우와 마찬가지로 {1, 1}, {1, 2} 혹은 {1, 3}의 해의 형태가 중첩 혹은 독립적으로 나타나는 패턴을 보인다. 어느 형태의 조합이든지 모멘텀 방정식 (1)을 만족하며 패턴은 초기조건에 따라 달리질 수 있다.

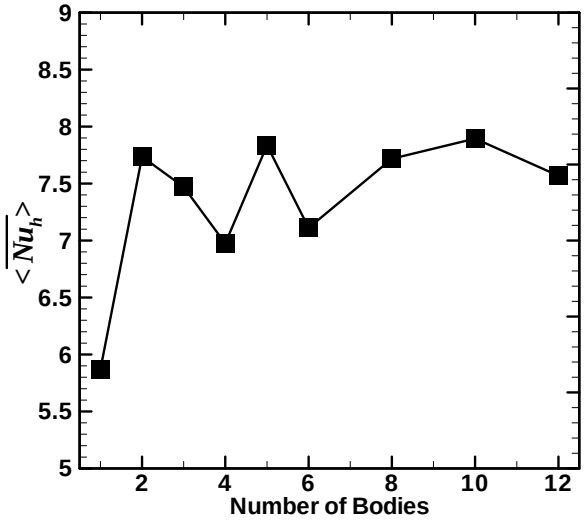


Figure 4. Time- and surface-averaged Nusselt number as a function of aspect ratio

그림 4는 하부의 고온 벽면에서의 공간과 시간에 대해서 모두 평균한 Nu수를 종횡비의 변화에 따라 도시한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이, 종횡비가 증가함에 따라 일정한 값으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 종횡비가 비교적 작은 경우(6 이하)에서는 높이 방향의 짝수배 혹은 홀수배인

것에 영향을 지배적으로 받지만 그 이상의 종횡비를 가지는 경우에는 어느 하나의 값으로 수렴한다. 즉, 주기조건이 종횡비의 크기에 독립적으로 해를 만족하기 위해서 충분히 큰 값을 가져야 한다는 것을 의미한다.

5. 결 론

본 연구에서는 사각 실린더가 존재하는 밀폐계 내부의 자연대류 현상에 대해서 수치해석을 수행하였다. 내부의 사각 실린더를 고려하기 위해서 multi-domain 기술이 사용되었고, 정확한 수치해석 결과를 얻기 위해서 spectral method를 사용하여 계산을 수행하였다.

밀폐계는 종횡비가 1에서부터 12까지 변화시켜서 계산영역의 확장에 따른 내부의 유동장의 변화 및 roll cell의 패턴의 주기성을 확인하였다. 종횡비가 1 혹은 2인 경우는 주어진 Ra수에서 roll cell이 충분히 확장될 수 있을 만큼의 계산 영역이 되지 않아서 매우 불안정한 유동 패턴을 보이며, 특히 종횡비가 1인 경우는 L/2의 wave 길이를 보인다. 종횡비가 3, 6, 8, 10 인 경우에 {1, 2} 혹은 {2,1}의 wave 길이를 가지는 roll cell의 쌍을 형성함을 확인할 수 있었다. 종횡비가 4인 경우와 12인 경우는 {1, 1}, {1, 2} 혹은 {1, 3}의 해의 형태가 중첩 혹은 독립적으로 나타나는 패턴을 보인다. 어느 것이든 지배방정식(1)을 만족하며 이는 초기조건에 따라 달리질 수 있다.

종횡비의 값이 비교적 작은 경우에는 주기조건을 강제로 만족시키기 위해서 Nu수가 종횡비의 크기에 영향을 받지만 어느 정도의 값 이상이 되면 평균 Nu수는 주기조건을 만족하면서 동시에 일정한 값으로 수렴을 한다.

후 기

본 연구는 BK21, NRL 그리고 2003년 과학재단의 지역대학 우수과학자 지원사업에 의해서 수행되었다.

참고문헌

(1) P. G. Drazin and W. H. Reid, 1981, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge, UK

(2) F. B. Lipps, 1976, “Numerical Simulation of Three-Dimensional Benard Convection in Air,” J. Fluid Mech. 75, 113

(3) F. B. Lipps and C. J. Somerville, 1971, “Dynamics of Variable Wavelength in Finite-AmplitudeBenard Convection,” Phys. Fluids 14, 759

(4) S. Balachandar, M.R. Maxey and L. Sirovich, 1988, “Numerical simulation of high Rayleigh number convection,” J. Sci. Comput. 4, 219

(5) S. Balachandar and L. Sirovich, 1990, “Probability distribution functions in turbulent convection,” Phys. Fluids 3, 919

(6) J. M. House, C. Beckermann, C., and T. F. Smith, T. F., 1990, “Effect of a Centered Conducting Body on Natural Convection Heat Transfer in an Enclosure,” Numerical Heat Transfer A 18, 213

(7) M. . Y. Ha, M. J. Jung and Y. S. Kim, 1999, “A Numerical Study on Transient Heat Transfer and Fluid Flow of Natural Convection in an Enclosure with a Heat-Generating Conducting Body,” Numerical Heat Transfer A 35, 415

(8) M. Y. Ha, H. S. Yoon, K. S. Yoon, S. Balachandar, I. Kim, J. R. Lee and H.H. Chun, 2002, "Two-Dimensional and Unsteady Natural Convection in a Horizontal Enclosure with a Square Body", Numerical Heat Transfer, Vol 41, pp. 183-210,

(9) S. Balachandar, D. A. Yuen and D. Reuteler, "High Rayleigh number convection at infinite Prandtl number with weakly temperature-dependent viscosity", Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 83, 79, (1996).

(10) F. H. Busse, "Generation of mean flows by thermal convection", Physica, 9D, 287-299 (1983).