

# 일차원 비균질 유전매질의 TE 및 TM 산란패턴 합성에 관한 연구

°남준석 · 전상재 · 전후동 · 정준식 · 박의준  
금오공과대학교 전자공학부

## A Study on the Synthesis of TE and TM Scattering Patterns of One-Dimensional Inhomogeneous Dielectric Media

June Seok Nam · Sang Jae Jun · Hoo Dong Jeon · Jun Sik Jung · Eui Joon Park  
School of Electronic Engineering, Kumoh National Institute of Technology

### Abstract

In this paper, a synthesis method for the desired scattering pattern is presented when illuminating by TE-polarized and TM-polarized plane waves to arbitrary dielectric material. It is considered that the one-dimensional dielectric media are inhomogeneously distributed with continuously varying dielectric constants. Accordingly the desired patterns and the corresponding source distributions are inversely transformed by the proposed algorithm which are based on the one-dimensional inverse scattering problem. Some bandstop spatial filter are illustrated for applications.

**Keywords** : Inhomogeneous media, Scattering pattern, Spatial filter

### I. 서론

일차원 역산란파는 크게 세가지 비선형 미분방정식, 즉 Riccati 방정식, Zakharov-Shabat 방정식, 그리고 Sturm-Liouville 방정식 등으로 표현되어진다<sup>[1],[2]</sup>. 각 미분방정식들의 해는 Riccati형, Gel'fand-Levitan-Marchenko형, 그리고 Volterra형 등으로 분류될 수 있으며, 이들은 적분방정식으로 표현된다. 이들 적분방정식들의 피적분함수는 매질의 유전율, 투자율, 도전율 등의 프로필을 나타내는 포텐셜함수로 표현되며 측정된 역산란 반사계수를 만족시키는 이 포텐셜들을 복구하는 과정이 오늘날의 역산란 문제라고 볼 수 있다. 일반적으로 해석적인 방법을 통해 비균질 매질의 포텐셜을 구하기는 매우 어려운 문제가 있으므로 비선형 근사화법<sup>[3]</sup> 혹은 연쇄(successive)근사화법<sup>[4]</sup> 등을 사용하여 포텐셜함수를 구하였다. 이들 방법들을 사용하여 원하는 반사계수를 갖는 불균일 전송선로 설계<sup>[5]-[7]</sup>에 많이

적용되어 왔으나, 반사계수 목표치는 특정한 저지대역 창(window)으로 주어지므로서 임의의 반사 패턴을 만족시키는 포텐셜 합성문제에서는 제한적이다. 또한 만약 원하는 역산란 반사계수를 갖는 유전율 포텐셜 프로필을 합성하고자 할 경우 목표치에 따라 비유전율이 1이하가 될 수 있으므로 물리적으로 성립될 수 없는 경우가 발생하는 단점도 가질 수 있다.

본 연구에서는 원하는 lobe형 역산란 반사계수 패턴의 각 lobe들을 개별적으로 제어하고, 합성된 유전율 프로필이 물리적으로 성립할 수 있도록 Riccati형 적분방정식에 대해 최적화 기법을 통한 반복 샘플링법을 적용할 수 있는 방법을 제안하고, 이를 TM 혹은 TE 평면파 입사시 원하는 반사계수를 갖는 연속적인 유전율 프로필을 합성하는데 적용한다. 이를 임의 입사각으로 평면파가 입사될 때 대역저지 공간 필터에 적용한다.

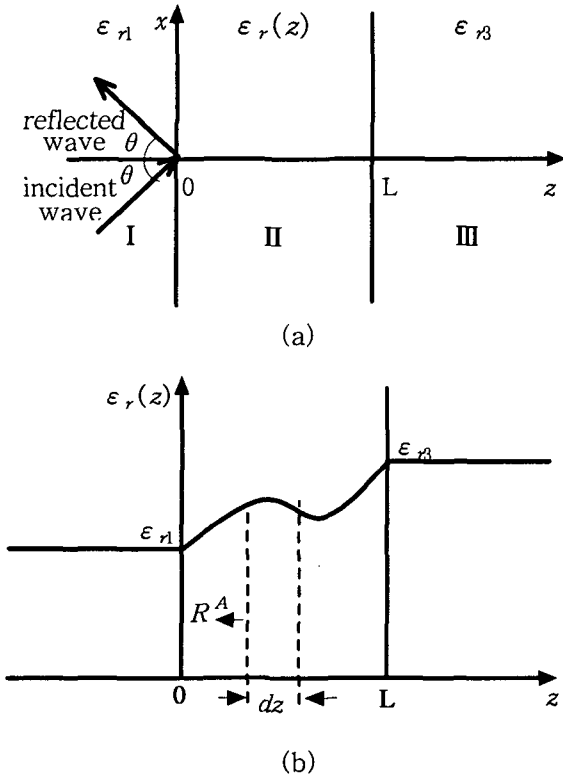


그림 1. 불균일 유전체 슬랩 기하구조.

## II. 비선형 적분 방정식

파수  $k$ 를 갖는 정현적인 평면파가 그림 1(a)와 같이 입사각이  $\theta$ 인 방향으로 입사되면,  $0 \leq z \leq L$  에서 비유전율 프로파일  $\epsilon_r(z, \omega)$ 을 갖는 유전체의 임의의 위치에서의 반사계수  $R_A$ 에 대한 1차 비선형 미분방정식은 다음과 같이 표현된다<sup>[8]</sup>.

$$\frac{dR_A}{dz} = j2k\sqrt{S(\omega, z, \theta)}R_A - (1 - R_A^2)\frac{dr}{dz} \quad (1)$$

여기서  $S(\omega, z, \theta) = \epsilon_r(\omega, z) - \sin^2\theta$  이며 TE 및 TM 편파 각각에 대한  $dr$ 은 다음과 같다.

$$dr_{TE} = \frac{d\epsilon_r(\omega, z)}{4S(\omega, z, \theta)} \quad (2)$$

$$dr_{TM} = \frac{\epsilon_r(\omega, z) - 2\sin^2\theta}{4\epsilon_r(\omega, z)S(\omega, z, \theta)} d\epsilon_r(\omega, z) \quad (3)$$

이때 그림 1(b)와 같이 유전율과  $z=0$  와  $z=L$  인 경계에서 연속이라고 가정한다. 식(1)로부터  $R_A^2 \ll 1$  일 경우  $R(\omega, z, \theta) = \tanh^{-1}[R_A(\omega, z, \theta)]$ 로 두면  $z=0$ 에서의 입력반사계수  $R_i$ 의 해는 근사적으로 다음과 같이 표현된다.

$$R_i(\omega, 0, \theta) = \int_0^L \frac{dr}{dz} \exp[-2jk \int_0^z \sqrt{S(\omega, z', \theta)} dz'] dz \quad (4)$$

여기서  $P = 2\pi(z/L - 1/2)$  과  $u = k \int_0^z \sqrt{S} dz' / \pi$ 로 치환하면 식(4)의 크기는 다음 식의 크기와 같다

$$R_i(u) = \int_{-\pi}^{\pi} g(p) e^{-ipu} dp \quad (5)$$

여기서  $g(p) = dr/dp$  이며 포텐셜함수를 나타내고,  $\epsilon_r(\omega, z)$  가 주파수에 독립적이라면 식(2)와 식(3)로부터  $\epsilon_r(z)$ 는 TE 및 TM 편파에 대해 다음과 같이 표현된다

TE 편파인 경우 :

$$\epsilon_r(z) = \sin^2\theta + G(p)/A_1 \quad (6)$$

TM 편파의 경우 :

$$\epsilon_r(z) = \frac{1}{2} [A_1 \epsilon_r^2(0) G(p) + \sqrt{\epsilon_r^4(0) A_1^2 G^2(p) - 4 \sin^2\theta \epsilon_r^2(0) A_1 G(p)}] \quad (7)$$

여기서

$$A_1 = 1/(\epsilon_r(0) - \sin^2\theta)$$

$$G(p) = \exp[4 \int_{-\pi}^p g(p) dp]$$

를 의미한다.

## III. 산란패턴 합성

식(5)의  $g(p)$ 를 삼각함수 푸리에 급수 전개하면 다음과 같이 표현된다.

$$g(p) = \sum_{n=0}^N (a_n \cos(np) + b_n \sin(np)) \quad (8)$$

위 식을 식(5)에 대입하면 다음과 같다

$$R_i(u) = \sum_{n=0}^N \pi a_n (Sa(\pi(u-n)) + Sa(\pi(u+n))) - j \sum_{n=1}^N \pi b_n (Sa(\pi(u-n)) - Sa(\pi(u+n))) \quad (9)$$

여기서  $Sa(\cdot)$ 는 샘플링함수이며  $R_i(n) = \pi(a_n - jb_n)$ ,  $R_i(0) = 2\pi a_0$ 가 된다. 그리고 식(9)의 실수부 및 허수부는 각각  $u$ 영역에서 우함수 및 기함수이므로  $R_i(u) = R_{i,e}(u) + j R_{i,o}(u)$ 로 표현될 수 있다. 따라서  $R_i(u)$ 가 합성되면  $R_i(n)$ 이 계산되고,  $a_n$ 과  $b_n$ 이 계산되어  $g(p)$ 가 합성되며, 식(6)과 식(7)로부터 유전율 프로파일 계산된다. 그러나 만약  $\epsilon_n = \epsilon_B$ 인 경우

$u=0$ 에서  $R_i(u)=0$ 가 되어야 하므로 우함수  $R_{i,e}(u)$ 는  $u=0$ 일 때  $R_i(u)=0$ 를 연속적으로 통과하는 기함수로 변형되어야 한다. 이 경우 식(8)와 식(9)의 관계가 유지되기 위해서는  $R_{i,o}(u)$ 는 우함수로 변형되어야 하고 변형된  $R_i(u)$ 를  $R_i^A(u)$ 로 두면 다음과 같이 표현된다.

$$R_i^A(u) = R_{i,o}^A(u) + j R_{i,e}^A(u) \quad (10)$$

여기서  $R_i^T(u) = jR_i^A(u)$ 로 두면

$$R_i^T(u) = -R_{i,e}^A(u) + j R_{i,o}^A(u) \quad (11)$$

와 같이 되고, 식(9)로부터 변형된 우함수 및 기함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R_{i,e}^A(u) = R_{i,o}(u) + D_1 \quad (12)$$

$$R_{i,o}^A(u) = R_{i,e}(u) - D_0 - D_2 \quad (13)$$

여기서

$$D_0 = 2\pi a_0 \cdot Sa(\pi u) \quad (14)$$

$$D_1 = 2\pi \sum_{n=1}^N b_n Sa(\pi(u-n)) \quad (15)$$

$$D_2 = 2\pi \sum_{n=1}^N a_n Sa(\pi(u+n)) \quad (16)$$

위 식에서  $D_0$ 는  $u=0$ 일 때  $R_i(u)$ 의 패턴이 0을 통과시키도록 빼지며,  $D_1$ 과  $D_2$ 는 각각 우함수는 기함수로, 기함수는 우함수로 변형시키는 역할을 한다. 결과적으로 다음의 푸리에 변환쌍이 성립한다.

$$R_i(u) \leftrightarrow g(p) = \sum_{n=0}^N (a_n \cos(np) + b_n \sin(np)) \quad \epsilon_{r1} \neq \epsilon_{r3} \quad (17)$$

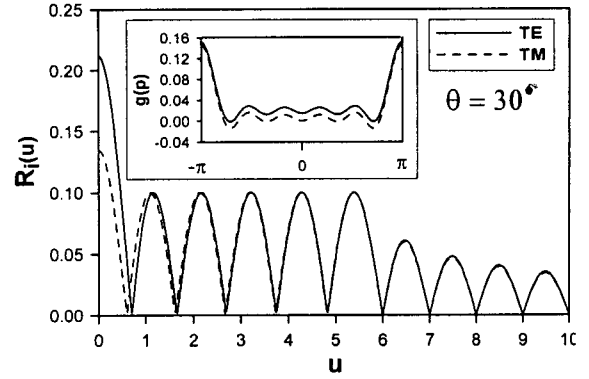
$$R_i^T(u) \leftrightarrow g^T(p) = \sum_{n=1}^N (b_n^A \cos(np) + a_n^A \sin(np)) \quad \epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} \quad (18)$$

여기서  $b_n^A$ 와  $a_n^A$ 는 샘플값  $b_n(= -R_{i,o}(n)/\pi)$ 와  $a_n(= R_{i,e}(n)/\pi)$ 로부터 원하는  $R_i^T(u)$ 의 패턴을 위해 update 시키므로써 계산될 수 있다.

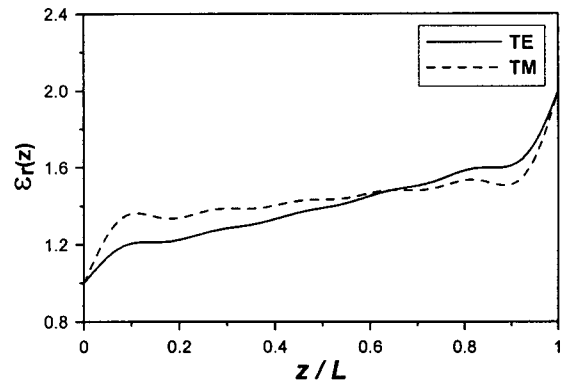
여기서  $R_i(u)$  패턴은 식(5)와 등가관계가 있는 Taylor의 라인소스 패턴을 사용하고 원하는 패턴을 만족시킬 수 있도록 null점을 제어한다.

#### IV. 최적화 과정과 응용 예

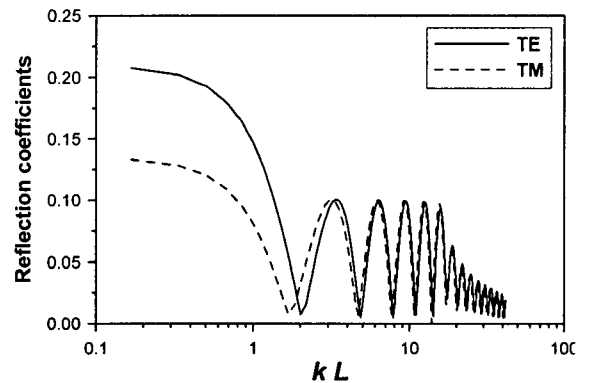
Taylor 패턴에서 제어될  $N$ 개의 lobe 각각의 피크치를  $R_{i,p}$ 로 두면 이는 최적화할 목표치가 되며 다음과 같이 오차함수를 정의하였다.



(a)



(b)



(c)

그림 2. 서로 다른 유전율간의 정합 예. (a) 제어된 lobe 패턴과 포텐셜함수. (b) 합성된 유전율 프로파일. (c) 계산된 반사계수.

$$E(U) = \sum_{p=1}^N |\ln((R_{i,p}(U)/S_p))|^2 \quad (19)$$

여기서  $U=[u_1, \dots, u_N]$ 을 의미하며 각 lobe의 목표치  $S_p$ 와 계산된  $R_{i,p}$ 와의 대수적 차이의 합을 최소자승법

을 사용하여 오차함수로 표현하였다.  $U$ 의 값을 update 시키면서 수렴조건  $E < \epsilon$ 을 만족시킬 때까지  $E$ 를 최소화시킨다.

한편  $u \rightarrow 0$ 일 때의  $R_i(u)$ 의 크기를  $C$ 라 하면 식(5)에 식(2)와 식(3)을 적용하면 다음과 같다.

TE 편파인 경우 :

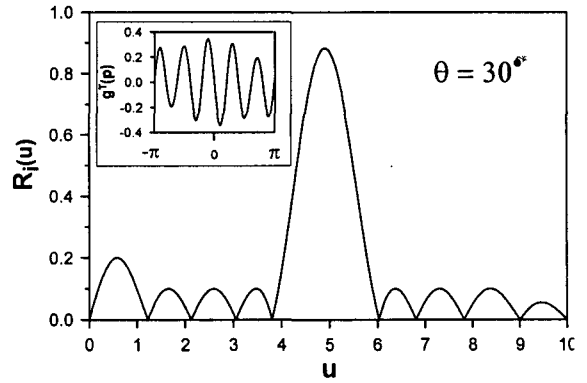
$$C = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\epsilon_r(L) - \sin^2 \theta}{\epsilon_r(0) - \sin^2 \theta} \right) \quad (20)$$

TM 편파인 경우 :

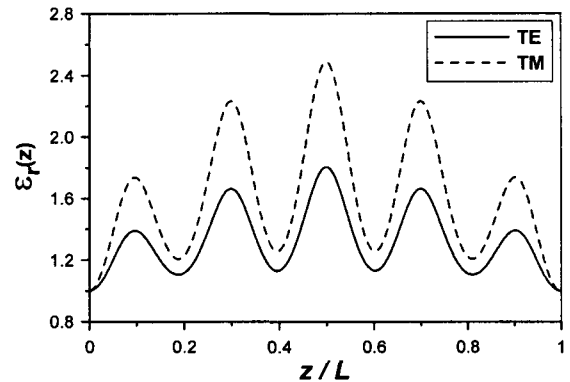
$$C = \frac{1}{4} \left[ \ln \left( \frac{\epsilon_r(L)}{\epsilon_r(0)} \right)^2 - \ln \left( \frac{\epsilon_r(L) - \sin^2 \theta}{\epsilon_r(0) - \sin^2 \theta} \right) \right] \quad (21)$$

예로서  $\theta = 30^\circ$ ,  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r3} = 2$  으로 두고,  $N = 5$ ,  $S_p = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1]$ 를 목표치로 두면 TE, TM 편파 각각에 대해 최적화된 패턴크기의 결과는 그림 2(a)와 같다. 각각의 포텐셜함수  $g(p)$ 는 식(17)로 부터 그림 2(a)에 동시에 보였다. 이 때  $b_n = 0$ 으로 두었다. 식(6)과 식(7)로 부터 계산된 유전율 프로파일은 그림 2(b)와 같다. 그림2(c)는 합성된 유전율을 식(4)에 대입하여  $\tanh(R_i)$ 를 계산한 주파수특성 결과로서 완만한 유전율 프로파일의 경우 목표로 하는 lobe의 크기를 만족시킴을 알 수 있다.

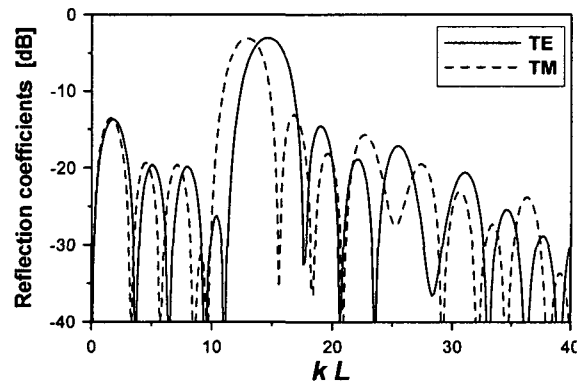
한편  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3}$ 일 경우, 식(20), (21)로부터  $\epsilon_r(0) = \epsilon_r(L)$ 이 되어 계산 불능이 되므로 이 특이점을 제거하기 위한 방법으로 제시한  $R_i^T(u)$  패턴 합성을 예로 들면  $\theta = 30^\circ$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1$ 인 경우  $N = 8$ ,  $S_p = [0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.883, 0.1, 0.1, 0.1]$ 를 목표치로 두고 앞 절에서 언급한 과정을 따른다. 그림 3(a)는 제어된 목표패턴과 계산된 포텐셜함수  $g^T(p)$ 를 도시한 것이며 이 경우는  $u = 0$  일 때  $R_i(0) = 0$ 이므로 TE 및 TM 각각의 경우에 대해 같은 형태로 합성된다. 그림 3(b)는 식(6)과 (7)에서  $g(p)$  대신  $g^T(p)$ 를 대입하여 합성한 유전율 프로파일을 나타낸 것이다. 목표치  $S_p$  중 0.883은  $\tanh(0.883) = -3[dB]$ 를 목표치로 설정한 것이며, 이는 실제 주파수영역에서 3[dB] 대역저지 필터특성을 갖도록 설정한 것이다. 합성된 유전율은 물리적으로  $\epsilon_r(z) \geq 1$ 의 조건을 만족해야 하며, 이는 첫번째 lobe의 크기에 의해 가장 많이 영향을 받는다. 예로 첫번째 lobe의 목표치를 0.1로 두고 합성한 유전율 프로파일은 그림 4와 같이  $\epsilon_r(z)$ 가 1미만으로 될 수 있다. 따라서 첫번째 sidelobe의 크기 목표치를 다른 sidelobe에 비해 조금 크게 설정하였다.



(a)



(b)



(c)

그림 3. 서로 같은 유전율 사이에서 임의 반사계수를 만족시키는 유전율 합성의 예. (a) 제어된 lobe 패턴과 포텐셜 함수. (b) 합성된 유전율 프로파일. (c) 계산된 반사계수.

한편 합성된 유전율 프로파일로 부터 실제 주파수영역에서 목표로 한 반사계수가 만족함을 보이기 위해 식

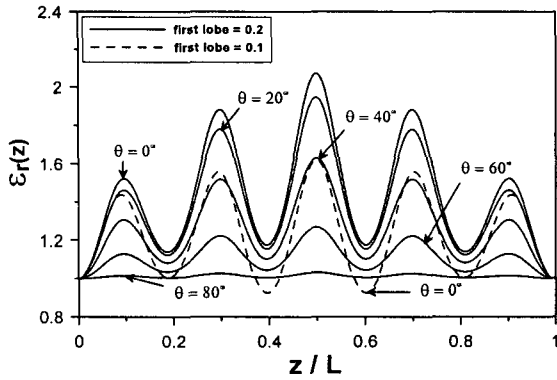


그림 4. TE 입사각 변화에 따른 합성된 유전율 프로파일.

(4)를 사용하여 그림 3(c)에 도시하였다. 이 식의 피적분함수에서 지수함수는 전기적길이의 차원으로 표현되어 있으므로 길이  $L$ 을 적절히 선정하므로써 주파수영역 반사계수의 주파수 센터링을 구현할 수 있다. 이 그림으로 부터 목표로 한 sidelobe의 크기와는 다소 차이가 있음을 알 수 있다. 이는 3[*dB*] lobe와 같이 큰 목표치를 가질 경우 그림 3(b)와 같이 합성된 유전율 프로파일 그림 2(b)와는 달리 빠르게(rapidly) 변화하므로 소위 WKB근사해<sup>[1]</sup>가 갖는 오차에 기인한 것이다. 그림 4는 TE파가 입사할 경우 입사각 변화에 따른 합성 프로파일을 도시한 것이다.

### V. 결론

본 연구에서는 비균질 유전체 층에 TE 및 TM 편파를 갖는 평면파가 임의 방향으로 입사될 경우 원하는 산란패턴을 만족시키는 일차원적이고 연속적으로 분포된 유전율을 합성하는 방법을 제안하였다. 이는 라인소스 안테나에 의한 안테나 패턴 합성법에서 패턴과 라인소스 분포함수를 계산하는 과정에 기본을 두고 있으며, 합성시 비유전율이 1이하가 되는 경우를 극복하기 위해 반복 샘플링법을 제안, 적용하였다. 이 방법은 실효유전율에 의해 결정되는 특성임피던스 합성에도 직접 적용될 수 있으므로 원하는 반사계수를 갖는 불균일 전송선로 설계에도 유용하게 사용될 수 있다.

### 참고문헌

- [1] W. C. Chew, *Waves and fields in inhomogeneous media*. IEEE Press, 1995.
- [2] E. J. Park, "A general perturbational approach for synthesizing the Riccati-type nonuniform transmission lines with arbitrarily specified reflection properties," *Microwave and Optical Tech. Lett.*, vol. 38, no. 1, pp. 52-56, July 2003.
- [3] D. L. Jaggard and Y. Kim, "Accurate one-dimensional inverse scattering using a nonlinear renormalization technique," *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. A-2, pp. 1922-1930, Nov. 1985.
- [4] P. V. Frangos and D. L. Jaggard, "A numerical solution to the Zakharov-Shabat inverse scattering problem," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 39, pp. 74-79, Jan. 1991.
- [5] G. Xiao, K. Yashiro, N. Gaun and S. Ohkawa, "A new numerical method for synthesis of arbitrarily terminated lossless nonuniform transmission lines," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 49, No. 2, pp. 369-376, Feb. 2001.
- [6] P. Pramanick and P. Bhartia, "A generalized theory of tapered transmission line matching transformers and asymmetric couplers supporting non-TEM mode," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, No. 3, pp. 1184-1191, Aug. 1989.
- [7] S. Uysal, *Nonuniform line microstrip directional couplers and filters*. Artech House, 1993.
- [8] J. A. Kong, *Electromagnetic wave theory*. John Wiley & Sons, 1990.
- [9] H. L. V. Trees, *Optimum array processing*. John Wiley & Sons, 2002.
- [10] M. Kirchning and R. H. Jansen, "Accurate model for effective dielectric constant for microstrip with validity up to millimeter-wave frequencies," *Electron. Lett.*, vol. 18, pp. 272-273, 1982.